مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۳، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۴۰۲
DOI: 10.47176/ijpr.23.4.51691

تقارن پنهان سیاه‌چالهٔ چرخان سه بعدی

سعیده صادقیان

گروه فیزیک نظری، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مازندران، بابلسر

پست الکترونیکی: s.sadeghian@umz.ac.ir

(دریافت مقاله: ۰۹/ ۰۳/ ۱۴۰۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۰۵/۱۴ /۱۴۰۲)

چکیده:
در این پژوهش به تقارن‌های آشکار و پنهان فضا– زمان خمیده می‌پردازیم. این دو نوع تقارن آشکار و پنهان در این خاصیت که مولد آنها در فضای فاز پیمایش‌گر، همان ثوابت حرکتند، مشترک هستند. تفاوت آنها در این است که مولد تقارن پنهان از ادغام تانسور کیلینگ در دو یا تعدادی بیشتر از تکانهٔ ذره به‌دست می‌آید، در حالی‌که برای تقارن آشکار، این مولد در تکانهٔ ذره خطی است. بنابراین می‌توانیم از روی ثوابت حرکت پیمایش‌گر یک فضا–زمان خمیده به تانسورهای کیلینگ آن فضا–زمان پی ببریم. تانسورهای کیلینگ هندسه‌های چهاربعدی و همچنین با ابعاد بالاتر قبلاً مطالعه شده‌اند. در این کار، ما به این سؤال در مورد وجود تقارن پنهان در سیاه‌چالهٔ چرخان سه بعدی، پاسخ می‌دهیم. برای این منظور، ما دو نوع پیمایش‌گر ذرهٔ آزاد و میدان نرده‌ای را مستقل از هم تحلیل می‌کنیم. با استفاده از ثوابت حرکت مربوط به آنها، نشان می‌دهیم که تانسور کیلینگ این سیاه‌چالهٔ سه‌بعدی، بدیهی است.

واژه‌های کلیدی: تانسور کیلینگ، فضا–زمان خمیده، فضای فاز، میدان نرده‌ای

۱. مقدمه

تقارن‌ها در فیزیک، به ساده‌سازی حل مسائل کمک می‌کنند. تعاریف مختلفی برای تقارن وجود دارد که در این کار، ما با این تعریف از تقارن سروکار خواهیم داشت: نگاشتی در بین اعضای مجموعه جواب‌های یک معادلهٔ حرکت که یک جواب را به خودش یا به یک جواب دیگر می‌برد. در این صورت ناوردای تبدیل تقارنی، معادلهٔ حرکت حاکم بر آن جواب‌ها است.

در گرانش نسبیتی که به مطالعهٔ هندسهٔ فضا–زمان‌های خمیده، میدان‌های روی آن و دینامیک آنها می‌پردازد، تقارن‌های دقیق[۱] را می‌توان به‌طور مستقیم از حل معادلهٔ کیلینگ

$$\nabla^{(\mu}\xi^{\nu)}=0, \qquad (۱)$$

برای بردار ξ^{μ} به‌دست آورد. در اینجا منظور از پرانتز دور شاخص‌ها این است که عبارت باید به‌صورت متقارن نسبت به آن شاخص‌های داخل پرانتز نوشته شود. به وضوح، معادلهٔ 0، یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول است و جواب آن، تحت عنوان بردار کیلینگ شناخته می‌شود. با اعمال یک دیفیومورفیزم در راستای بردار کیلینگ، متریک فضا– زمان ناوردا باقی می‌ماند. به عنوان مثال، اگر برای یک فضا– زمان، بردار $\xi=\partial_t$ (که در پایهٔ مختصاتی نوشته شده است) بردار کیلینگ باشد، متریک آن تقارن زمانی است. این هندسه‌ها را تحت عنوان هندسهٔ پایا می‌شناسیم.

تعمیم معادلهٔ 0 برای تانسور مرتبهٔ n–ام $K^{\mu_1\cdots\mu_n}$، به‌صورت

۱. تقارن دقیق در مقابل تقارن مجانبی به‌کار رفته است. برای تقارن مجانبی معادلهٔ کیلینگ به صورت تقریبی تا حدی که شرایط مرزی اجازه می‌دهند، برقرار است. در این کار به تقارن‌های مجانبی نمی‌پردازیم و در ادامه منظور ما از تقارن، تقارن دقیق است.

$$\nabla^{(\nu}K^{\mu_1\dots\mu_n)}=0, \quad (۲)$$

نوشته می‌شود. جواب این معادله را تحت عنوان تانسور کیلینگ می‌شناسیم. اگرچه هنوز اثر تقارنی تانسور کیلینگ روی هندسه به‌خوبی شناخته نشده است در ادامه، مفهوم تقارنی تانسور کیلینگ را شرح می‌دهیم.

یک روش دیگر برای یافتن تقارن‌های یک فضا–زمان خمیده، کمک گرفتن از پیمایش‌گر[1]های مختلف از جمله ذرۀ آزاد، میدان نرده‌ای یا میدان‌های با اسپین بالاتر است که به‌طور کمینه با گرانش جفت شده‌اند؛ زیرا تقارن‌های فضا–زمان در دینامیک این پیمایش‌گرها نمود پیدا می‌کند. هر یک از این پیمایش‌گرها در معادلۀ حرکت مخصوص به‌خود صدق می‌کند. در نتیجه برای هر پیمایش‌گر می‌توان فضای فاز جواب‌های معادلۀ حرکت را ساخت. به عنوان مثال، فضای فاز برای ذرۀ آزاد که روی فضا–زمان خمیده حرکت می‌کند، همان فضای کتانژانت مربوط به خمینه است. هر تبدیلی در این فضای فاز، یک تقارن است؛ زیرا جواب را به جواب می‌برد. تحول زمانی ذره نیز با هامیلتونی آن داده می‌شود. ثوابت حرکت ذره، یعنی توابعی که تحت تحول زمانی ثابت هستند، به تقارن‌های فضا–زمان مربوط می‌شوند. اگر بردار کیلینگ خمینه‌ای که ذره روی آن حرکت می‌کند ξ باشد، می‌توان نشان داد که تابع زیر یکی از ثوابت حرکت آن است:

$$C_\xi=\xi^\mu p_\mu. \quad (۳)$$

در اینجا p_μ معرف تکانۀ ذره است. به عنوان نمونه، برای ذره‌ای که روی فضا–زمان پایا حرکت می‌کند، انرژی ذره، یک ثابت حرکت است.

ممکن است ثابت حرکت، از توان دوم تکانه (یا توان‌های بالاتر تکانه) ساخته شود. برای این‌که شاخص‌های این تعداد تکانه آزاد نباشد، باید آنها را با تانسور مرتبۀ دوم (یا مرتبۀ بالاتر) ادغام کنیم. دراین‌صورت شرط این‌که تابع C_K که به‌صورت

$$C_K=K^{\mu_1\dots\mu_n}p_{\mu_1}\dots p_{\mu_n}, \quad (۴)$$

تعریف می‌شود، ثابت حرکت باشد، این است که در معادلۀ کیلینگ 0 صدق کند. به عبارت دیگر، تابع C_K که از روی تانسور کیلینگ ساخته می‌شود، در فضای فاز ذره، تبدیل تقارنی ایجاد می‌کند. این درحالی است که اعمال این تبدیل در فضای فاز، تغییراتی در مختصات به‌وجود می‌آورد که با توان اول (یا بالاتر) تکانه متناسب است. در نتیجه در تصویر کردن اثر آن روی فضای پیکربندی که ذره در آن حرکت می‌کند، نمودی ندارد. از این جهت به این‌گونه تقارن‌ها، تقارن‌های پنهان گفته می‌شود. در مقابل به تقارن‌هایی که متناظر با بردار کیلینگ هستند، تقارن آشکار می‌گویند. از بحث بالا، کاملاً روشن است که از ضرب تانسوری دو بردار کیلینگ، یک تانسور مرتبۀ دوم کیلینگ به‌دست می‌آید. این نوع تانسورها را بدیهی می‌نامیم؛ زیرا به ثابت حرکت مستقلی از آن‌چه از بردار کیلینگ به‌دست می‌آید، منجر نمی‌شوند. یک تانسور کیلینگ بدیهی دیگر، خود متریک فضا–زمان است.

یاداوری می‌شود که اگر معادلۀ پیمایش‌گر جداشدنی باشد، وجود ثوابت مستقل به تعداد کافی (یعنی برابر با بعد فضا–زمان)، آن مسئله را حل‌پذیر می‌کند [۱]. به همین جهت، برای شمارش دقیق ثوابت حرکت، مطالعۀ تانسورهای کیلینگ غیربدیهی اهمیت می‌یابد. به عنوان مثال، در سیاه‌چالۀ چرخان کر[2] چهاربعدی وجود تانسور کیلینگ غیربدیهی است که مسئله حرکت ذره آزاد را حل‌پذیر می‌کند [۲]. تانسورهای کیلینگ در سیاه‌چاله‌های با ابعاد بالاتر نیز مطالعه شده‌اند [۳]. در این کار، برای پی بردن به رفتارهای مشترک تقارن‌های پنهان در ابعاد مختلف، به مطالعۀ تقارن‌های پنهان در سه بعد می‌پردازیم تا درک بهتری از زوایای پنهان آن داشته باشیم. در سه بعد، تنها جواب سیاه‌چاله برای نظریۀ اینشتین خالص با ثابت کیهانی منفی، سیاه‌چالۀ BTZ نامیده می‌شود [۴]. آهنگ واپاشی این سیاه‌چاله به میدان نرده‌ایی که به‌صورت کمینه با آن برهم‌کنش دارد، در چارچوب گرانش و همچنین نظریۀ میدان همدیس دوگان مطالعه شده است [۵]. در اینجا، از دیدگاه تقارن‌های پنهان به این مسئله می‌پردازیم و وجود تانسور کیلینگ غیربدیهی برای این سیاه‌چالۀ چرخان سه‌بعدی را تحقیق می‌کنیم. برای این منظور ابتدا پیمایش‌گر ذرۀ آزاد را بررسی می‌کنیم. سپس میدان نرده‌ایی که در معادلۀ کلاین–گوردون

[1] Probe
[2] Kerr

جرم‌دار صدق می‌کند را به عنوان پیمایش‌گر این فضا- زمان خمیده مطالعه می‌کنیم. ثوابت حرکت آنها، اطلاعات لازم در مورد تانسور کیلینگ و تقارن پنهان این سیاه‌چالهٔ سه بعدی را در اختیار ما قرار می‌دهد.

۲. معادلهٔ هامیلتون- ژاکوبی

برای ذرهٔ آزادی به جرم m_0 که روی مسیر زمان‌گونه حرکت می‌کند، معادلهٔ هامیلتون–ژاکوبی به‌صورت

$$p^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m_0^2, \tag{5}$$

برقرار است (p_μ تکانهٔ ذره است). در اینجا فضا–زمان خمیده‌ای را که ذره که روی آن حرکت می‌کند، سیاه‌چالهٔ سه بعدی درنظر می‌گیریم [۴]. متریک این سیاه‌چاله به‌صورت

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\varphi + \Omega(r)\,dt)^2, \tag{6}$$

نوشته می‌شود که در آن، توابع $f(r)$ و $\Omega(r)$ به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$f(r) = \frac{(r^2-a^2)(r^2-b^2)}{\ell^2 r^2}, \tag{7}$$

$$\Omega(r) = -\frac{ab}{r^2 \ell}. \tag{8}$$

در اینجا، a و b به ترتیب شعاع افق‌های داخلی و خارجی و ℓ شعاع فضای پاد–دسیته است. در ادامه فرض می‌کنیم $\ell = 1$. همچنین از نوشتن صریح تابعیت r در توابع متریک خودداری می‌کنیم. برای ساده‌سازی معادلهٔ 0، به معکوس متریک بالا، نیاز داریم که در اینجا آن را ارائه می‌دهیم

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = -\frac{1}{f}\left(\partial_t - \Omega\partial_\varphi\right)^2 + f\,\partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2. \tag{9}$$

با استفاده از این نتیجه در معادلهٔ 0 داریم،

$$-\frac{1}{f}\left(p_t - \Omega p_\varphi\right)^2 + f\,p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 = -m_0^2. \tag{10}$$

با توجه به این‌که فضا–زمان مورد بحث تقارن زمانی و سمتی دارد، بردارهای کیلینگ مربوط به تقارن‌های یاد شده یعنی ∂_t و ∂_φ به ترتیب، به ثوابت حرکت

$$C_T = p_t, \qquad C_\varphi = p_\varphi, \tag{11}$$

که همان انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای ذره هستند، منجر می‌شوند.
به این ترتیب، معادلهٔ 0 را می‌توان ساده کرد

$$p_r = \sqrt{\frac{\left(C_T - \Omega C_\varphi\right)^2}{f^2} - \frac{p_\varphi^2}{r^2 f} - \frac{m_0^2}{f}}. \tag{12}$$

بنابراین، معادلهٔ هامیلتون- ژاکوبی در فضا–زمان سه بعدی با متریک 0 به‌طور کامل جداشدنی است. از آنجایی که سه ثابت حرکت C_T و C_φ و m_0 در سه بعد برای حل این معادله کافی است، این مسئله، حل‌پذیر است.

۳. معادلهٔ کلاین–گوردون

اگر به‌جای یک ذره از یک میدان نرده‌ای $\Phi(t,r,\varphi)$ به جرم M، که در معادلهٔ کلاین- گوردون

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\right) = M^2\Phi, \tag{13}$$

صدق می‌کند، برای پیمایش‌گر فضا- زمان خمیده استفاده کنیم، اثر تقارن‌های آشکار و پنهان هندسه را در فضای فاز جواب‌های این معادله، مشاهده خواهیم کرد.
لازم به ذکر است که منظور از $\sqrt{-g}$، جذر قدر مطلق دترمینان متریک 0 است و مقدار آن با یک محاسبهٔ ساده به‌دست می‌آید

$$\sqrt{-g} = r. \tag{14}$$

بازنویسی معادلهٔ **0**، نتیجه می‌دهد

$$\partial_r(rf\,\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\Phi - \frac{1}{f}\left(\partial_t - \Omega\partial_\varphi\right)^2\Phi = M^2\Phi. \tag{15}$$

همانند ذرهٔ آزاد، برای میدان نرده‌ای نیز دو ثابت حرکت متناظر با تقارن‌های زمانی و سمتی وجود دارد. آنها را به‌ترتیب معرفی ω و m می‌نامیم. سپس با پیشنهاد زیر برای میدان نرده‌ای

$$\Phi(t,r,\varphi) = e^{-i(\omega t - m\varphi)}R(r), \tag{16}$$

بخش زمانی و زاویه‌ای معادلهٔ **0** به‌راحتی از بخش شعاعی جدا می‌شوند و به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\partial_r(rf\,\partial_r R) + \left[\frac{\left(r^2\omega + ab\,m\right)^2}{r^4 f} - \frac{m^2}{r^2}\right]R = M^2 R. \tag{17}$$

این رابطه نیز یک معادله دیفرانسیل معمولی برای $R(r)$ و علی‌الاصول قابل حل است. بنابراین معادلهٔ کلاین- گوردون روی هندسهٔ سه‌بعدی با متریک **0**، حل‌پذیر است.

۴. نتیجه‌گیری

در بخش‌های قبل، دو پیمایش‌گر ذرهٔ آزاد و میدان نرده‌ای را روی فضا-زمان سه‌بعدی سیاه‌چالهٔ چرخان مطالعه کردیم و مشاهده کردیم که معادلهٔ حرکت هر دوی آنها حل‌پذیر است. در مورد ذرهٔ آزاد این حل‌پذیری با وجود ثوابت حرکت انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای و جرم، واقع شد. دو ثابت اول از بردارهای کیلینگ مربوطه، از رابطهٔ **0** به‌دست می‌آیند. در حالی‌که در مورد جرم وضعیت کمی متفاوت است، طبق رابطهٔ **0** این ثابت حرکت متناظر با تانسور متریک است. در نتیجه هیچ‌یک از ثوابت حرکت از تانسور مرتبهٔ دوم غیربدیهی به‌دست نمی‌آیند. در مورد میدان نرده‌ای نیز وضعیت به همین ترتیب است. بنابراین، این هندسه تانسور کیلینگ مرتبهٔ دوم غیربدیهی ندارد. از طرفی می‌توان این بدیهی بودن تانسور کیلینگ مرتبهٔ دوم را به‌گونهٔ دیگری نیز مشاهده کرد. معادلهٔ **0** را می‌توان برحسب کازیمیر مرتبهٔ دوم گروه SL(2,R) نوشت. مولدهای این گروه به این صورت

$$A_0 = \frac{1}{2(a+b)}\left(-\partial_t + \partial_\phi\right),$$

$$A_{\pm} = e^{\pm(a+b)(t-\phi)}\left(-\frac{(a^2+b^2+ab-r^2)}{2(a+b)\sqrt{r^2 f(r)}}\partial_\phi \pm \frac{\sqrt{f}}{2}\partial_r - \left[\frac{ab+r^2}{2(a+b)\sqrt{r^2 f}}\right]\partial_t\right),$$

داده می‌شوند. این مولدها بخشی از بردارهای کیلینگ موضعی متریک **0** هستند و در جبر زیر صدق می‌کنند:

$$[A_+, A_0] = A_+,\ [A_-, A_0] = -A_-,\ [A_+, A_-] = 2A_0. \qquad (۱۸)$$

بخش دیگر تقارن‌های آشکار فضا- زمان مورد بحث، گروه SL(2,R) دیگری است که مولدهای آن عبارتند از:

$$B_0 = \frac{1}{2(a-b)}\left(\partial_t + \partial_\phi\right),$$

$$B_{\pm} = e^{\mp(a-b)(t+\phi)}\left(-\frac{(a^2+b^2-ab-r^2)}{2(a-b)\sqrt{r^2 f}}\partial_\phi \pm \frac{\sqrt{f}}{2}\partial_r - \left[\frac{ab-r^2}{2(a-b)\sqrt{r^2 f}}\right]\partial_t\right),$$

این مولدها نیز جبری مشابه 0 دارند و با تمام $A_{\pm,0}$جابه‌جا می‌شوند. نکتهٔ جالب اینجاست که کازیمیز مرتبهٔ دوم هردو گروه SL(2,R) با هم مساوی

$$\mathcal{C}_2 = A_0^2 - A_{(+}A_{-)} = B_0^2 - B_{(+}B_{-)}, \qquad (۱۹)$$

و برابر عملگر لاپلاسی هستند که روی میدان نرده‌ای اثر می‌کند. در نتیجه جرم میدان نرده‌ای نیز که ویژه مقدار این عملگر است، ثابت حرکتی است که از تانسور کیلینگ بدیهی حاصل شده‌است.

مراجع

1. V Arnold, "*Mathematical Methods of Classical Mechanics*", Graduate Texts in Mathematics. Vol. 60. Translated by K Vogtmann, A D Weinstein, (2nd ed.), New York: Springer-Verlag (1978).
2. B Carter, *Phys. Rev*. **174** (1968) 1559.
3. V Frolov, P Krtous, and D Kubiznak, *Living Rev. Rel*. **20**, 1 (2017) 6.
4. M Banados, C Teitelboim, and J Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849.
5. D Birmingham, I Sachs, and S Sen, *Phys. Lett. B* **413** (1997) 281.