مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۲، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۱

دینامیک کوانتومی ذرهٔ جرم‌دار روی دوسیتر ۳+۱

اردشیر رابعی و سودابه رضایی

دانشکدهٔ علوم دانشگاه رازی، باغ ابریشم، کرمانشاه

پست الکترونیکی: rabeie@razi.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۲/۱۸ ؛ پذیرش: ۱۳۹۱/۵/۱۰)

چکیده

حرکت ذره جرم‌دار روی دوسیتر ۳+۱ دارای فضای فازی معادل با کرهٔ مختلط سه بعدی می‌باشد. هدف ما در این کار بررسی این حرکت در چارچوب مکانیک کوانتومی است. گذار از مکانیک کلاسیک به مکانیک کوانتومی به کمک حالت‌های همدوس امکان پذیر می‌باشد. بنابراین در این کار ما با تعیین این حالت‌ها ، به کوانتش مشاهده پذیرهای کلاسیکی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس، کوانتش

۱. مقدمه

هدف ما در این مقاله توصیف کوانتومی حرکت ذره جرم‌دار روی فضا – زمان دوسیتر۳+۱ است. مسلماً شناخت فضای فاز کلاسیکی مربوط به این حرکت در راستای تحقق این هدف، می‌تواند مؤثر باشد. به این منظور ابتدا فضای فاز مربوطه را با به کار بردن روش مدار و قضایای کیریلوو [۱] به صورت فضای کتانژانت $T^*(S^3)$ تعیین خواهیم نمود که البته با کرهٔ مختلط سه بعدی یکریخت می‌باشد. از طرفی برای سیستم‌هایی با فضای فاز غیر صفحه، سیستم مورد بررسی در این کار، کوانتش معمولی جوابگو نیست [۵]. روشی که برای اعمال کوانتش روی چنین سیستم‌هایی پیشنهاد می‌شود، کوانتش کمک حالت‌های همدوس و از نوع برزین –گلوبر– گزو می‌باشد [۳]. که در این روش، ما تنها به تعیین حالت‌های همدوس روی فضای هیلبرت و اندازهٔ مناسب روی فضای فاز احتیاج داریم.

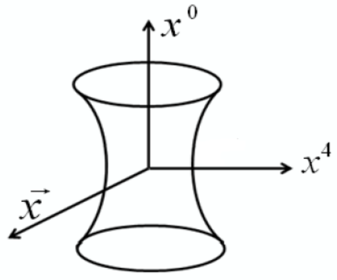
تا کنون روش‌های مختلفی برای تعیین حالت‌های همدوس ارائه شده که ما در این کار از ایدهٔ برایان هال که به دست آوردن حالت‌های همدوس را معادل با حل معادلهٔ گرما می‌داند، استفاده می‌نمائیم [۴].

در پایان با داشتن این حالت‌ها و تعیین اندازهٔ مناسب، به کوانتش مشاهده پذیرهای کلاسیکی روی دوسیتر ۳+۱، به روش برزین–گلوبر– گزو می‌پردازیم.

۲. جهان دوسیتر

فضا – زمان دوسیتر، جواب با بیشینهٔ تقارن برای معادله انیشتین در حالت خلاء و با ثابت کیهان شناسی مثبت می‌باشد. این فضا– زمان را می‌توان به صورت یک هذلولی‌وار چهاربعدی که در فضا – زمان مینکوفسکی پنج بعدی شناور است، تصور کرد (شکل ۱):

$$X_H = \{x \in M_5 : x^2 = \eta_{\gamma\beta} x^\gamma x^\beta = -\frac{3}{\Lambda}, \gamma, \beta = 0,1,2,3,4\},$$



شکل ۱. هذلولی‌وار دوسیتر.

که $\eta_{\gamma\beta}$ متریک فضا- زمان مینکوفسکی و Λ ثابت کیهان شناسی می‌باشد.

گروه متقارن دینامیکی این فضا – زمان گروه ده پارامتری SO_0(۴و۱) است که ما در این کار ترجیح می‌دهیم از گروه دوپوششی آن یعنی گروه دوتایی Sp(۲و۲) استفاده نمائیم. این گروه به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$Sp(2,2)=\{g\in M_2(K): \det g=1, g^{+}\gamma^{0}g=\gamma^{0}\}, \qquad (1)$$

که K معرف میدان اعداد کواترنیون و $\gamma^{0}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ماتریس دیراک است.

۳. فضاي فاز

در مکانیک کلاسیک، فضایی که مجموعهٔ حالت‌های سیستم روی آن مشخص است فضای فاز نامیده می‌شود که از نظر توپولوژی یک رویه (منیفلد) دوتایی هموار است. از طرفی بر اساس قضایای کیریلوو و روش مدار، مدار هم‌الحاقی مربوط به گروه G نیز ساختار دوتایی دارد که خود با رویه دوتایی همگن با گروه دینامیکی G یکریخت است. از این رو می‌توان فضای همگن مربوط به گروه تقارنی سیستم هامیلتونی را به عنوان فضای فاز مطرح نمود.

۴. تعيين فضاي فاز مربوط به حركت ذرة جرم‌دار روي دوسيتر ۳+۱

بر اساس مطالب ذکر شده ، ما می‌توانیم فضای فاز مربوط به حرکت ذره روی دوسیتر۳+۱ را از مدار هم الحاقی گروه Sp(۲و۲) تعیین نمائیم. از طرفی برای گروه‌های لی ساده، مثل دوسیتر، مدار هم الحاقی با مدار الحاقی مشخص می‌شود. بنابراین فضای فاز مربوط به حرکت ذرهٔ جرم‌دار روی دوسیتر ۳+۱ را می‌توان از مدارالحاقی گروه Sp(۲و۲) تعیین نمود.

۵. مدار الحاقي گروه Sp(۲و۲)

هر المان مربوط به گروه Sp(۲و۲) به صورت زیر تجزیه می‌شود [۶]:

$$g=jl\ ,$$

انتقال زمان $\begin{pmatrix}\cosh\frac{\psi}{2} & \sinh\frac{\psi}{2}\\ \sinh\frac{\psi}{2} & \cosh\frac{\psi}{2}\end{pmatrix}$ ، انتقال فضا $j=\begin{pmatrix}\eta & 0\\ 0 & \overline{\eta}\end{pmatrix}$

بوست $\begin{pmatrix}\cosh\frac{\phi}{2} & \hat{u}\sinh\frac{\phi}{2}\\ -\hat{u}\sinh\frac{\phi}{2} & \cosh\frac{\phi}{2}\end{pmatrix}$ ، چرخش فضا $l=\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi\end{pmatrix}$

$$\psi,\phi\in R\ ,\qquad \xi,\eta,\hat{u}=-\overline{\hat{u}}\in SU(2).$$

این گروه با سه زیر گروه تک پارامتری انتقال فضا، سه زیر گروه تک پارامتری چرخش فضا، سه زیر گروه تک پارامتری مربوط به بوست و یک زیر گروه تک پارامتری انتقال زمان می‌باشد. بر این اساس جبر مربوط به این گروه ده پارامتری به شکل کلی زیر بیان می‌شود:

$$Sp(2,2)\ni X=\begin{pmatrix}\vec{y}_1 & q\\ \overline{q} & \vec{y}_2\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

که $\vec{y}_1$ و $\vec{y}_2$ کواترنیون خالص و q کواترنیون معمولی می‌باشد.

حال نقطهٔ X_0 از این جبر را که مربوط به حرکت ذرهٔ جرم‌دار روی دوسیتر ۳+۱ است، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X_o=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ . \qquad (3)$$

می‌توان نشان داد که این نقطه تحت عمل الحاقی گروه جبری SO(۱و۱)×SU(۲) ناوردا می‌باشد. از این رو فضای همگن مربوط به مدار الحاقی به صورت زیر مشخص می‌شود :

$$M_H=\frac{Sp(2,2)}{SO(1,1)\times SU(2)}\ , \qquad (4)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که عمل الحاقی مربوط به ماتریس‌های انتقال فضا و بوست به صورت زیر خواهد بود:

$$g.X_{\circ} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{P}}{m} & \frac{P_{\circ}}{m}\zeta \\ \frac{P_{\circ}}{m}\bar{\zeta} & -\bar{\zeta}\frac{\vec{P}}{m}\zeta \end{pmatrix} = X(\vec{P},\zeta) \quad , \qquad (۵)$$

که در آن $P_{\circ} = \pm(m^{۲}+\vec{P}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ و $\vec{P}$ و ζ هر کدام با سه پارامتر مستقل مشخص می‌شوند. $X(\vec{P},\zeta)$ به ما اجازه می‌دهد که فضای فاز مربوط به این حرکت را به صورت فضای کتانژانت $T^*(S^{۳})$ که به صورت زیر توصیف می‌شود، نمایش دهیم:

$$T^*(S^{۳}) = \left\{(\vec{x},\vec{p}) \in R^{۴}\times R^{۴} \left| x^{۲} = r^{۲}, \vec{x}.\vec{p} = \circ \right.\right\}, \qquad (۶)$$

x_i ها معرف مختصات یک نقطه روی قسمت فضایی فضای فاز و p_i ها مختصات تکانهٔ خطی نقطهٔ مورد نظر واقع بر صفحه مماس بر آن فضا می‌باشند.

از طرفی با استفاده از روش مختلط ساز تیمن می‌توان نشان داد این فضا و کرهٔ مختلط سه بعدی زیر:

$$S_c^{۳} = \left\{\vec{a} \in C^{۴} \left| a_{۱}^{۲} + a_{۲}^{۲} + a_{۳}^{۲} + a_{۴}^{۲} = r^{۲} \right.\right\}, \qquad (۷)$$

یکریخت هستند [۲ و ۴]، یعنی:

$$T^*(S^{۳}) \cong S_C^{۳}, \qquad (۸)$$

که مؤلفه‌های $\vec{a}$ با مؤلفه‌هایی به صورت زیر بیان می‌شوند :

$$a_j = x_i \cosh p + \frac{i}{p} p_i \sinh p \ , \qquad j = ۱,۲,۳,۴ \qquad (۹)$$

بنابراین فضای فاز مربوط به ذره‌ای که روی دوسیتر ۳+۱ حرکت می‌کند، کرهٔ مختلط $S_c^{۳}$ می‌باشد.

۶. حالت‌هاي همدوس و اندازهٔ مناسب

در مکانیک کلاسیک هر نقطه روی فضای فاز، یک حالت از سیستم را مشخص می‌کند اما در مکانیک کوانتومی، سیستم فیزیکی به وسیله حالت‌هایی که بردارهایی روی فضای هیلبرت هستند معرفی می‌شوند. حد وسطی برای دو بحث بالا وجود دارد که ما را به مفهوم حالت‌های همدوس رهنمون می‌کند. بدین ترتیب که اگر $\tilde{X}$ مجموعه با اندازهٔ μ و H یک زیرفضای هیلبرت باشد، مجموعه‌ای از ویژه بردارهای روی این زیر فضای هیلبرت، به شرطی اینکه حداقل سه ویژگی زیر را داشته باشند، می‌تواند به عنوان حالت‌های همدوس در نظر گرفته شوند:

۱. پیوسته باشند،

۲. بهنجارپذیر باشند، یعنی : $<x|x> \prec \infty$,

۳. رابطهٔ همانی را روی فضای هیلبرت برآوره نمایند:

$$\int_{\tilde{X}} |x\rangle \ \langle x| \ \ \nu(dx) = I_H \ , \qquad (۱۰)$$

که $\nu(dx)$ اندازه مناسب روی $\tilde{X}$ می‌باشد، که اصولاً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nu(dx) = h(x)\mu(dx) \quad ,$$

که در آن $h(x)$ تابعی قابل اندازه‌گیری ومثبت و $\mu(dx)$ اندازهٔ ناوردا روی $\tilde{X}$ می‌باشد

یک ویژگی غیر معمول روی حالت‌های همدوس فرا کامل بودن آنها است، به این معنا که ضرب داخلی حالت‌های همدوس متفاوت صفر نخواهد بود. در واقع سیستمی از حالت‌های همدوس فرا کامل و یک زیر فضا از آن کامل خواهد بود.

۷. حالت‌هاي همدوس و هستهٔ گرمايي

بر اساس کار هال - میچل می‌توان بیان روشنی از حالت‌های همدوس را بر حسب هسته گرمایی روی S^d به صورت زیر ارائه داد [۴]:

$$\rho^d{}_{\tau}(\vec{a},\vec{x}) = \langle \delta_x | \psi_a \rangle \qquad a \in S_c{}^d, x \in S^d \ ,$$

که در آن $|\psi_a\rangle$ و $|\delta_x\rangle$ به ترتیب حالت‌های همدوس و ویژه کت بهنجار ناپذیر می‌باشند. لازم به ذکر است که τ کمیتی مثبت با مقدار $\frac{\hbar}{m\omega r^{۲}}$ است.

با توجه به اینکه فضای فاز مربوط به دوسیتر ۳+۱، کرهٔ مختلط سه بعدی می‌باشد لذا در اینجا سعی می‌کنیم از هستهٔ گرمایی حالت‌های همدوس دوسیتر ۳+۱ را استخراج نمائیم.

۸. تعیین حالت‌هاي همدوس روي دوسيتر ۳+۱ با استفاده از هستهٔ گرمايي

هستهٔ گرمایی برای کرهٔ مختلط سه بعدی به صورت زیر می‌باشد [۴]:

$$\rho_\tau{}^{3}(\vec{a},\vec{x}) = (2\pi\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\sin\tilde{\theta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\theta}-2\pi n) e^{-\frac{(\tilde{\theta}-2\pi n)^2}{2\tau}}, \tag{11}$$

که $\tilde{\theta} = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{x}}{r^2}\right)$ زاویهٔ موهومی بین $\vec{x}$ و $\vec{a}$ می باشد.

با اعمال رابطهٔ جمع پواسون و استفاده از توابع گیگنبور (C_l^m) و چند جمله‌ای‌های لژاندر (P_l^m) می‌توان هسته گرمایی را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\rho_\tau{}^{3}(\vec{a},\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\tau\frac{n^2-1}{2}}.$$

$$M_{nl}\sin^l\alpha_a C_{n-l-1}{}^{l+1}(\cos\alpha_a) Y^*{}_{lm}(\theta_a,\phi_a).$$
$$M_{nl}\sin^l\alpha_x C_{n-l-1}{}^{l+1}(\cos\alpha_x) Y_{lm}(\theta_x,\phi_x),$$

که

$$M_{nl} = 2^{l+1} l! \left[\frac{n(n-l-1)!}{2\pi(n+l)!}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

با انتخاب

$$|\delta_x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*{}_{n,l,m}(\alpha_x,\theta_x,\phi_x)|n,l,m\rangle, \tag{12}$$

که در آن

$$Y_{n,l,m}(\alpha,\theta,\phi) = M_{nl}\sin^l\alpha C_{n-l-1}{}^{l+1}(\cos\alpha) Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{13}$$

حالت‌های همدوس به صورت زیر از هستهٔ گرمایی جدا می‌شود:

$$|\psi_a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} e^{-\tau\frac{n^2-1}{2}} Y^*_{n,l,m}(\alpha_a,\theta_a,\phi_a)|n,l,m\rangle. \tag{14}$$

لازم به ذکر است که حالت‌هایی که از هستهٔ گرمایی به دست می‌آیند، بهنجار نشده‌اند و ما می‌توانیم با وارد کردن ضریب بهنجارش N به صورت زیر آنها را بهنجار نمائیم:

$$|\psi_a\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\tau\frac{n^2-1}{2}} Y^*{}_{n,l,m}(\alpha_a,\theta_a,\phi_a)|n,l,m\rangle \tag{15}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\rho_\tau{}^{3}(\vec{a},\vec{x}) = (2\pi\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\sin\tilde{\theta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{\theta}-2\pi n) e^{-\frac{(\tilde{\theta}-2\pi n)^2}{2\tau}}. \tag{16}$$

۹. رابطهٔ همانی برای حالت‌های همدوس

می‌توان نشان داد که رابطهٔ همانی معرفی شده توسط هال و میچل رابطهٔ یکه دقیقی نیست [۴] و می‌توان آن را با در نظر گرفتن اندازه‌ای به صورت :

$$\mu(d\vec{x},d\vec{p}) = \frac{\nu_3(2\tau,2p)}{\int_{\vec{x}\in S^3} d\vec{x}}\left(\frac{\sinh 2p}{2p}\right)^2 2^3\, d\vec{x}d\vec{p}, \tag{17}$$

به شکل زیر تصحیح نمود:

$$I_3 = \int_{\vec{x}\in S^3}\int_{\vec{x}.\vec{p}=0} |\psi_a\rangle\langle\psi_a| N\mu(d\vec{x},d\vec{p}). \tag{18}$$

لازم به ذکر است که $\nu_3(2\tau, 2p)$ هستهٔ گرمایی روی هذلولی‌وار سه بعدی می‌باشد.

با انتخاب $\vec{x}$ و $\vec{p}$ به صورت زیر

$$\begin{cases} x_1 = \sin\alpha_x\sin\theta_x\cos\phi_x, \\ x_2 = \sin\alpha_x\sin\theta_x\sin\phi_x, \\ x_3 = \sin\alpha_x\cos\theta_x, \\ x_4 = \cos\alpha_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = \cos\alpha\sin\theta\cos\phi p_\alpha + \cos\theta\cos\phi p_\theta - \sin\phi p_\phi, \\ p_2 = \cos\alpha\sin\theta\sin\phi p_\alpha + \cos\theta\sin\phi p_\theta + \cos\phi p_\phi, \\ p_3 = \cos\alpha\cos\theta - \sin\theta p_\theta, \\ p_4 = -\sin\alpha p_\alpha. \end{cases}$$

و با نوشتن المان حجم روی این فضا به صورت :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dp_1^2 + dp_2^2 + dp_3^2 + dp_4^2.$$

می‌توان المان حجم ناوردا مربوط به فضای فاز یعنی $d\vec{x}d\vec{p}$ را به دست آورد:

$$d\vec{x}d\vec{p} = \sqrt{1+p_\alpha^2+p_\theta^2+p_\varphi^2}\,\sin^2\alpha\sin\theta\, d\alpha d\theta d\varphi dp_\alpha dp_\theta dp_\phi.$$

۱۰. کوانتش

جایگزین کردن مشاهده پذیرهای کلاسیکی روی فضای فاز توسط مشاهده پذیرهای کوانتومی روی فضای هیلبرت کوانتش نامیده می‌شود. روشی که در این کار، برای کوانتش مشاهده پذیرهای کلاسیکی به کار می‌گیریم، کوانتش به کمک حالت‌های همدوس می‌باشد که در این روش کوانتش به هر مشاهده پذیر کلاسیکی f روی فضای فاز مشاهده پذیر کوانتومی O_f به صورت زیر وابسته می‌شود:

$$O_f = \int_{\tilde{X}} f(\psi)|\psi\rangle\langle\psi| d\mu(\psi), \tag{19}$$

که $|\psi\rangle$ حالت‌های همدوس و $d\mu(\psi)$ اندازهٔ مناسب روی فضای فاز می‌باشد. با استفاده از این روش می‌توان تعدادی از مشاهده پذیرهای کلاسیکی را روی دوسیتر ۳+۱ کوانتیزه نمود.

در این کار ما به کوانتش دو مشاهده پذیر زیر می‌پردازیم:

عملگر انرژی جنبشی: همتای کوانتومی $f(\psi)=\frac{p^2}{2}$ عملگر $O_{\frac{p^2}{2}}$ به صورت

$$O_{\frac{p^2}{2\tau}}=\frac{1}{2}\sum_{n,l,m}\left(n^2+\frac{3}{2\tau}\right)\left|n,l,m\right\rangle\left\langle n',l',m'\right|, \qquad (۲۰)$$

می‌باشد. نکتهٔ حائز اهمیت در رابطهٔ (۲۰) جملهٔ $\left(n^2+\frac{3}{2\tau}\right)$ است که با ویژه مقدار عملگر انرژی برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی قابل مقایسه می‌باشد.

عملگر فوریه: در حالت $f(\psi)=e^{\pm i\phi}$ می توان گفت:

$$O_{e^{\pm i\phi}}=\sum_{\substack{n,l,m\\ n',l'}}\left(F^{\tau}{}_{n,l,m,n',l'}\right)_{\pm}\left|n,l,m\pm 1\right\rangle\left\langle n',l',m\right|, \qquad (۲۱)$$

که

$$\left(F^{\tau}{}_{n,l,m,n',l'}\right)_{\pm}=$$
$$\frac{e^{-\tau\frac{n^2+n'^2}{2}}}{\pi(\pi\tau)^{\frac{3}{2}}}M_{n,l,m\pm 1}M_{n',l',m'}\int_{\alpha}\int_{\theta}\int_{p_\theta}\int_{p_\alpha}\int_{p_\phi}\sin^2\alpha\sin\theta\sqrt{1+p^2}$$
$$\frac{\sinh 2p}{2p}e^{-\frac{p^2}{\tau}}A^{*}{}_{n,l,m\pm 1}\left(\alpha_a,\theta_a,p_\alpha,p_\theta,p_\phi\right)$$
$$A_{n',l',m'}\left(\alpha_a,\theta_a,p_\alpha,p_\theta,p_\phi\right)d\alpha d\theta dp_\alpha dp_\theta dp_\phi.$$

این عملگر مشابه عملگر خلق و نابودی عمل می‌کند.

۱۱. نتیجه‌گیری

در این کار، ابتدا فضای فاز مربوط به حرکت ذرهٔ جرم‌دار روی دوسیتر۳+۱ را به صورت فضای کتانژانت $T^*(S^3)$ به دست آوردیم و سپس از یک ریختی بین این فضا و کره مختلط استفاده نموده و حالت‌های همدوس را از هسته گرمایی کرهٔ مختلط استخراج نمودیم و در پایان تعدادی از مشاهده پذیرهای کلاسیکی را به روش برزین-گلوبر- گزو کوانتیزه نمودیم.

مراجع

1. A A Kirillov, “*Elements of the theory of representation*”, *Springer- Verlag,* Berlin, Heidelberg (1976).
2. T Thiemann, *arXiv*:gr- qc/0206037.
3. Jean-pierre Gazeau, “*Coherent states in Quantum physics*”, Wiley-Verlag (2009).
4. B Hall, and J J Mitchell, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 1211.
5. F A Berezin, *Common. Math.* **40** (1975) 153.
6. A Rabeie, “*physique quantrique des systems elememtaries dans de sitter*”, These de doctorat de universite de Marne-La-Vallee, (2005).