

## تعمیم کوانتومی فرمول‌بندی آپلتون- هارتری

بهنام رجبی و احمد مهرآمیز

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین

پست الکترونیکی: mehramiz@sci.ikiu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۰۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۰۲/۱۰)

### چکیده

در این کار، شکلی جدید و تعمیم‌یافته برای فرمول آپلتون- هارتری به دست آورده می‌شود. با استفاده از این فرمول، آثار ناشی از نیروی کوانتومی بر امواج الکترومغناطیسی در حالت‌های انتشار مایل، شبه‌موازی و شبه‌عمود در یک پلاسمای ناهمسانگرد بررسی می‌شود. در حالت کلی‌تری نسبت به پژوهش‌های پیشین، نشان داده می‌شود نیروی کوانتومی، پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون، چپ‌گرد، عادی و غیرعادی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بررسی نتایج در حالت‌های خاص نتایج پژوهش‌های پیشین را تأیید می‌کند و در حالت‌های حدی به روابط شناخته شده فیزیک پلاسمای کلاسیک می‌انجامد.

### واژه‌های کلیدی: پلاسمای کوانتومی، نیروی کوانتومی، امواج الکترومغناطیسی

### ۱. مقدمه

هستند. به عنوان مثال در مرجع [۹] پاشندگی امواج خطی در یک پلاسمای کوانتومی سرد و یکنواخت در قالب خاصی از دستگاه ویگنر پواسون مورد بررسی قرار گرفته است. در کار فوق نشان داده می‌شود که جنبه‌های کوانتومی بر پاشندگی برخی از امواج الکترومغناطیسی تأثیرگذار هستند و موج لانگمویر به دلیل اثرات کوانتومی، ویسلر مانند می‌شود. پژوهش گفته شده در بردارنده نتایجی ارزنده است ولی در دو حالت خاص انجام شده است. از سوی دیگر، فرمول‌بندی آپلتون- هارتری روشی شناخته شده در بحث مطالعه امواج پلاسمای سرد است. این فرمول‌بندی به شکلی منسجم مطالعه طیف گسترده‌ای از امواج الکترونی پلاسمای کلاسیک را ممکن می‌سازد.

در کمتر از دو دهه اخیر بسیاری از مباحث کلاسیکی مطرح در فیزیک پلاسمای با لحاظ کردن جنبه‌های کوانتومی مورد بازبینی قرار گرفته است. بحث امواج و ناپایداری‌های پلاسمای از جمله این مباحث است و ثابت شده است که در نظر گرفتن جنبه‌های کوانتومی برای ذرات تشکیل‌دهنده پلاسمای باعث پدیدار شدن ویژگی‌های جدیدی برای بسیاری از محیط‌های پلاسمایی، امواج و ناپایداری‌های آنها می‌شود. در رابطه با انجام اصلاحات کوانتومی بر پاشندگی کلاسیکی امواج مختلف پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است [۱-۸]. برآورد تأثیرات نیروی کوانتومی برآمده از افت و خیز چگالی و همچنین اسپین ذرات از جمله این اصلاحات

بالا به شکل ماتریسی  $\vec{D} \cdot \vec{E} = 0$  نوشته خواهد شد. معادله دیگری که به آن نیازمندیم، معادله اصلاح شده اوپلر است

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) - \frac{\nabla p}{n} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right), \quad (2)$$

که در آن  $q$  بار ذره،  $\mathbf{E}$  میدان الکتریکی،  $\mathbf{B}_0$  میدان مغناطیسی خارجی،  $m$  جرم ذره،  $\mathbf{v}$  سرعت ذره،  $n$  چگالی عددی،  $\hbar$  ثابت پلانک و  $p$  فشار گرمایی است. جمله آخر بیانگر نیروی کوانتومی بوهم است.

معادله پیوستگی برای الکترون‌ها نیز به صورت زیر به کار برده می‌شود

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (3)$$

که در آن  $n_e$  چگالی اختلالی الکترون‌ها و  $\mathbf{v}_e$  سرعت اختلالی الکترون‌ها است. فرض می‌شود بردار  $\mathbf{n}$  در صفحه  $xz$  قرار دارد و با میدان مغناطیسی خارجی زاویه  $\theta$  می‌سازد. به بیان دیگر

$$\mathbf{n} = (n \sin \theta, 0, n \cos \theta), \quad (4)$$

است. عبارت اول رابطه (۱) را به شکل ماتریسی زیر می‌نویسیم

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -n^2 \cos^2 \theta & 0 & n^2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & -n^2 & 0 \\ n^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & -n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

در ادامه تانسور دی‌الکتریک  $\vec{\epsilon}$  محاسبه خواهد شد. بدین منظور با انجام خطی‌سازی و تبدیل فوریه بر روی مؤلفه‌های رابطه (۲) و نیز معادله پیوستگی الکترون‌ها رابطه (۳)، چگالی جریان به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = -n_e e \begin{pmatrix} \frac{eH(\omega G)}{im(\omega^2 G^2 - \omega_c^2 H^2)} & -\frac{e\omega_c H^2}{m(\omega^2 G^2 - \omega_c^2 H^2)} \\ \frac{eH(\omega G)}{im(\omega^2 G^2 - \omega_c^2 H^2)} & \frac{e\omega_c H^2}{m(\omega^2 G^2 - \omega_c^2 H^2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$G = \omega^2 \epsilon m^2 - \hbar^2 k^4 - \epsilon m^2 k^2 v_{Th}^2, \quad (7)$$

$$H = \omega^2 \epsilon m^2,$$

جملات دوم و سوم در عبارت  $G$ ، به ترتیب ناشی از اثر

در این مقاله از معادلات دینامیکی حاکم بر پلاسما همراه با اصلاحات کوانتومی برای تحلیل رفتار الکترو-دینامیکی دستگاه استفاده می‌شود. شکلی تعمیم‌یافته و کوانتومی برای فرمول‌بندی آپلتون-هارتتری به دست آورده می‌شود و با استفاده از آن پاشندگی امواج مختلف الکترو-مغناطیسی الکترونی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. به بیان دیگر، ضمن مطالعه حالت‌های مختلف فرمول‌بندی به دست آمده، تأثیر پتانسیل‌های کوانتومی بر پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون، چپ‌گرد (موج L)، عادی (موج O) و غیرعادی (موج X) در حالت‌های انتشار مایل، شبه‌موازی و شبه‌عمود نسبت به میدان مغناطیسی خارجی در محیط پلاسما بررسی می‌شود. سرانجام بررسی حالت‌های حدی، سازگاری نتایج به دست آمده با دیگر مقالات و همچنین متون کلاسیک را نشان خواهد داد.

## ۲. معادلات و تحلیل الکترو-دینامیکی

پلاسما یکنواخت و ناهمسانگردی را در نظر می‌گیریم که شامل الکترون‌ها و یون‌ها است. یون‌ها ساکن در نظر گرفته می‌شوند و میدان مغناطیسی خارجی اعمالی بر پلاسما هم راستا با محور  $z$  ( $\hat{z} \parallel \mathbf{B}_0$ ) فرض می‌شود. برای برآورد جنبه‌های الکترو-دینامیکی با ترکیب قانون فارادی و قانون آمپر و انجام تبدیل فوریه می‌توان به معادله همگن حاکم بر میدان موج دست یافت [۱۰]

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

در رابطه فوق  $\mathbf{n}$  معرف ضریب شکست است. در ادامه معادله

که در آن  $\omega_c$  فرکانس سیکلوترونی الکترون و  $n_e$  چگالی تعادلی الکترون‌ها است و عبارت‌های  $G$  و  $H$  نیز به صورت زیر تعریف شده‌اند

که در آن برای ساده‌نویسی از تعاریف زیر استفاده شده است

$$\begin{aligned} A &= S_q \sin^\gamma \theta + P_q \cos^\gamma \theta, \\ B &= RL \sin^\gamma \theta + S_q P_q \left(1 + \cos^\gamma \theta\right), \\ C &= P_q \left(S_q^\gamma - D_q^\gamma\right) = P_q RL, \end{aligned} \quad (13)$$

با حل معادله (۱۲) و استفاده از روابط (۱۰) پاسخ زیر حاصل می‌شود

$$n^\gamma = 1 - \frac{\frac{\omega_p^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma} \left(1 - \frac{\omega_p^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma G^\gamma}\right)}{\frac{\omega_p^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma G^\gamma} \left(1 - \frac{\omega_p^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma G^\gamma}\right) - \frac{\omega_c^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma G^\gamma} \sin^\gamma \theta \pm \Delta} \quad (14)$$

که در آن  $\Delta$  برابر است با

$$\Delta = \sqrt{\frac{\omega_c^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma G^\gamma} \sin^\gamma \theta + \frac{\omega_c^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma} \left(1 - \frac{\omega_p^\gamma H^\gamma}{\omega^\gamma G^\gamma}\right) \cos^\gamma \theta} \quad (15)$$

رابطه (۱۴) شکل پیچیده و تعمیم‌یافته‌ای از پاشندگی امواج در حالت کلی را نشان می‌دهد. این معادله را می‌توان شکل اصلاح شده رابطه پاشندگی آپلتون- هارتری نامید. نشان داده خواهد شد که عبارت فوق در حالت‌های ویژه و ساده‌تر به فرمول آپلتون- هارتری کلاسیک تبدیل می‌شود.

### ۳. بحث و بررسی

در این بخش رابطه پاشندگی (۱۴) مورد تحلیل بیشتری قرار داده می‌شود و براساس آن وضعیت انتشار و پاشندگی بسیاری از امواج مورد بحث مشخص می‌شود. بدین منظور دو مقدار تقریبی برای  $\theta$  در نظر می‌گیریم و روابط پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون، چپ‌گرد، عادی و غیرعادی را برای حالت‌های انتشار شبه‌موازی و شبه‌عمود به دست می‌آوریم.

#### ۳.۱. حالت شبه موازی

به عنوان اولین حالت، پاشندگی امواج در حالت انتشار شبه‌موازی بررسی می‌شود.

امواج ویسلر و هلیکون: در حالت انتشار شبه‌موازی یعنی هنگامی که  $\theta = 0$  است، جمله شامل  $\cos \theta$  در رابطه (۱۵)

پتانسیل کوانتومی بوهوم و اثر گرمایی هستند. با استفاده از رابطه (۶) و با توجه به این که  $\mathbf{j} = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}$  است، تانسور رسانندگی محیط به شکل زیر به دست می‌آید

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{-\omega_p^\gamma H^\gamma (\omega G)}{i(\omega^\gamma G^\gamma - \omega_c^\gamma H^\gamma)} & \frac{\omega_p^\gamma \omega_c^\gamma H^\gamma}{(\omega^\gamma G^\gamma - \omega_c^\gamma H^\gamma)} & \circ \\ -\frac{\omega_p^\gamma \omega_c^\gamma H^\gamma}{(\omega^\gamma G^\gamma - \omega_c^\gamma H^\gamma)} & \frac{-\omega_p^\gamma H^\gamma (\omega G)}{i(\omega^\gamma G^\gamma - \omega_c^\gamma H^\gamma)} & \circ \\ \circ & \circ & \frac{-\omega_p^\gamma H^\gamma}{i\omega G} \end{pmatrix} \quad (8)$$

که در آن  $\omega_p$  فرکانس پلاسما است. با جایگزینی تانسور رسانندگی (۸) در رابطه  $\vec{\epsilon} = \vec{1} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \vec{\sigma}$  می‌توان تانسور دی‌الکتریک محیط را به صورت زیر به دست آورد

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} S_q & iD_q & \circ \\ -iD_q & S_q & \circ \\ \circ & \circ & P_q \end{pmatrix} \quad (9)$$

در اینجا نمادهای  $S_q$ ،  $D_q$  و  $P_q$  فرم‌های تعمیم‌یافته با اصلاحات کوانتومی و گرمایی هستند که به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\begin{aligned} S_q &= 1 - \frac{\omega_p^\gamma H G}{(\omega^\gamma G^\gamma - \omega_c^\gamma H^\gamma)}, \\ P_q &= 1 - \frac{\omega_p^\gamma H}{\omega^\gamma G}, \\ D_q &= \frac{\omega_p^\gamma \omega_c^\gamma H^\gamma}{\omega (\omega^\gamma G^\gamma - \omega_c^\gamma H^\gamma)}, \end{aligned} \quad (10)$$

هم‌ارزهای کلاسیکی نمادهای فوق (به صورت بدون زیرنویس) به صورت متعارف در متون کلاسیک پلاسما استفاده می‌شوند. با جایگذاری روابط (۹) و (۵) در رابطه (۱) معادله ماتریسی زیر به دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} S_q - n^\gamma \cos^\gamma \theta & iD_q & n^\gamma \cos \theta \sin \theta \\ -iD_q & S_q - n^\gamma & \circ \\ n^\gamma \cos \theta \sin \theta & \circ & P_q - n^\gamma \sin^\gamma \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

از حل این معادله عبارت زیر حاصل می‌شود

$$An^\gamma - Bn^\gamma + C = 0 \quad (12)$$

غالب است. با لحاظ کردن این تقریب و در نظر گرفتن علامت مثبت در رابطه (۱۴) به دست می‌آوریم

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = \frac{1 - \frac{\omega_p^{\vee} H}{\omega^{\vee} G}}{1 - \frac{\omega_p^{\vee} H}{\omega^{\vee} G} \cos^{\vee} \theta}, \quad (20)$$

عبارت به دست آمده نشان‌دهنده شکل اصلاح‌شده رابطه پاشندگی امواج عادی در حالت انتشار شبه عمود است.

امواج غیرعادی: گزینش علامت منفی در رابطه (۱۴) به معادله زیر می‌انجامد

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = \frac{\left(Q - \frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee}}\right) - \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega^{\vee}} \sin^{\vee} \theta}{Q \left(Q - \frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee}}\right) - \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega^{\vee}} \sin^{\vee} \theta}, \quad (21)$$

این رابطه را نیز می‌توان معرف شکل اصلاح‌شده امواج غیرعادی در حالت انتشار شبه عمود نامید.

نتایج دو زیر بخش اخیر را می‌توان در حالت‌های ساده‌تر انتشار کاملاً موازی ( $\theta = 0$ ) و کاملاً عمود ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) نیز آزمود. پیامد بررسی این دو حالت اینست که امواج راست‌گرد، چپ‌گرد و عادی متأثر از آثار کوانتومی نمی‌شوند. نتیجه‌ای که با یافته‌های مرجع [۹] نیز سازگار است.

در حد کلاسیکی  $\hbar \rightarrow 0$  مقدار  $Q$  در روابط (۱۸ تا ۲۱)، برابر یک خواهد شد و به ترتیب زیر به روابط پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون و چپ‌گرد شبه موازی، عادی و غیرعادی شبه عمود کلاسیکی می‌رسیم [۱۱-۱۳]

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = 1 - \frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee} - \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega} \cos \theta}, \quad (22)$$

$$\omega = \frac{\omega_c^{\vee} k^{\vee} \cos \theta}{\omega_p^{\vee}}, \quad (23)$$

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = 1 - \frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee} + \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega} \cos \theta}, \quad (24)$$

غالب است. با لحاظ کردن این تقریب و در نظر گرفتن علامت مثبت در رابطه (۱۴) به دست می‌آوریم

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = 1 - \frac{\frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee}}}{1 - \frac{\hbar^{\vee} k^{\vee}}{4m^{\vee} \omega^{\vee}} - \frac{k^{\vee} v_{Th}^{\vee}}{\omega^{\vee}} - \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega} \cos \theta}, \quad (16)$$

عبارت به دست آمده با چشم پوشی از آثار گرمایی به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = 1 - \frac{\frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee}}}{Q - \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega} \cos \theta}, \quad (17)$$

که در آن  $Q = G/H = 1 - \frac{\hbar^{\vee} k^{\vee}}{4m^{\vee} \omega^{\vee}}$  است. مقایسه رابطه (۱۷) با حالت کلاسیکی نشان خواهد داد که این معادله رابطه پاشندگی امواج ویسلر در حالت انتشار شبه موازی (شبه راست‌گرد) و تحت تأثیر نیروی کوانتومی بوهوم است. ویسلرها امواج الکترومغناطیسی قطبیده راست‌گردی هستند که در حالت انتشار موازی و شبه موازی مطرح می‌شوند. از سوی دیگر، هلیکون‌ها نیز حالت‌های ویژه‌ای از امواج ویسلر هستند که در حالت  $\omega_c \gg \omega$  مطرح می‌شوند. بنابراین با اعمال حد فوق در رابطه (۱۷) خواهیم داشت

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = 1 - \frac{\omega_p^{\vee}}{\frac{\hbar^{\vee} k^{\vee}}{4m^{\vee}} - \omega_c^{\vee} \cos \theta}, \quad (18)$$

این معادله را نیز می‌توان رابطه پاشندگی کوانتومی موج هلیکون نامید.

امواج چپ‌گرد: گزینش علامت منفی در رابطه (۱۴) به حالت دیگری از رابطه اصلاح شده به شکل زیر می‌انجامد

$$\frac{k^{\vee} c^{\vee}}{\omega^{\vee}} = 1 - \frac{\frac{\omega_p^{\vee}}{\omega^{\vee}}}{Q + \frac{\omega_c^{\vee}}{\omega} \cos \theta}, \quad (19)$$

این رابطه را می‌توان شکل تعمیم‌یافته امواج چپ‌گرد نامید.

### ۳.۲. حالت شبه عمود

امواج عادی: در حالت انتشار شبه عمود یعنی هنگامی که

## ۴. نتیجه گیری

در این پژوهش، با استفاده از مجموعه معادلات سیال کوانتومی، شکلی تعمیم یافته برای فرمولبندی آپلتون- هارتری به دست آورده شد. روابط به دست آمده (معادلات (۱۴) و (۱۵)) شکلی پیچیده‌تر نسبت به حالت کلاسیک و مشتمل بر آثار برآمده از اعمال نیروی کوانتومی نشان می‌دهند. نظر به پیچیدگی روابط به دست آمده، به حالت‌های ویژه انتشار امواج شبه‌موازی، شبه‌عمود، موازی و عمود به طور جداگانه پرداخته شد و با حالت کلاسیک مقایسه گردید. در حالت انتشار شبه‌موازی نشان داده شد که آثار کوانتومی پاشندگی امواج ویسلر، هلیکون و چپ گرد را تحت تأثیر قرار می‌دهند. همچنین بنا بر نتیجه مربوط به انتشار در حالت شبه‌عمود، پاشندگی امواج عادی و غیرعادی نیز متأثر از جنبه‌های کوانتومی پلازما است. در مقابل، بررسی حالت‌های خاص‌تر انتشار دقیقاً موازی و دقیقاً عمود امواج نشان داد که در این حالت به جز موج غیرعادی سایر امواج گفته شده وضعیت پاشندگی یکسانی با حالت کلاسیک دارند.

در پایان نیز نشان داده شد که فرمولبندی جدید با چشم‌پوشی از جنبه‌های کوانتومی به نظریه آپلتون- هارتری کلاسیک تبدیل می‌شود.

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cos^2 \theta}, \quad (25)$$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta}, \quad (26)$$

## ۳. روابط آپلتون- هارتری کلاسیک

در حد کلاسیکی  $\hbar \rightarrow 0$  از روابط (۱۴) و (۱۵) به دست می‌آید

$$n^2 = 1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta \pm \Delta}, \quad (27)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega^2} \sin^2 \theta + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 \cos^2 \theta}, \quad (28)$$

که نشان‌دهنده فرمول آپلتون- هارتری کلاسیکی است. این معادله نتایج (۲۲) تا (۲۶) را تأیید می‌کند.

## مراجع

1. M Marklund, B Eliasson, and P K Shukla, *Physical Review E* **76**, 6 (2007) 067401.
2. P K Shukla, *Physics Letters A* **352**, 3 (2006) 242.
3. P K Shukla, *Physics Letters A* **369**, 4 (2007) 312.
4. B Shokri and A A Rukhadze, *Phys. Plasmas* **6** (1999) 4467.
5. M Shahmansouri and B Farokhi, *Journal of Science* **19** (2009) 71.
6. M Shahmansouri, *Journal of Research on Many-body Systems* **7** (2017) 13.
7. M R Rouhani, A Akbarian, and Z Mohammadi, *Iranian Journal of Physics Research* **16**, 3 (2016) 91.
۸. م. ر. روحانی، اکبریان و ز. محمدی، *مجله پژوهش فیزیک ایران* **۱۶**، ۳ (۱۳۹۵) ۹۱.
8. A Mehramiz, J Mahmoodi, and S Sobhanian, *Physics of Plasmas* **17**, 8 (2010) 082110.
9. H Ren, Z Wu, and P K Chu, *Physics of Plasmas* **14**, 6 (2007) 062102.
10. D A Gurnett and A Bhattacharjee, "Introduction to Plasma Physics with Space and Laboratory Applications", Cambridge University Press (2005).
11. E V Appleton, *J. Inst. Elec. Engrs* **71** (1932) 642.
12. P Bellan, "Fundamentals of Plasma Physics", Cambridge University Press (2006).
13. F F Chen, "Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion", Switzerland, Springer International Publishing (2016).