مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۹، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۸۸

بررسي اتلاف در مدار كوانتومي LC

داود نصراصفهاني و فردين خيرانديش

گروه فيزيک، دانشكدة علوم، دانشگاه اصفهان، خيابان هزار جريب، اصفهان

پست الكترونيكي: fardin_kh@phys.ui.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۹/۱۶ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۸۸/۶/۲۲)

چكيده

در اين مقاله مقاومت يک مدار كوانتومي LC را به عنوان يک محيط گرمايي در نظر مي گيريم. محيط گرمايي را مي توان با مجموعه‌اي از نوسانگرهاي هم آهنگ كوانتومي با فركانس پيوسته مدل سازي نمود. با استفاده از روش جفت شدگي كمينه بين مدار و ميدان توصيف كنندة محيط، فرآيند اتلاف انرژي و احتمال‌هاي گذار بين ترازهاي انرژي مدار كوانتومي، به دست آمده است.

واژه‌هاي كليدي: اتلاف، مدار کوانتومی، حمام گرمایی، جفت شدگی کمینه

۱. مقدمه

کوانتش مدار کوانتومی LC اولین بار توسط لویزل مورد بررسی قرار گرفت[۱]. ما در این مقاله از فرمول‌بندی جفت شدگی کمینه [۲ – ۵] برای بررسی اتلاف در مدار مزوسکوپی LC استفاده می‌کنیم و معادلهٔ لانژون [۶ – ۱۰] را برای مدار به دست می‌آوریم. در ادامه احتمال گذار را برای حالت‌های مختلف محیط محاسبه می‌کنیم.

۲ .كوانتش مدارهاي الكتريكي

۲.۱ معادلات حركت كلاسيك

برای به دست آوردن هامیلتونی مدار ابتدا معادلات حرکت مربوط به مدار LC را بر اساس اصل بقای بار و معادلات ماکسول به صورت زیر می‌نویسیم

$$\dot{q} = -I \,, \qquad \frac{q}{C} = -L\frac{d}{dt}I \,, \qquad (۱)$$

q بار خازن و I جریان در مدار است. برای هامیلتونی مدار داریم:

$$H = \frac{p^{2}}{2L} + \frac{q^{2}}{2C} \,, \qquad (۲)$$

و معادلات حرکت کلاسیک با استفاده از کروشه‌های پواسون به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\dot{q} = \{H, q\} = \frac{p}{L}\,, \qquad \dot{p} = \{H, p\} = -\frac{q}{C}\,, \qquad \{q, p\} = 1\,, \qquad (۳)$$

که همان معادلات به دست آمده از معادلات ماکسول و تعریف p می‌باشند.

۲.۲. کوانتش

برای کوانتش یک مدار LC کافی است تبدیلات زیر را برای p و q در نظر بگیریم

$$q \to \hat{q}\,, \qquad p \to \hat{p}\,. \qquad (۴)$$

در این حالت $\hat{q}$ و $\hat{p}$ به ترتیب عملگرهای هرمیتی مربوط به

بار و شار حاصل از جریان در مدار هستند. با توجه به شکل هامیلتونی واضح است که حل معادله شرودینگر مربوط به سامانه فوق درست شبیه به حل معادله شرودینگر مربوط به نوسانگر هم آهنگ می‌باشد. به این ترتیب عملگرهای آفرینش و نابودی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{b}^{\dagger}=\sqrt{\frac{۱}{۲\hbar\omega_{\circ}C}}\hat{q}-i\sqrt{\frac{۱}{۲\hbar\omega_{\circ}L}}\hat{p}\,,$$
$$\hat{b}=\sqrt{\frac{۱}{۲\hbar\omega_{\circ}C}}\hat{q}+i\sqrt{\frac{۱}{۲\hbar\omega_{\circ}L}}\,, \qquad (۵)$$
$$\left[\hat{q},\hat{p}\right]=i\hbar\ .$$

این عملگرها در روابط زیر که به جبر هایزنبرگ معروف است صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned}&\left[\hat{b},\hat{b}^{\dagger}\right]=۱,\\&\left[\hat{H},\hat{b}\right]=-\hbar\omega_{\circ}\hat{b}\,,\\&\left[\hat{H},\hat{b}^{\dagger}\right]=\hbar\omega_{\circ}\hat{b}^{\dagger}\,,\\&\hat{H}=\hbar\omega_{\circ}(\hat{b}^{\dagger}\hat{b}+\tfrac{۱}{۲})\,,\quad \omega_{\circ}=\frac{۱}{\sqrt{LC}}\,.\end{aligned}\qquad (۶)$$

ویژه مقادیر و ویژه حالت‌ها مانند نوسانگر هم آهنگ می‌باشند با این تفاوت که در اینجا عملگر بار به‌جای مکان و عملگر شار به جای تکانه آمده است.

۳. مقاومت مدار به عنوان محیط اتلافی

در این بخش مقاومت مدار را با یک محیط اتلافی مدل سازی می‌کنیم زیرا وارد کردن مستقیم عنصر مقاومت در معادلات حرکت باعث حذف نوفه کوانتومی و ایجاد ناسازگاری در روابط عدم قطعیت می‌شود [۸ و ۹]. برای این منظور محیط را با مجموعه‌ای نامتناهی از نوسانگرهای هم‌آهنگ مدل سازی می‌کنیم. هامیلتونی این مجموعه برابر است با

$$\hat{H}_R=\int_{-\infty}^{+\infty}dk\hbar\omega_k\hat{a}_k^{\dagger}\hat{a}_k\ . \qquad (۷)$$

میدان متناظر با این هامیلتونی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\hat{R}=\int_{-\infty}^{+\infty}dk(f(\omega_k)\hat{a}_k+f^{*}(\omega_k)\hat{a}_k^{\dagger})\ . \qquad (۸)$$

مطابق روش جفت شدگی کمینه هامیلتونی در حضور محیط اتلافی به صورت زیر تبدیل می‌شود [۳، ۴، ۵]

$$\hat{H}=\frac{\left(\hat{p}-\hat{R}\right)^{۲}}{۲L}+\frac{\hat{q}^{۲}}{۲C}+\hat{H}_R\ . \qquad (۹)$$

حالت‌های مربوط به سامانه کلی به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت‌های میدان در حالت‌های مدار می‌باشند $\left(|\rangle_c\otimes|\rangle_\phi\right)$. دینامیک متغیرهای دینامیکی سامانه را می‌توان از حل معادلات هایزنبرگ به دست آورد.

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{q}}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{q}\right]=\frac{\hat{p}-\hat{R}}{L},\\&\dot{\hat{p}}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{p}\right]=\frac{\hat{q}}{C}\,.\end{aligned}\qquad (۱۰)$$

از معادلهٔ (۱۰) داریم

$$\ddot{\hat{q}}=\frac{\dot{\hat{p}}-\dot{\hat{R}}}{L}=-\frac{۱}{LC}\hat{q}-\frac{۱}{L}\dot{\hat{R}}\,, \qquad (۱۱)$$

که نتیجه می‌دهد :

$$\ddot{\hat{q}}+\omega_{\circ}^{۲}\hat{q}=-\frac{\dot{\hat{R}}}{L},$$

ملاحظه می‌شود که بر خلاف حالت بدون برهم‌کنشی، در طرف دوم معادلهٔ (۱۰) یک جمله $-\frac{\hat{R}}{L}$ اضافه شده است که باید در محاسبات منظور شود. برای محاسبه $\hat{R}$ می‌توان $\dot{\hat{a}}_k$ و $\dot{\hat{a}}_k^{\dagger}$ را با استفاده از معادلات هایزنبرگ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{a}}_k^{\dagger}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{a}_k^{\dagger}\right]=i\omega_k\hat{a}_k^{\dagger}-\frac{i}{\hbar}\dot{\hat{q}}f\left(\omega_k\right),\\&\dot{\hat{a}}_k=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{a}_k\right]=-i\omega_k\hat{a}_k+\frac{i}{\hbar}\dot{\hat{q}}f^{*}\left(\omega_k\right).\end{aligned}\qquad (۱۲)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات (۱۲) برای عملگرهای فوق داریم:

$$\begin{aligned}&\hat{a}_k^{\dagger}(t)=\hat{a}_k^{\dagger}(\circ)e^{i\omega_k t}-\frac{i}{\hbar}f(\omega_k)\int_{\circ}^{t}dt'e^{i\omega_k(t-t')}\dot{\hat{q}}(t')\,,\\&\hat{a}_k(t)=\hat{a}_k(\circ)e^{-i\omega_k t}+\frac{i}{\hbar}f^{*}(\omega_k)\int_{\circ}^{t}dt'e^{-i\omega_k(t-t')}\dot{\hat{q}}(t')\,.\end{aligned}\qquad (۱۳)$$

اگر حاصل معادلهٔ (۱۳) را در معادلات (۸) و (۱۱) قرار دهیم، داریم.

$$\ddot{\hat{q}}+\omega_{\circ}^{۲}\hat{q}+\frac{d}{dt}\int_{\circ}^{t}dt'\gamma(t-t')\dot{\hat{q}}(t')=\frac{۱}{L}\varepsilon\left(t\right)\ , \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$\gamma(t-t')=\frac{۲}{L\hbar}\int dk\left|f\left(\omega_k\right)\right|^{۲}\sin\omega_k(t-t'),$$
$$\varepsilon\left(t\right)=i\int dk\omega_k\left[f(\omega_k)\hat{a}_k(\circ)e^{-i\omega_k t}-f^{*}(\omega_k)\hat{a}_k^{\dagger}(\circ)e^{i\omega_k t}\right].$$

حال به محاسبهٔ احتمال‌های گذار برای شرایط اولیه متفاوت

می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا هامیلتونی را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2L}+\frac{\hat{q}^2}{2C}-\frac{\hat{p}\hat{R}}{L}+\frac{\hat{R}^2}{2L}+\hat{H}_R\,, \tag{۱۶}$$

در حالت جفت شدگی ضعیف می‌توان از جملهٔ $\frac{\hat{R}^2}{2L}$ در برابر $-\frac{\hat{p}\hat{R}}{L}$ صرف‌نظر کرد و هامیلتونی را به صورت زیر نوشت

$$\hat{H}=\hat{H}_\circ+\hat{V},\hat{V}=-\frac{\hat{p}\hat{R}}{L},\;\; H_\circ=h\omega_\circ(\hat{b}^\dagger\hat{b}+\frac{1}{2})+\hat{H}_R \tag{۱۷}$$

عملگرهای $\hat{a}_k$ و $\hat{b}$ در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر هستند

$$\hat{a}_{kI}(t)=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\circ(t)}\hat{a}_k e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\circ(t)}=\hat{a}_k e^{i\omega_k t}\,,$$
$$\hat{b}_{kI}(t)=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\circ(t)}\hat{b}_k e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_\circ(t)}=\hat{b}_k e^{i\omega_\circ t}. \tag{۱۸}$$

با استفاده از تقریب امواج چرخان، $\hat{V}_I$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\hat{V}_I=-i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\circ}{2L}}\times\int dk\left[f(\omega_k)\hat{a}_k\hat{b}^\dagger e^{-i(\omega_k-\omega_\circ)t}-f^*(\omega_k)\hat{a}_k^\dagger\hat{b}e^{i(\omega_k-\omega_\circ)t}\right] \tag{۱۹}$$

عملگر تحول زمانی تا مرتبهٔ اول اختلال برابر است با

$$u_I(t,t_\circ)\approx 1-\frac{1}{h}\int_\circ^t dt'\hat{V}_I(t')$$
$$=1-\sqrt{\frac{\omega_\circ}{2L\hbar}}\int dk e^{i(\omega_k-\omega_\circ)\frac{1}{2}}\frac{\sin[\frac{(\omega_k-\omega_\circ)t}{2}]}{(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2})} \tag{۲۰}$$
$$\times[f(\omega_k)\hat{a}_k\hat{b}^\dagger-f^*(\omega_k)\hat{a}_k^\dagger\hat{b}].$$

با در دست داشتن $u_1(t)$ می‌توان تحول زمانی عملگر ماتریس چگالی را به دست آورد.

$$\rho(t)=u_I(t)\rho(\circ)u_I^\dagger(t)\,, \tag{۲۱}$$

بنابراین با داشتن حالت اولیه سامانه تحول ماتریس چگالی قابل محاسبه می‌باشد و در نهایت می‌توان احتمال گذار را بین حالت‌های مختلف محاسبه کرد. حال به بررسی شرایط اولیه متفاوت برای محاسبهٔ احتمال‌های گذار می‌پردازیم.

۱) $\rho_I(\circ)=|n\rangle_{cc}\langle n|\otimes|\circ\rangle_{RR}\langle\circ|$ برای به دست آوردن عملگر چگالی مدار کافی است روی درجات آزادی مربوط به محیط ردگیری انجام شود، با انجام این کار عملگر ماتریس چگالی سامانه به صورت زیر به دست می‌آید

$$\rho_{sI}(t)=Tr(\rho_I(t))$$
$$=|n\rangle_{cc}\langle n|+\frac{n\,\omega_\circ}{2L\hbar}|n-1\rangle_{cc} \tag{۲۲}$$
$$\langle n-1|\int_{-\infty}^{+\infty}dp\left|f(\omega_p t)\right|^2\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_p-\omega_\circ}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_p-\omega_\circ}{2}t\right)^2}\;.$$

در رابطهٔ فوق از فرمول $Tr_R\left(|1_k\rangle_{RR}\langle 1'_k|\right)=\delta(k-k')$ استفاده شده است. در حد زمان‌های بزرگ داریم.

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_p-\omega_\circ}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_p-\omega_\circ}{2}t\right)^2}=2\pi t\delta\left(\omega_p-\omega_\circ\right), \tag{۲۳}$$

با استفاده از این رابطه معادلهٔ (۲۲) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\rho_{sI}(t)=|n\rangle_{cc}\langle n|+\frac{4\pi^2 n\omega_\circ^2 t}{Lhc^3}|n-1\rangle_{cc}\langle n-1|\,, \tag{۲۴}$$

با استفاده از ρ_{sI} احتمال گذار از حالت $|n\rangle$ به $|n-1\rangle$ برابر است با

$$\Gamma_{n\to n-1}=Tr_s\left(|n-1\rangle_{cc}\langle n-1|\rho_{sI}(t)\right)=\frac{4\pi^2 n\omega_\circ^2 nt}{\hbar c^3}, \tag{۲۵}$$

که در آن ردگیری روی حالت‌های مربوط به مدار انجام شده است.

۲) حالت اولیهٔ محیط به صورت $\left|1_{p1}\ldots1_{pj}\right\rangle$ می‌باشد، با استفاده از روابط زیر

$$Tr_R\left[a_{\vec{k}}^\dagger\left|1_{p1}\ldots1_{pj}\right\rangle\left\langle 1_{p1}\ldots1_{pj}\right|a_{\vec{k}'}\right]$$
$$=\delta(k-k')$$
$$Tr_R\left[a_{\vec{k}'}\left|1_{p1}\ldots1_{pj}\right\rangle\left\langle 1_{p1}\ldots1_{pj}\right|a_{\vec{k}}^\dagger\right] \tag{۲۶}$$
$$=\sum_{l=1}^{j}\delta(p_l-k')\delta(p_l-k)$$

برای تحول زمانی تابع چگالی داریم.

$$\rho_{sI}(t)=|n\rangle_{cc}\langle n|+\frac{(n+1)\omega_\circ}{2Lh}|n+1\rangle_{cc}\times\langle n+1|\sum_{l=1}^{j}\left|f\left(\omega_{p_l}\right)\right|^2\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{p_l}-\omega_\circ}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_{p_l}-\omega_\circ}{2}t\right)^2}+\frac{n\,\omega_\circ}{2L\hbar}|n-1\rangle_{cc}\langle n-1|\int_{-\infty}^{+\infty}dk\left|f\left(\omega_k\right)\right|^2\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2}t\right)^2}$$ (۲۷)

تمام محاسبات مربوط به این قسمت درست مانند محاسبات مربوط به قسمت ۱ می‌باشد و از تکرار آن صرف نظر می‌کنیم. بنابراین احتمال‌های گذار در حد زمان‌های بزرگ برابرند با:

$$\Gamma_{n\to n-1}=Tr_S\left[|n-1\rangle_{cc}\langle n-1|\rho_{sI}(t)\right]=\frac{4\pi^2 n^2\omega_\circ^3 t}{L\hbar c^3}\left|f\left(\omega_\circ\right)\right|^2\sum_{l=1}^{j}\delta\left(\omega_{pl}-\omega_p\right),$$
$$\Gamma_{n\to n+1}=Tr_S\left[|n\rangle_{cc}\langle n|\rho_{sI}(t)\right]=\frac{(n+1)\pi\omega_\circ t}{L\hbar}\left|f\left(\omega_\circ\right)\right|^2\sum_{l=1}^{j}\delta\left(\omega_{pl}-\omega_p\right).$$ (۲۸)

۳) محیط به صورت توزیع ماکسول - بولتزمن در دمای T است. در این حالت داریم

$$Tr_R\left[a_k\rho_R^T a_k^i\right]=Tr_R\left[a_k^\dagger\rho_R^T a_{k'}^\dagger\right]=0,$$
$$Tr_R\left[a_k\rho_R^T a_{k'}^\dagger\right]=\frac{\delta\left(k-k'\right)}{e^{\frac{\omega_k}{kT}}-1},$$ (۲۹)
$$Tr_R\left[a_{k'}^\dagger\rho_R^T a_k\right]=\frac{\delta\left(k-k'\right)e^{\frac{\omega_k}{kT}}}{e^{\frac{\omega_k}{kT}}-1},$$

و عملگر ماتریس چگالی برابر است با

$$\rho_{sI}(t)=\frac{(n+1)\omega_\circ}{2L\hbar}|n+1\rangle_{cc}\langle n+1|\times\int d^3k\frac{\left|f\left(\omega_k\right)\right|^2}{e^{\frac{\omega_k}{kT}}-1}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2}t\right)^2}+\frac{n\,\omega_\circ}{2L\hbar}|n-1\rangle_{cc}\langle n-1|\times\int d^3k\frac{\left|f\left(\omega_k\right)\right|^2}{e^{\frac{\omega_k}{kT}}-1}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_k-\omega_\circ}{2}t\right)^2}+|n\rangle_{cc}\langle n|.$$ (۳۰)

در حد زمان‌های بزرگ احتمال‌های گذار $\Gamma_{n\to n-1}$ و $\Gamma_{n\to n+1}$ به صورت زیر ساده می‌شوند

$$\Gamma_{n\to n-1}=Tr_S\left[|n-1\rangle_{cc}\langle n-1|\rho_{sI}(t)\right]=\frac{4\pi^2\omega_\circ^3 n^2 t}{L\hbar c^3}\frac{\left|f\left(\omega_\circ\right)\right|^2 e^{\frac{\omega_k}{kT}}}{e^{\frac{\omega_k}{kT}}-1},$$
$$\Gamma_{n\to n+1}=Tr_S\left[|n\rangle_{cc}\langle n|\rho_{sI}(t)\right]=\frac{(n+1)\pi\omega_\circ t}{L\hbar}\frac{\left|f\left(\omega_\circ\right)\right|^2}{e^{\frac{\omega_k}{kT}}-1}.$$ (۳۱)

با توجه به روابط (۳۱)، در حالتی که محیط در دمای صفر است تنها احتمال گذار غیر صفر گذار $\Gamma_{n\to n-1}$ است یعنی در این حالت انرژی از مدار به محیط انتقال می‌یابد و این تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که مدار به حالت پایه $|0\rangle$ برسد و در این حالت می‌ماند.

۳. بحث و نتیجه‌گیري

در این مقاله با استفاده از روش جفت شدگی کمینه برهم‌کنش یک مدار کوانتومی LC را با محیط اتلافی خود که می‌تواند مدلی برای مقاومت درونی مدار باشد مورد بررسی قرار دادیم و برای حالت‌های مختلف محیط، احتمال‌های گذار را محاسبه کردیم.

مراجع

1. W H Louislel, *Quantum statistical Properties of Radiation*, John weily (1973).
2. F Kheirandish and M Amooshahi, *A minimal coupling method for investigating one dimensional dissipative quantum systems*, arXiv: quant-ph/ 0502076 v2 20 Jul (2005).
3. F Kheirandish and M Amooshahi, *Int. J. Theor. Phys*. **45** (1) (2006) 33.
4. F Kheirandish and M Amooshahi. *Mod. Phys. Lett*. A**20** (2005) 39.
5. F Kheirandish and M Amooshahi. *Phys. Rev*. A **74** (2006) 042102.
6. P Caldirola, Nuovo Cimento **18** (1941) 393.
7. P Caldirola, Nuovo Cimento **77** (1983) 241.
8. A O Cadeira and A J Legget. *Physical Review Letters* **46** (1981) 211.
9. A O Cadeira and A J Legget, *Annals of Physics,* **179** (1983) 374.
10. H Haken, *Reviews of Modern Physics,* **47** (1975) 67.