

## بررسی امواج یون صوتی در پلاسماهای غبارآلود با یون‌های گرم، الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیر گرمایی با توزیع کارنز

محمد اقبالی<sup>۱\*</sup>، مینا اسلامی‌فر<sup>۱</sup>، و ندا پویان<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی خاتم‌النبیاء بهبهان، بهبهان، خوزستان  
<sup>۲</sup> گروه مهندسی مکانیک- دانشکده مهندسی- دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، سوسنگرد

پست الکترونیکی: eghbali@bkatu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۱۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۷/۲۱)

### چکیده:

در این پژوهش، امواج سالیتمونی یون صوتی غیرخطی در یک سامانه پلاسمایی غباری شامل ذرات غبار زمینه با بار منفی، یون‌های داغ دینامیکی، الکترون‌ها و پوزیترون‌ها با توزیع‌های غیر گرمایی کارنز<sup>۱</sup> بررسی شده است. با استفاده از روش اختلال کاهنده، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر این سامانه در دو مرحله به دست آورده شده است. در مرحله اول با در نظر گرفتن توان‌های مرتبه پایین‌تر یک معادله دیفرانسیل غیرخطی،  $KdV$  به دست می‌آید. نتایج حاصل نشان می‌دهد که در سامانه مورد نظر به ازای مقدار بحرانی  $\beta_e = \beta_p = 0.33$ ، ضریب غیرخطی معادله مذکور صفر می‌شود و این معادله نمی‌تواند انتشار امواج سالیتمونی در سامانه را توصیف کند. بنابراین در مرحله بعد با در نظر گرفتن توان‌های مرتبه بالاتر معادله دیفرانسیل کورته و گ دی وری اصلاح شده را همانند بخش قبل با استفاده از روش اختلال کاهنده به دست می‌آوریم. مطالعات انجام شده نشان می‌دهد که ضرایب پاشندگی در هر دو حالت یکسان است؛ ولی ضریب غیرخطی برای حالت اصلاح شده اندکی پیچیده‌تر است. در هر دو حالت جواب‌های ایستایی امواج سالیتمونی بررسی شده‌اند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله پارامتر غیر تعادلی برای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها روی ساختار موج با جزئیات دقیق مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که هر دو سالیتمون مثبت و منفی می‌توانند در این سامانه منتشر شوند؛ برخلاف توزیع ماکسولی که فقط سالیتمون‌های مثبت قابل انتشارند. همچنین حضور ذرات غیر تعادلی باعث افزایش دامنه و پهنای موج سالیتمونی می‌شود. از نتایج این تحقیق می‌توان در سامانه‌های پلاسمای فضایی و آزمایشگاهی استفاده کرد.

**واژه‌های کلیدی:** امواج یون صوتی، توزیع کارنز، پلاسماهای غیر تعادلی، پلاسماهای الکترون- پوزیترون- یون-غبار (EPID plasma)

### ۱. مقدمه

کوتوله‌های سفید<sup>۵</sup> [۴-۵] مورد توجه بسیاری از محققین و پژوهشگران قرار گرفته‌اند. به منظور سازوکار انتقال ذرات در توکامک، به پلاسماهای دو مؤلفه‌ای الکترون- یون می‌توان پوزیترون‌ها را به درون توکامک تزریق کرد و پلاسماهای دو مؤلفه‌ای الکترون- یون را به پلاسماهای سه مؤلفه‌ای الکترون- پوزیترون- یون تبدیل کرد [۶-۹]. تولید جفت (الکترون-

اخیراً پلاسماهای سه مؤلفه‌ای شامل الکترون- پوزیترون و یون<sup>۲</sup> (EPI) به دلیل فراوانی بسیار زیاد در چندین وضعیت فضایی شامل هسته‌های فعال کهکشانی<sup>۳</sup> [۱]، تپنده مگنتواسفیر<sup>۴</sup> [۲]، جو خورشید [۳]، ستاره‌های نوترونی و

<sup>1</sup> Cairns distributions,

<sup>2</sup> Electrons- Positions- Ions

<sup>3</sup> Active galactic nuclei

<sup>4</sup> Pulsar magnetosphere

<sup>5</sup> White dwarfs

پوزیترون) می‌تواند در فرایند برهمکنش یک تپ لیزری قوی با پلاسما نیز رخ دهد [۱۰]. همانطور که می‌دانیم، ذرات غبار (در اندازه‌های میکرومتر تا زیرمیکرومتر) در محیط‌های آزمایشگاهی و فضایی مانند محیط‌های اطراف ستاره‌های دنباله‌دار، ابرهای بین‌ستاره‌ای و حلقه‌های سیاره‌ای در همه جا وجود دارند [۱۱ و ۱۲]. هنگامی که ذرات غبار در پلاسما غوطه‌ور می‌شوند، معمولاً باردار می‌شوند. فرایندهای مختلفی از جمله جذب ذرات باردار دیگر، تابش الکترون‌های ثانویه، گسیل میدانی و... می‌تواند باعث باردار شدن ذرات غبار شود. بار ذرات غبار می‌تواند منفی یا مثبت باشد. منفی یا مثبت بودن بار ذرات غبار بستگی به این دارد که تعداد پوزیترون‌های رسوب‌شده روی آنها کمتر یا بیشتر از تعداد الکترون‌ها باشد. در اینجا فرض کرده‌ایم که یون‌ها به دلیل جرم زیاد در مقایسه با الکترون‌ها و پوزیترون‌ها خیلی کندتر حرکت می‌کنند و تعداد الکترون‌های جذب شده توسط ذرات غبار بیشتر از تعداد پوزیترون‌ها است بنابراین بار ذرات غبار را منفی در نظر گرفته‌ایم. ذرات غبار به دلیل اندازه بزرگی که دارند می‌توانند بار نسبتاً زیادی را جذب کنند و این بار می‌تواند روی پارامترهای مختلف امواج منتشر شده در پلاسما تأثیر داشته باشد. همچنین ذرات غبار می‌توانند نواحی پایداری و ناپایداری امواج را تغییر دهند. به علاوه این ذرات می‌توانند مدهای جدیدی را در پلاسما ایجاد کنند [۱۳-۱۵]. پلاسمای چهار مؤلفه‌ای شامل الکترون‌ها، پوزیترون‌ها، یون‌ها و ذرات غبار (EPID)، گونه‌ای از پلاسماها هستند که در محیط‌های فضایی و در محیط‌های آزمایشگاهی به وفور یافت می‌شوند. بر این اساس، مطالعه امواج یون صوتی (IAWs) در پلاسمای EPID می‌تواند جالب و مهم باشد [۱۶ و ۱۷]. وجود یک موج الکترواستاتیک بسامد پایین جدید (موج یون صوتی) در یک پلاسما غبارآلود غیربرخوردی و غیرمغناطیسی برای اولین بار توسط شوکلا و همکارانش گزارش شد [۱۸]. این موج یکی از انواع امواج بسامد پایینی است که در پلاسماهای

غبار آلود منتشر می‌شود. در این مقاله، توزیع الکترون‌ها به صورت ماکسولی در نظر گرفته شده است و برای امواج سالی‌تونی با دامنه کم، چگالی ذرات و دیگر کمیت‌ها حول نقطه تعادلشان بسط داده شده‌اند. برانگیختگی و انتشار موج یون صوتی چه از نظر تئوری و چه از نظر تجربی توسط بسیاری از پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفته است. این موج با توجه به کاربردهای زیادی که در محیط‌های پلاسمایی دارد توسط بسیاری از محققین با مدل‌های مختلفی نظیر روش اختلال کاهنده و روش شبه پتانسیل سقادی اف در سامانه‌های مختلف مطالعه و بررسی شده است. روش اختلال کاهنده که در نظریه غیرخطی ضعیف به کار برده می‌شود به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی به نام  $KdV$  منجر می‌شود. مدل شبه پتانسیل سقادی اف زمانی به کار برده می‌شود که نظریه غیرخطی ضعیف نباشد. در اکثر مدل‌های پلاسمایی توزیع ذرات ماکسولی فرض شده است. به عنوان مثال تریبچه و همکاران یک پلاسما ۴ مؤلفه‌ای با توزیع ذرات ماکسولی در نظر گرفته‌اند [۱۹]. روفای و همکارانش یک پلاسما ۴ مؤلفه‌ای با توزیع ذرات ماکسولی در نظر گرفته و با استفاده از روش شبه پتانسیل سقادی اف به بررسی اثرات پارامترهای مختلف روی انتشار این موج در محیط مورد نظر پرداخته‌اند [۲۰]. واشیمی تانیوتی برای اولین بار از روش اختلال کاهنده برای به دست آوردن معادله  $KdV$  حاکم بر موج سالی‌تونی یون صوتی در پلاسما استفاده کرد [۲۱]. در دهه گذشته بسیاری از پژوهشگران ساختارهای غیرخطی مانند سالی‌تون، ورتکس<sup>۱</sup> و پوش موج یون صوتی را در پلاسماهای الکترون-پوزیترون-یون بررسی کرده‌اند [۲۲-۳۴]. اکثر مطالعات قبلی بر روی موج یون صوتی بر پایه توزیع ماکسولی برای ذرات پلاسما هستند که اعتبار کلی دارد، اما مطالعات جدید روی پلاسماهای فضایی و آزمایشگاهی نشان از حضور ذرات پرنرزی در دم توزیع ذرات دارد [۲۷]. مطالعات انجام شده به وسیله فضاپیما و ایکینگ<sup>۲</sup> [۳۵] و ماهواره فرجا<sup>۳</sup> [۳۶] ساختارهای سالی‌تونی

<sup>1</sup> Vortex

<sup>2</sup> Viking spacecraft

<sup>3</sup> Ferja satellite

پوزیترون‌های غیرحرارتی روی دامنه و پهنای موج سالیتمونی یون صوتی منتشر شده در سامانه بررسی شده است. بررسی منابع علمی نشان می‌دهد که مشابهی برای این مدل ۴ مؤلفه‌ای با توزیع ماکسولی ذرات وجود ندارد. با این وجود می‌توان برای بررسی صحت نتایج، این مدل را به مدل‌هایی که در مقالات مختلف بررسی شده است تقلیل داد. مثلاً اگر ذرات غبار در نظر نشود، این مدل به یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای شامل یون‌های دینامیکی، الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرحرارتی تبدیل می‌شود. با حذف میدان مغناطیسی، نتایج به دست آمده از این مدل با نتایج ارائه شده در مقاله خلید و همکاران یکسان خواهند بود [۲۳]. این پژوهش در ۵ بخش ارائه شده است. در بخش دوم معادلات سیالی بهنجار شده حاکم بر سامانه بیان شده‌اند. در بخش سوم با استفاده از روش اختلال کاهنده معادله دیفرانسیل  $KdV$  به دست آمده است. همانطوری که خواهیم دید این معادله با توجه به مقدار بحرانی تعداد الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرحرارتی نمی‌تواند موج سالیتمونی منتشر شده در این مدل از پلاسمای توصیف کند. در بخش چهارم معادله  $mKdV$  حاکم بر محیط پلاسمایی مورد نظر ارائه شده است. در بخش پنجم محاسبات عددی و در بخش ششم خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده گزارش شده است.

## ۲. فرمول‌بندی مدل

امواج تناوبی الکترواستاتیکی غیرخطی در یک پلاسمای چهار مؤلفه‌ای غیربرخوردی و غیرمغناطیسی شامل ذرات غبار زمینه با بار منفی، یون‌های گرم دینامیکی، الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرگرمایی که توزیع آنها از توزیع کارنز پیروی می‌کنند را بررسی می‌کنیم. معادلات سیالی بهنجار شده پیوستگی و تکانه حاکم بر این سامانه عبارتند از:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i u_i)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{3\sigma_i}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (2)$$

معادله پواسون به صورت زیر بیان می‌شود:

الکترواستاتیکی مهمی را نشان دادند که از توزیع ماکسولی انحراف چشمگیری داشتند. از جمله این تابع توزیع‌ها می‌توان به تابع توزیع کاپا، تابع توزیع کاپای منظم شده، تابع توزیع نافزونفر  $q$ ، تابع توزیع کارنز و... اشاره کرد. ساها و همکاران یک پلاسمای سه مؤلفه‌ای در نظر گرفته‌اند که توزیع ذرات آنها از توزیع ماکسولی انحراف دارد [۳۷]. به عبارتی آنها توزیع الکترون‌های سرد و گرم را توزیع کاپا در نظر گرفته‌اند و با استفاده از روش دوشاخه‌ای<sup>۱</sup> به بررسی انتشار موج یون صوتی در سامانه مورد نظر پرداخته‌اند. در پژوهش خلید و همکاران [۲۳] یک مدل پلاسمای سه مؤلفه‌ای شامل یون‌های دینامیکی، الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرحرارتی با توزیع کارنز در حضور میدان مغناطیسی در نظر گرفته شده و با استفاده از روش اختلال کاهنده به بررسی موج یون صوتی در این مدل پرداخته‌اند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که موج یون صوتی سالیتمونی مثبت و منفی در این سامانه می‌تواند انتشار یابد. در پژوهش دیگر خلید و همکاران [۳۸] یک مدل سه مؤلفه‌ای شامل یون‌های سیالی، ذرات غبار منفی و الکترون‌های غیرحرارتی با تابع توزیع کاپای تغییر تغییر شکل یافته<sup>۲</sup> در نظر گرفته و به بررسی انتشار موج غبار یون صوتی در این مدل پرداخته‌اند. در حقیقت الکترون‌های غیرحرارتی که به وسیله تابع توزیع کارنز مدل سازی می‌شوند اولین بار توسط کارنز و همکاران (۱۹۹۵) پیشنهاد شد تا به مطالعه اثر الکترون‌های غیرحرارتی بر روی طبیعت امواج سالیتمونی یونی صوتی مشاهده شده در قسمت فوقانی یونسفر پردازند. در واقع آنها از مشاهدات ناشی از ماهواره فرجا به این نتیجه رسیدند که حضور جمعیتی از الکترون‌های پرانرژی می‌تواند خواص امواج سالیتمونی یون صوتی را تغییر دهد. کارنز و همکاران (۱۹۹۵) نشان دادند که الکترون‌های پرانرژی می‌توانند بر روی شکل چگالی الکترون‌ها تأثیر زیادی داشته باشد. در این پژوهش، یک مدل پلاسمایی چهار مؤلفه‌ای شامل ذرات غبار زمینه با بار منفی، الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیرحرارتی و یون‌های دینامیکی در نظر گرفته شده و تأثیر تعداد الکترون‌ها و

<sup>1</sup> Bifurcations

<sup>2</sup> k- deformed

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[ (1 - \beta_e) + \gamma p (1 - \beta_p) \right], \\ C_2 &= \frac{1}{\gamma} \left[ 1 + p \gamma^\gamma \right], \\ C_3 &= \frac{1}{\gamma} \left[ \beta_e + p \gamma^\gamma \beta_p \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

### ۳. به دست آوردن معادله غیرخطی KdV

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر این سامانه که انتشار امواج یون صوتی منتشر شده را توصیف می‌کند از روش اختلال کاهنده استفاده می‌کنیم. متغیرهای مستقل جدید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۳۹-۴۰]:

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - V_0 t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t, \quad (10)$$

$\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \ll 1$ ) یک پارامتر کوچک است که قدرت غیرخطی بودن سامانه را نشان می‌دهد.  $V_0$  سرعت فاز بهنجار شده موج یون صوتی است که مقدار آن در ادامه تعیین می‌شود. اکنون کمیت‌ها را حول مقدار تعادلیشان بر حسب توان‌هایی از  $\varepsilon$  به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$n_i = 1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)} + \varepsilon^3 n_i^{(3)} + \dots, \quad (11)$$

$$u_i = 1 + \varepsilon u_i^{(1)} + \varepsilon^2 u_i^{(2)} + \varepsilon^3 u_i^{(3)} + \dots, \quad (12)$$

$$\phi = 1 + \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \varepsilon^3 \phi^{(3)} + \dots, \quad (13)$$

با جایگذاری معادلات (۱۰) تا (۱۳) در مجموعه معادلات (۱)، (۲) و (۸) و بسط بر حسب توان‌های مختلف  $\varepsilon$  معادلات زیر حاصل می‌شود. برای پایین‌ترین مرتبه داریم:

$$-V_0 \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \rightarrow V_0 n_i^{(1)} = u_i^{(1)}, \quad (14)$$

$$-V_0 \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} + 3\sigma_i \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad (15)$$

$$C_1 \phi^{(1)} - (1 + \alpha - p) n_i^{(1)} = 0, \quad (16)$$

با استفاده از معادلات بالا سرعت فاز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_0 = \sqrt{3\sigma_i + \frac{1 + \alpha - p}{C_1}}, \quad (17)$$

برای توان‌های مرتبه بعدی  $\varepsilon$  داریم:

$$\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} - V_0 \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (n_i^{(1)} u_i^{(1)})}{\partial \xi} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_e + \alpha - p n_p - (1 + \alpha - p) n_i, \quad (3)$$

به ترتیب چگالی ذرات غبار، یونها، پوزیترون‌ها و الکترون‌ها هستند که نسبت به مقادیر تعادلی چگالی الکترون‌ها یعنی  $n_{e0}$  بهنجار شده‌اند. سرعت سیالی

یون‌ها  $u_i$  نسبت به سرعت یون صوتی  $C_s = \sqrt{\frac{T_e}{m}}$  و پتانسیل

الکترواستاتیکی نسبت به  $\phi = \frac{e\varphi}{T_e}$  بهنجار شده است. در

معادلات فوق،  $m$  جرم یون‌ها و  $T_e$  دمای الکترون‌ها بر حسب

$$\text{انرژی، } \sigma_i = \frac{T_i}{T_e}, \quad \alpha = \frac{Z_{cd} n_{cd}}{n_{e0}}, \quad \text{و } p = \frac{n_{ip}}{n_{e0}} \text{ است. } Z_{cd}$$

معرف تعداد بار قرار گرفته بر سطح غبار در حالت تعادل است.

ذرات غبار در شرایط شبه‌خنثایی بار تعادلی، در رابطه

$$n_i + n_p = n_e + Z_{cd} n_{cd}$$

$$\text{و زمانی } t \text{ به ترتیب نسبت به طول دمای } \lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi n_{e0} e^2}}$$

و بسامد پلاسمایی  $\omega_{pi}^{-1} = \sqrt{\frac{m}{4\pi n_{e0} e^2}}$  بهنجار شده‌اند.

چگالی‌های بهنجار شده الکترون‌ها و پوزیترون‌های

غیرحرارتی طبق توزیع کارنر عبارتند از:

$$n_e = \left[ 1 - \beta_e \phi + \beta_e \phi^\gamma \right] e^\phi, \quad (4)$$

$$n_p = \left[ 1 + \beta_p \gamma \phi + \beta_p \gamma \phi^\gamma \right] e^\phi, \quad (5)$$

که در روابط فوق  $\beta_e, \beta_p$  به ترتیب پارامترهای غیرحرارتی

برای الکترون‌ها و پوزیترون‌ها هستند و به صورت  $\beta = \frac{\eta_p}{1 + 3\eta_p}$

و  $\beta_p = \frac{\eta_p}{1 + 3\eta_p}$  تعریف می‌شوند.  $\eta_p$  و  $\eta_e$  جمعیت غیر

تعادلی الکترون‌ها و پوزیترون‌ها و همچنین  $\gamma = \frac{T_e}{T_p}$  است. برای

$\phi \ll 1$  با بسط تیلور معادلات (۴) و (۵) داریم:

$$n_e = \left[ 1 + (1 - \beta_e) \phi + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} \beta_e \phi^\gamma + \dots \right], \quad (6)$$

$$n_p = \left[ 1 - \gamma(1 - \beta_p) \phi + \frac{\gamma^2}{2} \phi^2 - \frac{\gamma^3 \beta_p}{2} \phi^\gamma + \dots \right], \quad (7)$$

با جایگذاری معادلات (۶) و (۷) در معادله (۳) داریم:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 1 + \alpha - p + C_1 \phi + C_2 \phi^2 + C_3 \phi^\gamma - (1 + \alpha - p) n_i, \quad (8)$$

که

با دوبار انتگرال‌گیری از معادله (۲۵) نسبت به  $\zeta$  و استفاده از

$$\text{شرایط مرزی } \psi \rightarrow 0, \frac{d\psi}{d\zeta} \rightarrow 0, \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} \rightarrow 0 \text{ at } |\zeta| \rightarrow \infty \text{ (شرط وجود جواب جایگزیده) داریم:}$$

$$\psi(\zeta) = \psi_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\zeta}{w}\right), \quad (26)$$

که  $\psi_0 = \frac{r\lambda}{A}$  و  $w = \sqrt{\frac{rB}{\lambda}}$  به ترتیب قله دامنه و پهنای موج سالیوتونی هستند.

#### ۴. به دست آوردن معادله mKdV

به طور واضح مشخص است که در رابطه (۲۲)، معادله دیفرانسیل غیرخطی KdV حاکم بر سامانه، اگر  $A=0$  شود، این معادله نمی‌تواند انتشار موج سالیوتونی در این سامانه را توصیف کند. در مدل پلاسمایی در نظر گرفته شده به ازای مقادیر بحرانی  $\beta_e = \beta_p = 0.33$ ، ضریب  $A$  حذف می‌شود. برای بررسی موج یون صوتی در این وضعیت، مرتبه‌های غیرخطی بالاتر را در نظر می‌گیریم و معادله غیرخطی اصلاح شده حاکم بر سامانه را به دست می‌آوریم. مجدداً از روش اختلال کاهنده استفاده می‌کنیم. متغیرهای مستقل جدید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (۴۱)

$$\xi = \varepsilon(x - V_0 t), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad (27)$$

با جایگذاری معادلات (۱۱) تا (۱۳) و (۲۷) در مجموعه معادلات (۱) و (۲) و همچنین معادله (۸) و در نظر گرفتن پایین‌ترین مرتبه  $\varepsilon$  روابطی مشابه حالت KdV، یعنی معادلات (۱۴) تا (۱۶) به دست می‌آوریم. با استفاده از توان‌های مرتبه بالاتر از معادله پیوستگی و معادله پواسون داریم:

$$u_i^{(2)} = V_0 C_1 \phi^{(2)} + \left[ 2C_2 - \frac{C_1^2}{(1+\alpha-p)^2} \right] V_0 \phi^{(1)}, \quad (28)$$

$$n_i^{(2)} = C_1 \phi^{(2)} + 2C_2 \left( \phi^{(1)} \right)^2, \quad (29)$$

برای توان‌های بالاتر از معادلات پیوستگی، حرکت و پواسون داریم:

$$-V_0 \frac{\partial n_i^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial u_i^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( u_i^{(1)} n_i^{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( u_i^{(2)} n_i^{(1)} \right) = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \tau} - V_0 \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial \xi} + u_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} - 2\sigma_i n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} + 2\sigma_i \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = C_1 \phi^{(1)} + C_2 \left( \phi^{(1)} \right)^2 - (1+\alpha-p) n_i^{(2)}, \quad (20)$$

با ضرب معادله (۱۸) در  $V_0$  و سپس جمع آن با معادله (۱۹) داریم:

$$(1+\alpha-p) \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{C_1 (3V_0^2 - 2\sigma)}{(1+\alpha-p)^2} \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{2V_0 C_1^2}{(1+\alpha-p)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + C_1 \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi}, \quad (21)$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۰) نسبت به  $\xi$  و استفاده از معادلات (۱۴) تا (۱۶) و معادله (۲۱) و سپس با جایگذاری کمیت‌های مختلف در مشتق معادله (۲۰) معادله غیرخطی KdV به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + A\psi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \quad (22)$$

که  $\psi = \phi^{(1)}$  و  $A$  و  $B$  به ترتیب به عنوان ضرایب غیرخطی و پاشندگی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \frac{1+\alpha-p}{2V_0 C_1^2} \left[ \frac{2C_1^2 (V_0^2 - \sigma_i)}{(1+\alpha-p)^2} - 2C_2 \right], \quad (23)$$

$$B = \frac{(V_0^2 - 2\sigma_i)^2}{2V_0 (1+\alpha-p)}, \quad (24)$$

حاصل معادله (۲۲) یک موج سالیوتونی است که با سرعت  $\lambda$  حرکت کرده و شکل خود را حفظ می‌کند. برای به دست آوردن جواب‌های ایستا و جایگزیده، معادله غیرخطی (۲۲)، متغیر جدید  $\zeta = \xi - \lambda \tau$  را تعریف می‌کنیم و چارچوب مرجعی را انتخاب می‌کنیم که با سرعت ثابت  $\lambda$  نسبت به موج حرکت می‌کند. با استفاده از این تبدیل معادله (۲۲) بر حسب متغیر  $\zeta$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\lambda \frac{d\psi}{d\zeta} + A\psi \frac{d\psi}{d\zeta} + B \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} = 0, \quad (25)$$

است. بنابراین در سامانه در نظر گرفته شده هردو موج سالی‌تونی مثبت و منفی متناظر با پتانسیل‌های مثبت و منفی وجود دارند. در صورتی که اگر توزیع ذرات ماکسولی در نظر گرفته شوند فقط امواج سالی‌تونی مثبت می‌توانند منتشر شوند و امواج سالی‌تونی منفی نمی‌توانند انتشار یابند. همچنین حضور ذرات روی مقدار بحرانی تأثیر داشته و باعث می‌شود که مقادیر بحرانی  $\beta_e, \beta_p$  نسبت به حالتی که ذرات غبار حضور ندارند به ازای مقادیر پایین‌تری رخ دهد. در اینجا ضریب غیرخطی به ازای مقدر بحرانی  $\beta_e = \beta_p = 0.33$  در معادله KdV صفر می‌شود بنابراین معادله (۲۲) نمی‌تواند انتشار موجی سالی‌تونی در سامانه پلاسمایی مذکور را توصیف کند. از این‌رو، برای توصیف انتشار امواج سالی‌تونی یون صوتی در این محیط لازم است توان‌های مرتبه بالاتر را در نظر بگیریم. در بخش دوم این پژوهش توان‌های مرتبه بالاتر را در نظر گرفته‌ایم و همانند بخش قبل با استفاده از روش اختلال کاهنده معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سامانه که یک معادله mKdV است را به‌دست می‌آوریم. رفتار موج سالی‌تونی یون صوتی در شکل‌های ۲ و ۳ برای مقادیر مختلف  $\beta_e, \beta_p$  ترسیم شده است. از شکل ۲ مشخص است که دامنه و پهنای موج سالی‌تونی یون صوتی با پتانسیل مثبت، با افزایش مقادیر  $\beta_e, \beta_p$  افزایش می‌یابد. نمودار سبز متناظر با توزیع ماکسولی است. آنچه در شکل ۳ مشاهده می‌شود رفتار معکوس موج سالی‌تونی یون صوتی با پتانسیل منفی است. که با افزایش مقادیر  $\beta_e, \beta_p$  دامنه و پهنای موج سالی‌تونی با پتانسیل منفی کاهش می‌یابد. در شکل ۴ ضرایب معادله کورته وگ اصلاح شده به‌صورت تابعی از  $\beta_e, \beta_p$  ترسیم شده است. همانطوری که از این نمودار دیده می‌شود به ازای مقدار بحرانی  $\beta_e, \beta_p = 0.17$  ضریب  $\Lambda$  صفر می‌شود و به ازای مقادیر بزرگ‌تر از این مقدار بحرانی ضریب  $\Lambda$  منفی می‌شود.

یعنی به ازای  $\beta_e, \beta_p \leq 0.17$  ناحیه‌ای وجود دارد که موج سالی‌تونی یون صوتی در آنجا منفی است. در ناحیه  $0.17 \leq \beta_e, \beta_p \leq 0.33$  ضریب  $\Lambda$  مثبت است که دلالت بر وجود ناحیه‌ای با موج سالی‌تونی یون صوتی مثبت دارد. در شکل ۵

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \tau} - V_0 \frac{\partial u_i^{(r)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( u_i^{(1)} u_i^{(r)} \right) = - \frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \xi} - \nu \sigma_i \frac{\partial n_i^{(r)}}{\partial \xi} + \nu \sigma_i n_i^{(1)} \frac{\partial n_i^{(r)}}{\partial \xi} + \nu \sigma_i n_i^{(r)} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + (1 + \alpha - p) n_i^{(r)} - C_1 \phi^{(r)} - \nu C_1 \phi^{(1)} \phi^{(r)} - C_1 \left( \phi^{(1)} \right)^2 = 0, \quad (32)$$

با حل معادلات (۲۹) تا (۳۲) و استفاده از معادلات مربوط به توان‌های مرتبه اول و دوم  $\varepsilon$  می‌توان معادله mKdV را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \Lambda (\psi)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} = 0. \quad (33)$$

$$\Lambda = \frac{\nu V_0}{2} \left( \nu C_1 - \frac{C_1^2}{(1 + \alpha - p)^2} \right) + \nu C_1 V_0 + \nu \frac{\sigma_i C_1}{V_0} + \frac{\nu C_1}{C_1 V_0} - \frac{\nu C_1 (1 + \alpha - p)}{2 \nu C_1^2} \quad (34)$$

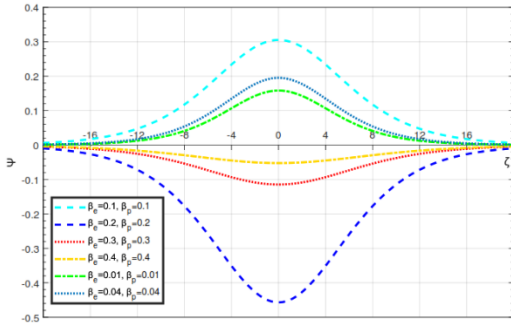
که  $\psi = \phi^{(1)}$ .

## ۵. محاسبات عددی

در این بخش به تحلیل عددی ویژگی‌های موج سالی‌تونی منتشر شده در سامانه پلاسمایی مورد نظر می‌پردازیم و تأثیر الکترون‌ها، پوزیترون‌های غیر گرمایی و حضور ذرات غبار زمینه را روی دامنه و پهنای موج سالی‌تونی بررسی می‌کنیم. همانطوری که از معادله (۱۷) دیده می‌شود حضور ذرات غبار باعث افزایش سرعت فاز موج سالی‌تونی می‌شود. در شکل ۱ ضرایب A و B معرفی شده توسط معادلات (۲۳) و (۲۴) به‌صورت تابعی از  $\beta_e, \beta_p$  (تعداد الکترون‌ها و پوزیترون‌های غیر حرارتی) ترسیم شده است. همان‌طور که از این شکل دیده می‌شود ضریب B همواره مثبت ولی ضریب A می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بنابراین در ناحیه‌ای که A مثبت است یعنی به ازای  $0 \leq \beta_e, \beta_p \leq 0.33$ ، موج سالی‌تونی یون صوتی مثبت<sup>۱</sup> است. در ناحیه  $0.33 \leq \beta_e, \beta_p$  ضریب A منفی است که متناظر با وجود ناحیه‌ای برای موج سالی‌تونی یون صوتی منفی<sup>۲</sup> با پتانسیل منفی

<sup>1</sup> Compressive

<sup>2</sup> Rarefactive

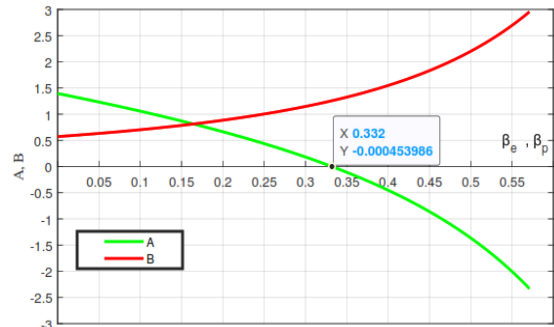


شکل ۵. تغییرات  $\psi$  به صورت تابعی از  $\zeta$  معادله (۳۳) برای مقادیر مختلف  $\beta_e, \beta_p$ .

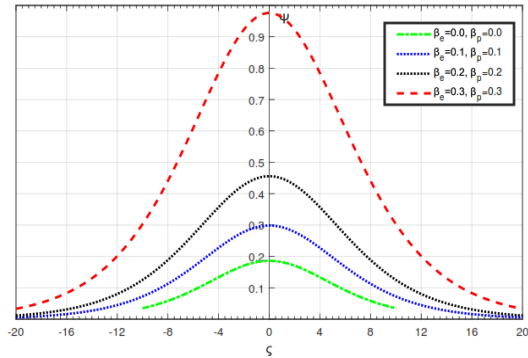
تغییرات موج سالیوتونی یون صوتی  $\psi$  از معادله mKdV، معادله معرفی شده توسط رابطه (۳۳) به صورت تابعی از  $\zeta$  ترسیم شده است. همانطوری که از این نمودار مشخص است در این حالت هر دو موج سالیوتونی یون صوتی مثبت و منفی وجود دارند.

۶. بحث و نتایج

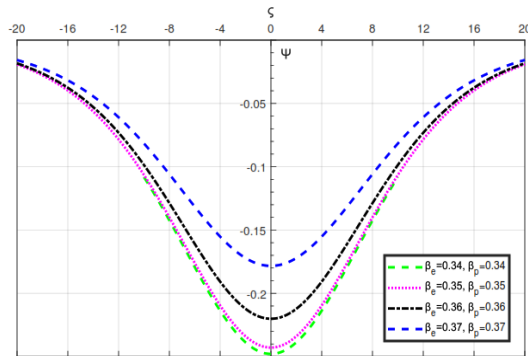
در این مقاله، یک پلاسمای غیرمغناطیسی و غیربرخوردی شامل چهار گونه، ذرات غبار زمینه با بار منفی، یونهای دینامیکی، الکترونها و پوزیترونهای غیرحرارتی با توزیع غیرتعادلی کارنر در نظر گرفته شده است. با استفاده از روش اختلال کاهنده، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر انتشار امواج یون صوتی به دست آمده است. با توجه به این که به ازای بحرانی  $\beta_e, \beta_p$  ضریب غیرخطی این معادله صفر می شود معادله دیفرانسیل KdV نمی تواند انتشار موج سالیوتونی را توصیف کند. از این رو، با در نظر گرفتن توانهای مرتبه بالاتر در مرحله بعد یک معادله دیفرانسیل غیرخطی کورته وگ اصلاح شده به دست آورده ایم. نتایج نشان می دهد که ضریب غیرخطی معادلات KdV و mKdV می تواند مقادیر مثبت و منفی باشند و این بدین معنی است که هر دو موج انبساطی و انقباضی که متناظر با پتانسیل مثبت و منفی موج سالیوتونی هستند در این سامانه منتشر می شوند.



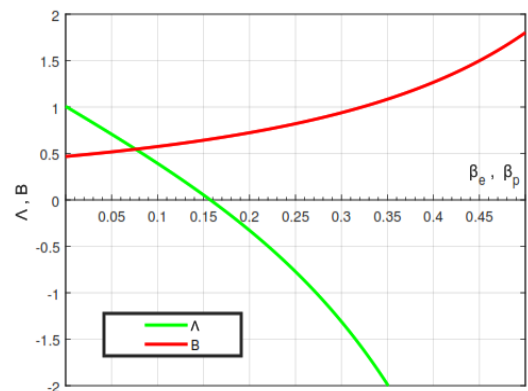
شکل ۱. تغییرات A و B به صورت تابعی از  $\beta_e, \beta_p$ .



شکل ۲. تغییرات  $\psi$  به صورت تابعی از  $\zeta$  معادله (۲۶) برای مقادیر مختلف  $0 \leq \beta_e, \beta_p \leq 0.33$ .



شکل ۳. تغییرات  $\psi$  به صورت تابعی از  $\zeta$  معادله (۲۶) برای مقادیر  $\beta_e, \beta_p > 0.33$ .



شکل ۴. تغییرات  $\Lambda$  و B به صورت تابعی از  $\beta_e, \beta_p$ .

## مراجع

1. H R Miller, P J Witter, "Active Galactic Nuclei", Springer, New York. (1987) 202.
2. F C Michel, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982)1.  
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.54.1>
3. P Goldreich and W H Julian, *Astrophys. J.* **157** (1969) 869.  
<https://doi.org/10.1086/150119>
4. E Tandberg-Hansen and A G Emslie, "*The Physics of Solar Flares*", Cambridge University Press, Cambridge(1988).
5. V S Beskin, A V Gurevich, and N Ya, "*Istomin, Physics of Pulsar Magnetosphere*", Cambridge Univ. Press UK. (1993).
6. M Adnan, S Mahmood, and A Qamar, . *Phys. Plasmas.* (2014) 092119.
7. G Gahn, G D Tsakiris, G Pretzler, K J Witte, C Delfin, C G Wahlstrom, and D Habs, *Appl. Phys. Lett.* **77** (2000) 2662.
8. A Mushtaq and H A Shah, *Phys. Plasmas.* **12** (2005) 012301.
9. C M Surko, M Leventhal, W S Crane, A Passner, F Wysocki, T J Murphy, J Strachan, and W L Rowan, *Rev. Sci. Instrum.* **57** (1986)1862.  
<https://doi.org/10.1063/1.1139154>
10. G Sarri, W Schumaker, A Di Piazza, M Vargas, B Dromey, M E Dieckmann, V Chvykov, A Maksimchuk, V Yanovsky, ZH He, B X Hou, J A Nees, A. G R Thomas, C H Keitel, M Zepf, and K Krushelnick, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013)255002.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.255002>
11. AA Mamun and PK Shukla, *Geophys. Res. Lett.* **29** (2002) 1870.
12. M Tribeche, and A Merriche, *Phys. Plasmas.* **18** (2011) 033706.
13. W M Moslem, *Phys. Lett. A* **351** (2006) 290.
14. B Tian and YT Gao, *Phys. Plasmas.* **12** (2005) 054701.
15. A Barkan, N D'Angelo, and R Merlino, *Planet. Space Sci.* **44** (1996) 239.
16. S A El-Tantawy, N.A. El-Bedwehy, and WM Moslem, *Phys. Plasmas.* **18** (2011) 052113.
17. S Ghosh, and R Bharuthram, *Astrophys. Space Sci.* **314** (2008) 121.
18. P K Shukla and V P Silin, *Physica Scripta.* **45** (1992) 508.  
<https://doi.org/10.1088/0031-8949/45/5/015>
19. M Tribeche, K Aoutou, S Younsi, and R Amour, *Physics of Plasmas* (2009) 072103.  
<https://doi.org/10.1063/1.3160619>
20. O R Rufai, R Bharuthram, S V Singh, and G S Lakhina, *Advances in Space Research* (2016) 813.  
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2015.11.021>
21. H Washimi, T Taniuti, *Phys Rev Lett.* **17** (1966) 996.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.996>
22. T D Kaladze, M Shad, L V Tsamalashvili, *Phys. Plasmas* 17(2010) 022304.  
<https://doi.org/10.1063/1.3313359>
23. M Khalid, A Ullah, A Khan Kabir, H M Irshad, and S Shah, *Europhysics Letters.* **138**(2022) 6.  
<https://doi.org/10.1209/0295-5075/ac765c>
24. S Mahmood and N khtar, *Eur. Phys. J. D.* **49**(2008)217  
<https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00165-4>
25. S Mahmood, A Mushtaq, and H Saleem, *New J. Phys.* **5**(2003) 28.  
<https://doi.org/10.1088/1367-2630/5/1/328>
26. P K Shukla, A A Mamun, and L Stenflo, *Physica Scr.* **68** (2003) 295.  
<https://doi.org/10.1238/Physica.Regular.068a00295>
27. N Jehan, M Salahuddin, H Saleem, and A M Mirza, "*Phys. Plasmas.* **15** (2008) 092301.  
<https://doi.org/10.1063/1.2977768>
28. S Mahmood, S Siddiqui, and N Jehan, *Phys. Plasmas.* **18**, (2011)052309.



- <https://doi.org/10.1063/1.3590869>
29. A Shahrina, and M G Hafez, *Sci. Rep.* **12**(2022) 6453.  
<https://doi.org/10.1038/s41598-022-10236-6>
30. H R Pakzad, *Astrophys Space Sci.* **332**(2011) 269.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-010-0533-5>
31. H Alinejad, “*Astrophys Space Sci.* **325** (2010) 209.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-009-0177-5>
32. K Javidan, and D Saadatmand, *Astrophys Space Sci.* **333**(2011) 471.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-011-0645-6>
33. F Farhadkiyaei and D Dorrani, *Contrib. Plasma Phys.* **58** (2018) 42.  
<https://doi.org/10.1002/ctpp.201600076>
34. Q Haque and H Saleem, *Phys. Plasmas* **10**(2003)3793.  
<https://doi.org/10.1063/1.1602073>
35. R Bostrom, *IEEE Trans Plasma Sci.* **20** (1992)756.  
<https://doi.org/10.1109/27.199524>
36. P Dovner, E rikson, R Bostrom, and B Holback, *Geophys Res Lett.* **21**(1994) 1827.
37. A Saha and P Chatterjee, *Astrophys Space Sci.* **350** (2014) 631.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-014-1796-z>
38. M Khalid, A Khan, M Khan, F Hadi, and Ata-ur-Rahman, *Brazilian Journal of Physics.* **51** (2021) 60.  
<https://doi.org/10.1007/s13538-020-00807-1>
39. M M Masud, M Asaduzzaman, and A A Mamun, “*Phys. Plasmas* 19(2012)103706.  
<https://doi.org/10.1063/1.4753922>
40. K B Zhang and H Y Wang, *J. Korean Phys. Soc.* **55**(2009)1461.  
<https://doi.org/10.3938/jkps.55.1461>
41. S T Shuchy, A Mannan, A A Mamun, *JETP Lett.* 95 (2012) 310.  
<https://doi.org/10.1134/S0021364012060094>