مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۸، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۸۷

بررسی دینامیک کوانتومی مدارهای الکتریکی مزوسکوپی با بار گسسته

فردین خیراندیش[۱] و حسن پهلوانی[۲]

۱. گروه فیزیک دانشگاه اصفهان
پست الکترونیکی: fardin_kh@phys.ui.ac.ir
۲. گروه فیزیک دانشگاه قم
پست الکترونیکی: h_pahlavaniha@yahoo.com

(دریافت مقاله: ۸۶/۸/۱۳ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۷/۴/۲۳)

چکیده

دینامیک کوانتومی یک ذرهٔ باردار در زنجیره‌ای نامتناهی از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قوی، تحت تأثیر یک میدان خارجی وابسته به زمان بررسی شده است. ارتباط بین هامیلتونی چنین ذره‌ای با هامیلتونی مدارهای کوانتومی مزوسکوپی با بار گسسته روشن گردیده و بر این اساس جریان ماندگاری برای یک حلقه کوانتومی بدون اتلاف محاسبه شده است.

واژه‌های کلیدی: سامانه‌های مزوسکوپی، بار گسسته، جبر دینامیکی

۱. مقدمه

دینامیک کوانتومی یک ذرهٔ باردار در یک پتانسیل دوره‌ای تحت اثر یک میدان خارجی یک پدیدهٔ جالب و مهم در فیزیک کوانتومی است [۱، ۲]. بلوخ در مرجع [۲] پیشگویی کرد که تابع موج یک ذره باردار در یک بلور ایده آل تحت میدان الکتریکی یکنواخت تغیر مکان پیدا می‌کند و منجر به نوسانهای تناوبی معروف به نوسانات الکترونی بلوخ می‌شود [۳، ۴]. برای مطالعهٔ این ساختارها حالتهای جای‌گزیده که به حالتهای وانیر–استارک معروفند و نقش مهمی در خواص انتقال الکترونی جامدات دارند مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵، ۶]. این ساختارها که ابعادی در حدود ۱۰ nm دارند به سامانه‌های مزوسکوپی یا نانو ساختارها معروفند. در چنین سامانه‌هایی رفتار الکترون به صورت موجی است و این رفتار به شکل هندسی نمونه بستگی دارد. وقتی ابعاد سامانه در حدود طول همدوسی حاملهاست (طول همدوسی حاملها حداکثر فاصله‌ای است که یک ذره می‌تواند با حفظ اطلاعات مربوط به فاز خودطی نماید) برای بررسی دینامیک سامانه، باید مکانیک کوانتومی به کارگرفته شود. در این حالت گسسته بودن بار (بارها مضارب درستی از بار الکترون هستند) در بررسی مدارهای کوانتومی مزوسکوپی باید به حساب آورده شود.

برای اولین بار لی و چِن یک نظریهٔ کوانتومی برای مدارهای مزوسکوپی با بار گسسته ارائه نمودند [۷]. در این نظریه گسسته بودن بار الکتریکی توسط عملگر خودالحاق بار $\hat{q}$ که دارای یک طیف گسسته است در نظر گرفته می‌شود. یک مدل ساده از چنین سامانه‌هایی مدارهای کوانتومی LC هستند که با دو پارامتر اساسی القایدگی L و ظرفیت C توصیف می‌شوند[۷، ۸، ۹]. نظریه لی و چِن در مسائل متنوعی مربوط به مدارهای مزوسکوپی به کار گرفته شده است [۷، ۹، ۱۰–۱۴].

در ایــن مقالــه ویژگیهــای دینامیــک کوانتــومی مــدارهای الکتریکی مزوسکوپی تحت یـک میـدان خـارجی اختیـاری بـر اساس روش جبر دینامیکی مورد بررسی قـرار گرفتـه اسـت. در بخش۲ حرکت یک ذرۀ کوانتومی باردار دریک زنجیرۀ نامتناهی از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قـوی و تحت اثر یک میدان خارجی بررسی شده است. عملگـر تحـول زمانی را برای این مسئله به دست آورده و نشان می‌دهیم کـه بـا حل ارائه شده در مرجع [۱۵] سازگاری کامـل دارد. در بخـش۳ ارتباط بین نوسانات بلوخ دریک بلور تحت میـدان خـارجی بـا نوســانات ناشــی از جریــان و بــار در یــک مــدار کوانتــومی مزوسکوپی نشان داده شده است. در این بخش عملگـر جریـان برای مدار مزوسکوپی L (حلقه کوانتومی) محاسبه شـده اسـت. در بخش چهارم بحث و نتیجه گیری ارائه گردیده است.

۲. عملگر تحول زمانی

حرکت یک ذرۀ بـاردار در یـک زنجیـرۀ نامتنـاهی از چاههـای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قـوی و تحـت اثـر یک میدان اختیاری وابسـته بـه زمـان $F(t)$ بـا هـامیلتونی زیـر توصیف می‌شود

$$\hat{H}(t) = G(t)\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\left(|j\rangle\langle j+۱| + |j+۱\rangle\langle j|\right) + F(t)\sum_{j=-\infty}^{+\infty} j|j\rangle\langle j| \tag{۱}$$

که در آن $|j\rangle$ بیانگر یک حالت وانیـر جایگزیـده در مکـان j است، ایـن حالتهـا متعامدنـد. تـابع حقیقـی $G(t)$ تـابع جفـت شده‌گی انتگرال همپوشـانی نزدیکتـرین همـسایه‌هـا اسـت. بـر اساس روش جبر دینامیکی هامیلتونی مدل بستگی قـوی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت [۱۵]:

$$\hat{H}(t) = G(t)(\hat{K} + \hat{K}^\dagger) + F(t)\hat{N}, \tag{۲}$$

کـه در آن عملگرهـای بـالا برنـده $\hat{K}^\dagger$ و پـایین آرونـده $\hat{K}$ و عملگر موقعیت $\hat{N}$، به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\hat{K}^\dagger = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |j+۱\rangle\langle j|, \qquad \hat{K} = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} |j\rangle\langle j+۱|,$$
$$\hat{N} = \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} j|j\rangle\langle j|. \tag{۳}$$

این عملگرها روی حالتهای وانیر به شکل زیر عمل می‌کنند

$$\hat{K}^\dagger|j\rangle = |j+۱\rangle \qquad \hat{K}|j\rangle = |j-۱\rangle,$$
$$\hat{N}|j\rangle = j|j\rangle, \tag{۴}$$

ومجموعـه عملگرهـای $\left\{\hat{K}, \hat{K}^\dagger, \hat{N}\right\}$ جبـر لـی زیـر را ارضـا می‌کنند

$$\left[\hat{N}, \hat{K}\right] = -\hat{K} \qquad \left[\hat{N}, \hat{K}^\dagger\right] = \hat{K}^\dagger$$
$$\left[\hat{K}, \hat{K}^\dagger\right] = ۰ \ . \tag{۵}$$

برای بررسی دینامیک سامانه مورد نظر، عملگر تحول زمـانی در روش جبر دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha(t)\hat{N}} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta(t)\hat{K}} e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma(t)\hat{K}^\dagger} \tag{۶}$$

کـه در آن $\alpha(t)$، $\beta(t)$ و $\gamma(t)$ تـوابعی هـستند کـه از معادلـۀ مربوط به $\hat{U}(t)$ باید محاسبه شوند. بنابراین با جایگذاری رابطۀ (۶) در معادلۀ تحول :

$$i\hbar\frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{H}(t)\hat{U}(t), \tag{۷}$$

و استفاده از فرمول بیکـر - هاسـدورف، توابـع $\alpha(t)$، $\beta(t)$ و $\gamma(t)$ به صورت زیر تعیین می‌گردند

$$\alpha(t) = \int_۰^t F(t')dt',$$
$$\beta(t) = \int_۰^t G(t')e^{\frac{i}{\hbar}\alpha(t')}dt',$$
$$\gamma(t) = \beta^*(t) = \int_۰^t G(t')e^{\frac{-i}{\hbar}\alpha(t')}dt' \ . \tag{۸}$$

در نتیجه با معلوم بـودن میـدان خـارجی $F(t)$ و تـابع جفـت شده‌گی $G(t)$ می‌توان عملگر تحـول زمـانی $\hat{U}(t)$ را محاسـبه نمود.

۳. مدارهای مزوسکوپی

هــامیلتونی $\hat{H}$ بــرای مــدارهای کوانتــومی LC بــه صــورت زیراست [۷]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^۲}{۲L} + \frac{\hat{q}^۲}{۲C}. \tag{۹}$$

عملگرهای هرمیتی بار $\hat{q}$ وتکانه متناظر $\hat{p}$ در رابطهٔ جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند

$$[\hat{q},\hat{p}]=i\hbar\,. \qquad (۱۰)$$

در نظریهٔ لی و چِن عملگر بار $\hat{q}$ دارای طیف گسسته به صورت nq_e می‌باشد که در آن n یک عدد صحیح و $q_e=۱/۶۰۲\times ۱۰^{-۱۹}\ C$ کوانتوم بار (بار الکترون) می‌باشد.

$$\hat{q}\left|q\right\rangle = nq_e\left|q\right\rangle . \qquad (۱۱)$$

مشتقهای گسسته به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\nabla_q=\frac{\hat{Q}-۱}{q_e}\,, \qquad \bar{\nabla}_q=\frac{۱-\hat{Q}^{\dagger}}{q_e}\,, \qquad (۱۲)$$

که در آن عملگرهای $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^{\dagger}$ به صورت زیر هستند

$$\hat{Q}=\exp(\frac{iq_e\hat{p}}{\hbar}), \qquad \hat{Q}^{\dagger}=\exp(\frac{-iq_e\hat{p}}{\hbar})\,، \qquad (۱۳)$$

عملگرهای $\hat{q}$، $\hat{Q}$ و $\hat{Q}^{\dagger}$، در جبر زیر صدق می‌کنند :

$$\left[\hat{q},\hat{Q}\right]=-q_e\hat{Q} \qquad \left[\hat{q},\hat{Q}^{\dagger}\right]=q_e\hat{Q}^{\dagger} \qquad (۱۴)$$
$$\left[\hat{Q}^{\dagger},\hat{Q}\right]=۰$$

که با باز تعریف $\hat{q}=q_e\hat{N}$، $\hat{Q}=\hat{K}$ و $\hat{Q}^{\dagger}=\hat{K}^{\dagger}$، معادل جبر (۵) می‌شود.

هامیلتونی مدار کوانتومی مزوسکوپی LC با احتساب گسسته بودن بار به صورت زیر نوشته می‌شود که در حد $q_e\to ۰$ به هامیلتونی مدارهای کوانتومی با بار پیوسته میل می‌کند

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^{۲}}{۲Lq_e^{۲}}(\hat{Q}+\hat{Q}^{\dagger}-۲)+\frac{\hat{q}^{۲}}{۲C}\,. \qquad (۱۵)$$

۳. ۱. مدار کوانتومی L (حلقه کوانتومی)

هامیلتونی وابسته به زمان (۱۵) برای مدار L، در نمایش بار و تحت تأثیر پتانسیل خارجی، به شکل زیر است :

$$\hat{H}(t)=-\frac{\hbar^{۲}}{۲Lq_e^{۲}}(\hat{Q}+\hat{Q}^{\dagger}-۲)+\varepsilon(t)\hat{q}\,, \qquad (۱۶)$$

این هامیلتونی با هامیلتونی مدل بستگی قوی (۲) معادل است. زیرا با مقایسهٔ روابط جابه‌جایی (۵) و(۱۴) می‌توان نتیجه گرفت که عملگرهای پایین آورنده $\hat{K}$، بالا برنده $\hat{K}^{\dagger}$ و موقعیت $\hat{N}$ در هامیلتونی مدل بستگی قوی (۲) و عملگرهای نردبانی $\hat{Q}$، $\hat{Q}^{\dagger}$ و بار $\hat{q}$ در هامیلتونی مدارهای الکتریکی مزوسکوپی (۱۵) دارای ساختار جبری یکسانی هستند و دستگاههای $L=\left\{\hat{K},\hat{K}^{\dagger},\hat{N}\right\}$ و $L=\left\{\hat{Q},\hat{Q}^{\dagger},\hat{q}\right\}$ به طور جداگانه تشکیل جبر لی می‌دهند. بنابراین می‌توانیم عملگرهای $\hat{Q}$، $\hat{Q}^{\dagger}$ و $\hat{q}$ بر حسب حالتهای جای‌گزیده وانیر- استارک بنویسیم

$$\hat{Q}^{\dagger}=\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\left|j+۱\right\rangle\left\langle j\right|=\hat{K}^{\dagger}, \quad \hat{Q}=\sum_{j=-\infty}^{j=\infty}\left|j\right\rangle\left\langle j+۱\right|=\hat{K}, \qquad (۱۷)$$
$$\hat{q}=q_e\sum_{J=-\infty}^{J=\infty}j\left|j\right\rangle\left\langle j\right|=q_e\hat{N}.$$

با توجه به هم ارزی بین مولدهای ساختار جبر لی در مدارهای کوانتومی مزوسکوپی و نوسانات بلوخ در بلور می‌توان نتیجه گرفت که نوسانات بار و جریان در مدارهای کوانتومی مزوسکوپی با بار گسسته، معادل نوسانات بلوخ در بلور است. این تشابه به کوانتش بار ربط پیدا می‌کند، که در آن بار نقش مشابه با ثابت شبکه در بلور را بازی می‌کند. از آن جایی که نوسانات بلوخ پدیده‌ای همدوسند، مطالعهٔ فرایندهایی که سبب ناهمدوس شدن سامانه می‌شوند از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از این فرآیندهای ناهمدوس، برهم‌کنش بین اتمها است. برهم‌کنش بین اتمها باعث از بین رفتن هم‌ارزی روابط جابه‌جایی (۵) و(۱۴) می‌گردد، دینامیک چنین سامانه‌هایی را می‌توان در یک شبکهٔ اپتیکی بر اساس مدل بوز- هابارد در تقریب مدل بستگی قوی با روشهای تقریبی مورد مطالعه و بررسی قرار داد [۱۶و۱۷].

تحول عملگر جریان $\hat{I}(t)$ را می‌توان از معادلهٔ حرکت هایزنبرگ $\hat{I}=\frac{d\hat{q}}{dt}=\frac{۱}{i\hbar}\left[\hat{I},\hat{H}\right]$ به‌دست آورد در لحظه $t=۰$ داریم

$$\hat{I}=\frac{\hbar}{۲iLq_e}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\ (\left|j\right\rangle\left\langle j+۱\right|-\left|j+۱\right\rangle\left\langle j\right|)\,. \qquad (۱۸)$$

ویژه مقادیر و ویژه توابع عملگر جریان $\hat{I}(۰)$ به صورت زیر هستند:

$$I_{\varphi}=\frac{\hbar}{Lqe}\sin(\frac{q_e}{\hbar}\varphi) \quad \left|I_{\varphi}\right\rangle=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\sum_{J=-\infty}^{+\infty}\ \exp(\frac{ijq_e}{\hbar}\varphi)\left|j\right\rangle, \qquad (۱۹)$$

که در آن $\varphi \varepsilon R$ یک عدد کوانتومی حقیقی با ویژه مقادیر پیوستهٔ $\circ \leq \varphi \leq ۲\pi$ است. مطابق روش بخش قبل برای هامیلتونی (۱۶) عملگر تحول زمانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{U}(t) = \exp(\frac{-i\hbar t}{Lq_e^{۲}})\exp(-if(t)\hat{q})\exp[\frac{i\hbar}{۲Lq_e^{۲}}(g(t)\hat{Q}+g^{*}(t)\hat{Q}^{\dagger})], \quad (۲۰)$$

$$f(t)=\int_{\circ}^{t}\frac{\varepsilon(t')}{\hbar}dt', \qquad g(t)=\int_{\circ}^{t}\exp(-iq_e f(t')dt'\ . \quad (۲۱)$$

با معلوم بودن عملگر تحول زمانی به راحتی می‌توان تحول عملگر جریان را در سامانه به دست آورد. لذا اگر $\left|I_{\varphi}\right\rangle$ ویژه حالت جریان در لحظه $t=\circ$ باشد، در لحظه $t\neq\circ$ این حالت عبارت است از

$$\left|I_{\varphi},t\right\rangle = \hat{U}(t)\left|I_{\varphi}\right\rangle . \quad (۲۲)$$

برای این منظور ویژه توابع و ویژه مقدار عملگر $(g(t)\hat{Q}+g^{*}(t)\hat{Q}^{\dagger})$ را به‌دست می‌آوریم. با جایگذاری مستقیم می‌توان نشان داد که $\left|I_{\varphi}\right\rangle$ ویژه حالت عملگر $(g(t)\hat{Q}+g^{*}(t)\hat{Q}^{\dagger})$ با ویژه مقدار μ_{φ} است

$$(g(t)\hat{Q}+g^{*}(t)\hat{Q}^{\dagger})\left|I_{\varphi}\right\rangle = \mu_{\varphi}\left|I_{\varphi}\right\rangle ,$$
$$\mu_{\varphi} = ۲\,|\,g(t)\,|\cos(\alpha+\frac{q_e}{\hbar}\varphi)\,, \quad (۲۳)$$

که در آن $g(t)=|\,g(t)\,|\,e^{i\varphi}$ با رابطهٔ (۲۱) داده شده است. با جایگذاری معادله‌های (۲۰و۲۳) در معادلهٔ (۲۲) داریم :

$$\left|I_{\varphi},t\right\rangle = \exp(\frac{-i\hbar t}{Lq_e^{۲}})\exp(\frac{i\hbar\mu_{\varphi}}{۲Lq_e^{۲}})\sum_{j}\exp(ij(\frac{\varphi}{\hbar}-f(t))q_e\left|j\right\rangle , \quad (۲۴)$$

و جریان به صورت زیر به دست می‌آید :

$$I_{\varphi} = \left\langle I_{\varphi},t\left|\hat{I}\right|I_{\varphi},t\right\rangle = \frac{\hbar}{Lq_e}\sin[(\frac{\varphi}{\hbar}-f(t))q_e] \quad (۲۵)$$

در حالت حدی $q_e \to \circ$ یعنی در حالت بار پیوسته جریان عبارت است از

$$I_{\varphi}(t) = \frac{\hbar}{L}(\frac{\varphi}{\hbar}-f(t))\,, \quad (۲۶)$$

برای یک حلقه کوانتومی، با تغییر شار مغناطیسی $\varphi(t)$ از داخل حلقه می‌توان نیروی محرکه $\varepsilon(t)$ را مطابق قانون فاراده $\varepsilon(t)=-\frac{df(t)}{dt}$ ایجاد کرد. در این حالت جریان ماندگاری را می‌توان از رابطهٔ (۲۵) به دست آورد. نکته قابل توجه اینکه برای پتانسیل الکتریکی ثابت یا به طور معادل وقتی شار مغناطیسی به طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند، مطابق رابطهٔ (۲۶) جریان به‌طور خطی افزایش پیدا می‌کند در حالی‌که رابطهٔ (۲۵) یک رفتار دوره‌ای با فرکانس $\omega=\frac{df(t)}{dt}$ را برای این حالت نمایش می‌دهد.

۴. نتیجه‌گیری

با احتساب گسستگی بار الکتریکی در مدارهای کوانتومی مزوسکوپی نشان داده شد که هامیلتونی توصیف کننده این مدارها با هامیلتونی یک ذره باردار در زنجیره‌ای از چاههای کوانتومی یک بعدی در تقریب مدل بستگی قوی معادل است. با استفاده از این تشابه جریان ماندگاری الکتریکی برای مدار کوانتومی L (حلقه کوانتومی) محاسبه شد.

مراجع

1. C Zener, *Proc. R. Soc. Lond*, A **145** (1934) 523.
2. F Bloch, *Z. Phys* **52** (1928) 555.
3. G H Wannier, *Phys. Rev* **100** (1955) 1227.
4. D H Dunlap and V M Kenker, *Phys. Rev*. B **34** (1986) 3625.
5. K Leo, P Hairing, F Bruggemann, R Schwedler and K Kohler, *Solid State Commun*. **84** (1992) 943.
6. A Buchleitner and A R Kolovsky, *Phys. Rev. Lett* **91** (2003) 253002.
7. Y Q Li, B. Chen, *Phys. Rev*. B **53** (1996) 4027.
8. B Chen, X Shen and Y Q Li, *Phys. Lett*. A **313** (2003) 431.
9. J C Flores , *Phys. Rev*. B **64** (2001) 235309.
10. H Cheung, Y Gefen, E K Riedel and W H Shih, *Phys. Rev*. B **37** (1988) 6050.
11. Y Q Li, in *Proc. 5th Wigner Symposium*, eds. P Kasperkovitz and D Grau, World Scientific, Singpore (1998) 307-310.

12. B Chen, X Shen, Y Li, L. Sun and R Han, *Physica* E **31** (2006) 27.
13. B Chen, X Shen, Y. Li, D. Yu and R. Han, *Physica* E **31** (2006) 165.
14. J C Flores , *Europhys*. Lett **69** (2005) 116.
15. H J Korsch, S Mossmann, *Phys. Lett*. A **317** (2003) 54-63.
16. A R Kolovsky, *Phys. Rev. Lett*. **90** (2003) 213002.
17. A R Kolovsky and H J Korsch, e-print cond-mat/0403205 (2004).