

امواج سالیوتونی بار فضایی در باریکه‌های ذره باردار گرم در کانال‌های انتقال با دیواره مقاومتی

عبدالرسول اسفندیاری کلجاهی و طناز عدیل ماهر

دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

پست الکترونیکی: Tannaz.adilmaher@gmail.com

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۲۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۳/۰۷)

چکیده:

در این مقاله از یک مدل جنبشی تک بعدی برای به دست آوردن امواج سالیوتونی بار فضایی در باریکه ذرات باردار گرم در یک کانال انتقال دهنده با دیواره مقاومتی به شعاع r_w استفاده شده است. میدان الکتریکی محوری به صورت $\langle E_z^s \rangle = -\frac{g_e e_b \partial \lambda_b}{\partial z} - \frac{g_e e_b r_w^2 \partial^2 \lambda_b}{\partial z^2}$ به دست می‌آید که در آن g_e و g_p ثابت‌های هندسی هستند. به علاوه به دلیل مقاومت دیواره، یک میدان الکتریکی E_w حاصل می‌شود. گشتاورهای معادله ولاسف برای تابع توزیع واتر بگ^۱ به معادلات سیالی تبدیل می‌شوند و این معادلات با استفاده از روش اختلال کاهشی به معادله KdV تقلیل می‌یابند. شکل امواج سالیوتونی بار فضایی تند و کند ناشی از باریکه ذرات باردار گرم در حضور مقاومت دیواره با بررسی عددی معادله KdV در زمان‌های مختلف به دست می‌آید. بالاخره مشاهده می‌شود که در امواج سالیوتونی بار فضایی کند ناشی از باریکه‌های ذرات باردار، هرچقدر مقدار مقاومت دیواره بیشتر باشد سرعت رشد دامنه نسبی بیشتر است و در امواج سالیوتونی بار فضایی تند ناشی از باریکه ذرات باردار گرم، هرچقدر مقدار مقاومت بیشتر باشد سرعت میرایی دامنه امواج سالیوتونی بیشتر است. نهایتاً نشان داده می‌شود که با افزایش مقدار مقاومت دیواره، سرعت رشد (میرایی) دامنه نسبی امواج سالیوتونی بار فضایی آهسته (سریع) ناشی از باریکه‌های ذرات باردار افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: باریکه ذره، بار فضایی، موج سالیوتونی، اختلال کاهشی، میرایی، مدل سیالی

۱. مقدمه

باریکه ذرات باردار مشابه پلاسمای کاملاً غیرخشی رفتار می‌کند، لذا امواج خطی می‌توانند در سامانه باریکه ذرات باردار منتشر شوند. موج بار فضایی خطی یکی از انواع امواج خطی است. بار فضایی عبارت است از بار الکتریکی اضافی که به صورت پیوسته در یک منطقه از فضا (حجمی یا سطحی) توزیع می‌شود [۴] و [۵].

اثر بار فضایی در باریکه ذرات باردار باعث پدید آمدن امواج بار فضایی می‌شود [۲ و ۶]. اگر دامنه اختلال زیاد باشد امواج

باریکه‌ای از ذرات باردار عبارت است از گروهی از ذرات باردار که حدوداً انرژی جنبشی یکسان دارند و تقریباً در یک جهت حرکت می‌کنند. باریکه‌های ذرات باردار شدید توجه خیلی زیادی را به خاطر کاربردشان جلب کرده‌اند که می‌توان به برخوردکننده‌های درخشندگی بالا، تغییر ماهیت زیاله‌های هسته‌ای و تولید انرژی، منابع برون افکنی نوترونی، همجوشی لختی یون سنگین و... اشاره کرد [۱-۳]. از آنجایی که سامانه

کاهش می‌دهد. معادله KdV را برای باریکه ذرات باردار گرم به دست می‌آوریم.

۲. محاسبه میدان الکتریکی حاصل از باریکه ذرات باردار گرم در یک کانال هدایت کننده با دیواره رسانا

یک باریکه الکترونی به طول l_b و شعاع r_b با شرط $r_b \gg l_b$ فرض می‌کنیم که متشکل از ذرات باردار با بار e_b و جرم m_b است و در یک کانال هدایت کننده استوانه‌ای شکل به شعاع r_w منتشر می‌شود. منظور از کانال هدایت کننده با دیواره مقاومتی اتلافی این است که باریکه در یک کانال استوانه‌ای شکل به شعاع معین حرکت می‌کند و کانال در مقابل حرکت باریکه مقاومت اعمال می‌کند که به ناپایداری دیوار مقاومتی منجر می‌شود. انرژی جنبشی آن به صورت

$\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-\frac{1}{2}}$ تعریف شده است که $\gamma_b = (1 - \beta_b^2)^{-\frac{1}{2}}$ جرم نسبی و $V_b = c\beta_b$ سرعت متوسط ذرات باردار و c سرعت نور در خلأ است. فرض بر این است که باریکه توسط لوله‌ای مستقیم و کاملاً رسانا به شعاع r_w منتشر می‌شود. نیروی مرکزگرای عرضی $F = -m_b \omega_\beta X_\perp \gamma_b$ با یسامد $\omega_\beta = cte$ است که X_\perp مقدار جابه‌جایی از محور استوانه را نشان می‌دهد.

در چارچوب ذرات باردار $V_b = c\beta_b = 0$ ، $\gamma_b = 1$ است و می‌توان از معادلات ماکسول-ولاسوف با تابع توزیع $f_b(X, P, t)$ استفاده کرد. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی $E^s(X, t)$ و $B^s(X, t)$ توسط باریکه ذرات باردار ایجاد می‌شوند. در چارچوب ذرات باردار، این میدان‌ها رفتار الکترواستاتیکی خواهند داشت به عبارتی:

$$B^s = 0, \nabla \times E^s = 0, \quad (2)$$

معادلات ماکسول-ولاسوف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial f_b}{\partial x} + (F_{loc}^{tr} + e_b E^s) \frac{\partial f_b}{\partial P} = 0, \quad (3)$$

و

غیرخطی از محیط باریکه منتشر می‌شود که به عنوان مثال می‌توان به امواج سالیوتونی اشاره کرد.

سالیوتون‌ها از امواج غیرخطی مهمی هستند که در بسیاری از زمینه‌های فیزیک مانند امواج آب، آکوستیک، اپتیک و فیزیک پلاسما کاربرد دارند [۷-۹].

یکی از معروف‌ترین معادلاتی که امواج غیرخطی سالیوتونی را بیان می‌کند معادله کورته-دی-وگ وری^۱ (به اختصار KdV) است و به صورت زیر است [۱۰ و ۱۱]:

$$U_t + U_{xxx} = \epsilon U U_x, \quad (1)$$

که در آن شاخص t مشتق نسبت به زمان و شاخص x مشتق نسبت به مکان را نشان می‌دهد. باید خاطر نشان کرد که امواج سالیوتونی به علت رقابت اثر پاشندگی (جمله سوم در معادله (۱)) و اثر غیرخطی (جمله دوم در معادله (۱)) به وجود می‌آید. امواج بار فضایی غیرخطی در سامانه‌های مختلف پلاسما موضوع با اهمیتی است که به صورت گسترده بررسی شده است [۱۲-۲۴].

مطالعه در رژیم غیرخطی امواج بار فضایی در باریکه ذرات باردار سرد، برای نخستین بار توسط سوک^۲ و همکارانش با استفاده از مدل سیالی در یک کانال انتقال باریکه ذره باردار با دیواره مقاومتی اتلافی انجام شده است. آنها نشان داده‌اند که دامنه امواج سالیوتونی بار فضایی کند رشد می‌یابد، در حالی که امواج سالیوتونی بار فضایی تند، دچار میرایی می‌شود [۲۵].

در این مقاله، به بررسی شکل موج سالیوتونی و دامنه امواج سالیوتونی بار فضایی ناشی از باریکه ذرات باردار گرم که توسط یک کانال هدایت دهنده با دیواره مقاومتی منتشر می‌شود می‌پردازیم. میدان الکتریکی حاصل از باریکه ذرات باردار گرم منتشر شده در یک کانال هدایت دهنده با دیواره رسانا را محاسبه کرده و همچنین میدان حاصل از مقاومت دیواره کانال هدایت کننده را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روابط اساسی تکانه و حرکت و به کار بردن روش اختلال

۱. Korteweg-de Vries

۲. Suk

$$F_b(z, p_z, t) = \langle f_b(X, P, t) \rangle_{\perp} = \int dx dy \int dp_x dp_y f_b(X, P, t), \quad (12)$$

با ترکیب (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$\frac{\partial \langle f_b(X, P, t) \rangle_{\perp}}{\partial t} + V_z \cdot \frac{\partial \langle f_b(X, P, t) \rangle_{\perp}}{\partial z} + V_{\perp} \cdot \frac{\partial \langle f_b(X, P, t) \rangle_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + \left\langle (F_{foc}^{tr} + e_b E_{\perp}^s) \frac{\partial f_b}{\partial P_{\perp}} \right\rangle_{\perp} = 0, \quad (13)$$

$$e_b \left\langle E_z^s \frac{\partial f_b}{\partial P_z} \right\rangle_{\perp} = 0,$$

با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F_b}{\partial t} + V_z \frac{\partial F_b}{\partial z} + e_b \left\langle E_z^s \frac{\partial f_b}{\partial P_z} \right\rangle_{\perp} = 0, \quad (14)$$

با استفاده از روابط (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم:

$$\nabla \cdot E = \epsilon \pi e_b n_b, \quad (15)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۵) نسبت به z و با توجه به رابطه (۲)، معادله پواسون در مختصات استوانه‌ای به شکل زیر در

می‌آید:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} E_z^s + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z^s + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} E_z^s = \epsilon \pi e_b \frac{\partial}{\partial z} n_b, \quad (16)$$

از رابطه (۱۲) داریم:

$$\lambda_b(z, t) = \int dx dy n_b = \int dx dy \int d^r P f_b(X, P, t) = \int dp_z F_b(z, p_z, t), \quad (17)$$

با فرض این که دینامیک پرتو عرضی نسبتاً ساکن است، وابستگی $f_b(X, P, t)$ به اندازه حرکت محوری p_z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_b(X, P, t) = G_b(X_{\perp}, P_{\perp}, t) F_b(z, p_z, t), \quad (18)$$

از ترکیب روابط (۱۷) و (۱۸) خواهیم داشت:

$$\int dp_x dp_y G_b(X_{\perp}, P_{\perp}, t) = \frac{n_b(X, t)}{\lambda_b(z, t)}, \quad (19)$$

با استفاده از روابط (۵)، (۶)، (۱۲) و (۱۹) داریم:

$$e_b \left\langle E_z^s \frac{df_b}{dp_z} \right\rangle_{\perp} = e_b \left\langle E_z^s \right\rangle_{\perp}(z, t) \frac{\partial F_b(z, p_z, t)}{\partial p_z}, \quad (20)$$

در نتیجه معادله (۱۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\nabla \cdot E = \epsilon \pi e_b \int d^r P f_b, \quad (4)$$

سرعت ذره باردار در چارچوب پرتو به شکل $V = \frac{P}{m_b}$ تعریف می‌شود. همچنین چگالی عددی $n_b(X, t)$ و چگالی خطی $\lambda_b(z, t)$ به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$n_b(X, t) = \int d^r P f(X, P, t), \quad (5)$$

$$\lambda_b(z, t) = \int dx dy n_b = \int dx dy \int d^r P f(X, P, t), \quad (6)$$

$$\lambda_b(z, t) = \int dx dy n_b = \int dx dy \int d^r P f(X, P, t),$$

در تمامی معادلات

$$(X, P, t) = (x, y, z, p_x, p_y, p_z, t)$$

و به عبارتی $X_{\perp}, P_{\perp} = (x, y, p_x, p_y)$ است. سه بعد دارند. همچنین در تمامی معادلات، به جای استفاده از مختصات دکارتی می‌توان از مختصات استوانه‌ای استفاده کرد.

$$\int dx dy = \int_0^{r_w} r dr \int_0^{2\pi} d\theta, \quad (7)$$

$$\int d^r P = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z, \quad (8)$$

باریکه در یک کانال هدایت‌کننده استوانه‌ای شکل با شعاع r_w منتشر می‌شود. با فرض کاملاً رسانا بودن دیواره کانال هدایت خواهیم داشت:

$$[E_z]_{r=r_w} = 0 = [E_{\theta}]_{r=r_w}, \quad (9)$$

در داخل کانال هدایت‌کننده یک ناحیه خلأ در $r_0 < r \leq r_w$ داریم که چگالی عددی ذرات باردار در آن صفر است.

$$f_b(X, P, t) = 0, \quad (10)$$

معادله ماکسول-ولاسوف را با استفاده از

$$(X, P, t) = (X_{\perp}, z, P_{\perp}, p_z, t)$$

می‌نویسیم:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + V_z \cdot \frac{\partial f_b}{\partial z} + V_{\perp} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial x_{\perp}} + (F_{foc}^{tr} + e_b E_{\perp}^s) \frac{\partial f_b}{\partial P_{\perp}} + e_b E_z^s \frac{\partial f_b}{\partial P_z} = 0, \quad (11)$$

که در آن $X_{\perp} = x e_x + y e_y$ و $P_{\perp} = p_x e_x + p_y e_y$ است.

عملگر $\langle \dots \rangle_{\perp}$ را به صورت

$$\langle \dots \rangle_{\perp} = \int dx dy \int dp_x dp_y (\dots)$$

تعریف می‌کنیم.

$$\langle E_z^s \rangle = \langle E_z^s \rangle^{(1)} + \langle E_z^s \rangle^{(2)}, \quad (28)$$

با در نظر گرفتن تابع چگالی $n_b(r, z, t)$ و حل انتگرال بالا، مقادیر زیر به دست می آید [۲۵]:

$$\langle E_z^s \rangle^{(1)} = -\frac{g_s e_b \partial \lambda_b}{\partial z}, \quad (29)$$

$$\langle E_z^s \rangle^{(2)} = -\frac{g_s e_b r_w^2 \partial^2 \lambda_b}{\partial z^2}, \quad (30)$$

$$g_s = \gamma \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \left(\gamma \pi \int_r^r r dr \frac{n_b}{\lambda_b} \right)^2, \quad (31)$$

$$(32)$$

$$g_s = \frac{\gamma}{r_w^2} \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \left(\gamma \pi \int_r^r r dr \frac{n_b}{\lambda_b} \right) \int_r^{r_w} r dr \int_r^r \frac{dr}{r} \left(\gamma \pi \int_r^r r dr \frac{n_b}{\lambda_b} \right),$$

که g_s و g_γ ضرایب هندسی هستند. با استفاده از روابط (۲۷) و (۲۸) و (۲۹) شکل کلی میدان الکتریکی محوری به دست می آید:

$$\langle E_z^s \rangle = -\frac{g_s e_b \partial \lambda_b}{\partial z} - \frac{g_s e_b r_w^2 \partial^2 \lambda_b}{\partial z^2}. \quad (33)$$

۳. معادله KdV برای اختلالات طولی در پرتوهای ذرات باردارگرم در کانال هدایت کننده با دیواره

مقاومتی

از یک مدل جنبشی یک بعدی برای بررسی دینامیک طولی غیرخطی یک باریکه متشکل از ذرات باردار گرم که از طریق یک لوله استوانه‌ای شکل به شعاع r_w منتشر می شود استفاده می کنیم.

با توجه به رابطه (۳۳)، میدان الکتریکی محوری به صورت

$$\langle E_z^s \rangle = -\frac{g_s e_b \partial \lambda_b}{\partial z} - \frac{g_s e_b r_w^2 \partial^2 \lambda_b}{\partial z^2}$$

این میدان ناشی از ذرات باردار است که در یک کانال هدایت کننده با دیواره رسانا منتشر می شود. g_s و g_γ مقادیر ثابتی هستند. همچنین چگالی خطی است. اختلالات غیرخطی ضعیفی را که در نزدیکی سرعت صوت ایجاد می شوند می توان از طریق معادله کورته دی-وگ وری یا به اختصار معادله KdV بیان کرد.

معادلات اساسی اندازه حرکت و پیوستگی زیر را در نظر می گیریم:

$$(21)$$

$$\frac{\partial F_b}{\partial t} + V_z \frac{\partial F_b}{\partial z} + e_b \langle E_z^s \rangle_\perp(z, t) \frac{\partial F_b(z, p_z, t)}{\partial p_z} = 0,$$

$$\langle E_z^s \rangle = \gamma \pi \int_r^{r_w} dr r \frac{n_b}{\lambda_b} E_z^s(r, z, t), \quad (22)$$

معادله (۱۶) را با شرط $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} E_z^s + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z^s = \gamma \pi e_b \frac{\partial}{\partial z} n_b, \quad (23)$$

و یا

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} E_z^s = \gamma \pi e_b \frac{\partial}{\partial z} n_b - \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z^s, \quad (24)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۲۱) داریم:

$$(25)$$

$$E_z^s = -\gamma \pi e_b \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \int_r^r r dr \left(\frac{\partial}{\partial z} n_b + \frac{1}{\gamma \pi e_b} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z^s \right),$$

با فرض $k_z \sim \frac{\partial}{\partial z}$ و $k_z r_w^2 \ll 1$ ، جمله $\frac{1}{\gamma \pi e_b} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z^s$ در رابطه (۲۵) نسبت به سایر جملات خیلی کوچک است. با جایگذاری رابطه (۲۵) در خودش خواهیم داشت:

$$E_z^s = -\gamma \pi e_b \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \int_r^r r dr \left(\frac{\partial}{\partial z} n_b + \frac{1}{\gamma \pi e_b} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (-\gamma \pi e_b \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \int_r^r r dr \left(\frac{\partial}{\partial z} n_b + \frac{1}{\gamma \pi e_b} \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z^s \right)) \right) = \gamma \pi e_b \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \int_r^r r dr \left(\frac{\partial}{\partial z} n_b + \int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \int_r^r r dr \frac{\partial^2}{\partial z^2} n_b \right), \quad (26)$$

$$\int_r^{r_w} \frac{dr}{r} \int_r^r r dr \frac{\partial^2}{\partial z^2} n_b),$$

با جایگذاری رابطه (۲۶) در (۲۲) خواهیم داشت:

$$(27)$$

$$\langle E_z^s \rangle = \gamma \pi e_b \int_r^{r_w} r dr \frac{n_b}{\lambda_b} \int_r^r \frac{dr}{r} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\gamma \pi \int_r^r r dr n_b) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_r^{r_w} r dr \int_r^r \frac{dr}{r} (\gamma \pi \int_r^r r dr n_b) \right] = \gamma \pi e_b \int_r^{r_w} r dr (\gamma \pi \int_r^r r dr \frac{n_b}{\lambda_b}) \left[\frac{\partial}{\partial z} (\gamma \pi \int_r^r r dr n_b) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_r^{r_w} r dr \int_r^r \frac{dr}{r} (\gamma \pi \int_r^r r dr n_b) \right],$$

رابطه (۲۶) بیان می دارد میدان الکتریکی را می توان به صورت مجموع دو میدان نوشت؛ به عبارتی می توان گفت:

$$T = \left(\frac{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}}{U_{b^*}^{\gamma}} \right) \frac{U_{b^*}^{\gamma} t}{r_w}, \quad (44)$$

$$Z = \left(\frac{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}}{U_{b^*}^{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{z}{r_w}, \quad (45)$$

با استفاده از روابط بالا، معادلات اساسی پیوستگی و اندازه حرکت به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial T} \eta + \frac{\partial}{\partial Z} (U + \eta U) = 0, \quad (46)$$

$$(47)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} U + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\eta + \frac{1}{\gamma} U^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{U_{bT}^{\gamma}}{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}} \eta^{\gamma} + \frac{\partial^{\gamma}}{\partial Z^{\gamma}} \eta \right) +$$

$$r_w \lambda_{b^*} \frac{U_{bT}^{\gamma}}{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}} (\eta + 1) U R = 0,$$

برای بررسی تأثیر مقدار مقاومت دیواره در رفتار موج سالیتمونی و به منظور کوچک در نظر گرفتن مقاومت دیواره از تعریف

$$r_w \lambda_{b^*} \frac{U_{bT}^{\gamma}}{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}} R = \varepsilon C_{\gamma}$$

رابطه (۴۷) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(48)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} U + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\eta + \frac{1}{\gamma} U^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{U_{bT}^{\gamma}}{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}} \eta^{\gamma} + \frac{\partial^{\gamma}}{\partial Z^{\gamma}} \eta \right) +$$

$$C_{\gamma} \varepsilon (\eta + 1) U = 0,$$

برای استفاده از روش اختلال کاهشی، مقادیر η و U بر حسب ε به صورت زیر بسط داده می‌شوند:

$$\eta = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^{\gamma} \eta^{(\gamma)} + \dots, \quad (49)$$

$$U = \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^{\gamma} U^{(\gamma)} + \dots, \quad (50)$$

متغیرهای جدید برای استفاده از روش اختلال کاهشی برای حل معادله کورته دی-وگ وری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}} (Z - T), \quad (51)$$

$$\tau = \varepsilon^{\frac{\gamma}{\gamma}} T, \quad (52)$$

و روابط اصلی (۴۶) و (۴۸) با استفاده از (۴۹)، (۵۰)، (۵۱) و (۵۲) بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_b + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_b v_b) = 0, \quad (34)$$

$$(35)$$

$$\lambda_b \left(\frac{\partial}{\partial t} v_b + v_b \frac{\partial}{\partial z} v_b \right) + \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial z} P_b = - \frac{\lambda_b e_b^{\gamma} g_{\cdot}}{m_b} \frac{\partial}{\partial z} \lambda_b -$$

$$\frac{\lambda_b e_b^{\gamma} g_{\cdot} r_w^{\gamma}}{m_b} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}} \lambda_b,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_b \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{P_b}{\lambda_b} \right) = 0, \quad (36)$$

به دلیل مقاومتی بودن دیواره کانال هدایت کننده، میدان الکتریکی طولی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$E_w = -\lambda_b v_b R$$

$$\lambda_b \left(\frac{\partial}{\partial t} v_b + v_b \frac{\partial}{\partial z} v_b \right) + \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial z} P_b =$$

$$- \frac{\lambda_b e_b^{\gamma} g_{\cdot}}{m_b} \frac{\partial}{\partial z} \lambda_b - \frac{\lambda_b e_b^{\gamma} g_{\cdot} r_w^{\gamma}}{m_b} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}} \lambda_b -$$

$$\lambda_b \frac{1}{m_b} \lambda_b v_b R,$$

همچنین تغییر متغیرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$p_b(z, t) = \frac{P_b}{\lambda_{b^*}^{\gamma}} \lambda_b^{\gamma}(z, t), \quad (38)$$

$$U_{bT}^{\gamma} = \frac{\gamma P_{b^*}}{\lambda_{b^*} m_b}, \quad (39)$$

$$U_{b^*}^{\gamma} = \frac{\lambda_b e_b^{\gamma} g_{\cdot}}{m_b}, \quad (40)$$

$$U_{bT}^{\gamma} = \frac{\lambda_b e_b^{\gamma} g_{\cdot}}{m_b}, \quad (41)$$

که $P_b(z, t)$ فشار و P_{b^*} فشار اولیه و λ_b چگالی اولیه و λ_{b^*} و P_{b^*} مقادیر ثابتی هستند. U_{bT}^{γ} و $U_{b^*}^{\gamma}$ و U_{bT}^{γ} به ترتیب سرعت گرمایی و سرعت مؤثر صوت و سرعت مؤثرند.

مقادیر بهنجار شده سیال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta = \frac{\lambda_b - \lambda_{b^*}}{\lambda_{b^*}}, \quad (42)$$

$$u = \frac{v_b}{\left(\frac{U_{b^*}^{\gamma} + U_{bT}^{\gamma}}{\lambda_{b^*}^{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (43)$$

برای راحتی از متغیر زمانی T و متغیر فضایی Z که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده می‌کنیم:

معادله (۶۰) به دلیل حضور مقاومت دیواره است.

در غیاب مقاومت دیواره ($C_p = 0$) معادله (۶۰) به معادله KdV ساده تبدیل می‌شود که جواب آن موج سالیتمونی تک قله‌ای است. در حضور دیواره مقاومتی، جمله اختلال ناشی از دیواره مقاومتی به معادله KdV افزوده می‌شود [۲۷ و ۲۸]. جواب معادله KdV اختلال یافته موج سالیتمونی با چندین قله است که با حل عددی به دست می‌آید. در رابطه (۶۰)، C_p مثبت به موج کند (آهسته) در تقریب خطی مربوط می‌شود که در امتداد باریکه حرکت می‌کند؛ در حالی که C_p منفی به موج سریع در تقریب خطی که در خلاف جهت باریکه حرکت می‌کند مربوط می‌شود.

با فرض $C_p = 0/2$ و حل عددی معادله (۶۰)، موج سالیتمونی بار فضایی حاصل از باریکه ذرات باردار گرم در یک کانال هدایت کننده با دیواره مقاومتی در زمان‌های مختلف به شکل زیر خواهد بود [۲۷ و ۲۸]:

شکل ۱ اغتشاش چگالی اولیه در زمان $\tau = 0$ را نشان می‌دهد. شکل ۲ نشان می‌دهد که در زمان $\tau = 1/2(s)$ موجی با دامنه بزرگ‌تر و عرض باریکه‌تر از اغتشاش اولیه پدیدار می‌شود. شکل ۳ مربوط به زمان $\tau = 2/4(s)$ است که در آن موج با دامنه بزرگ‌تر و عرض باریکه‌تر نسبت به زمان $\tau = 1/2(s)$ پدیدار می‌شود.

با گذشت زمان، دامنه موج به دلیل اثر مقاومت دیواره افزایش می‌یابد. این موج یک موج سالیتمونی بار فضایی در حال رشد است. باید توجه کرد که طبق تغییر متغیر (۶۰)، موج سالیتمونی به سمت راست حرکت می‌کند.

۴. محاسبه دامنه نسبی امواج سالیتمونی بار فضایی باریکه ذرات باردار گرم مختلف و رسم نمودار دامنه نسبی

برای بررسی تأثیر مقدار مقاومت در میزان رشد و میرایی دامنه امواج سالیتمونی، مقادیر متفاوتی را که شامل مقادیر مثبت، منفی و صفر را برای C_p در نظر می‌گیریم. با استفاده از نرم افزار

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(\eta^{(1)} + \varepsilon \eta^{(2)} + \dots) + \frac{\partial}{\partial \xi}(U^{(1)} + \dots) + \varepsilon U^{(2)} + \varepsilon \eta^{(1)} U^{(1)} + \dots = 0, \quad (53)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(U^{(1)} + \varepsilon U^{(2)} + \dots) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta^{(1)} + \varepsilon \eta^{(2)} + \dots) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \eta^{(1)} + \dots + \frac{1}{2} \varepsilon U^{(1)^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{U_{bT}^2}{U_{b^*}^2 + U_{bT}^2} \varepsilon \eta^{(1)^2} + \dots + C_p((\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \dots) + 1)(\varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \dots) = 0, \quad (54)$$

$$\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)(U^{(1)} + \varepsilon U^{(2)} + \dots) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta^{(1)} + \varepsilon \eta^{(2)} + \dots) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \eta^{(1)} + \dots + \frac{1}{2} \varepsilon U^{(1)^2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{U_{bT}^2}{U_{b^*}^2 + U_{bT}^2} \varepsilon \eta^{(1)^2} + \dots + C_p((\varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \dots) + 1)(\varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \dots) = 0, \quad (55)$$

در دو معادله بالا جملات با ضریب ε^0 و ε^1 را تفکیک و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\eta^{(0)}(\xi, \tau) = U^{(0)}(\xi, \tau), \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \eta^{(0)} - \frac{\partial}{\partial \xi} \eta^{(0)} + \frac{\partial}{\partial \xi}(U^{(0)} + \eta^{(0)} U^{(0)}) = 0, \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U^{(1)} - \frac{\partial}{\partial \xi} U^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \eta^{(1)}) + \frac{1}{2} U^{(1)^2} + \frac{1}{2} \frac{U_{bT}^2}{U_{b^*}^2 + U_{bT}^2} \eta^{(1)^2} + C_p U^{(1)} = 0, \quad (57)$$

از ترکیب روابط (۵۵)، (۵۶) و (۵۷) معادله زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \eta^{(1)} + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{U_{bT}^2}{U_{b^*}^2 + U_{bT}^2} \right] \eta^{(1)} \frac{\partial}{\partial \xi} \eta^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \eta^{(1)} + C_p \eta^{(1)} = 0, \quad (58)$$

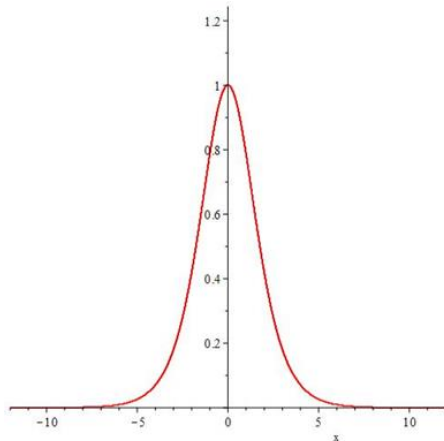
برای سادگی عبارت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\eta} = \left(\frac{3}{2} M^2 + \frac{1}{2} \frac{U_{bT}^2}{U_{b^*}^2 + U_{bT}^2} \right) \eta^{(1)}, \quad (59)$$

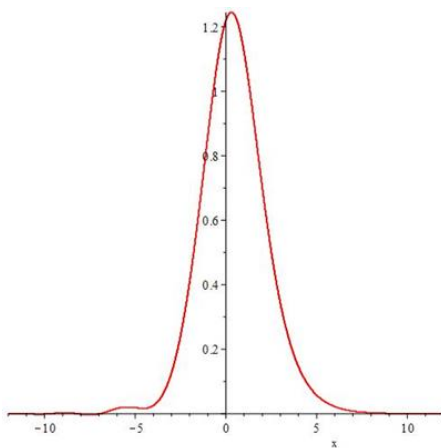
از ترکیب رابطه (۵۸) و (۵۹) معادله کورته دی-وگ وری یا به اختصار معادله KdV برای موج سالیتمونی بار فضایی حاصل از باریکه ذرات باردار گرم به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\eta} + \tilde{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \tilde{\eta} = C_p \tilde{\eta}, \quad (60)$$

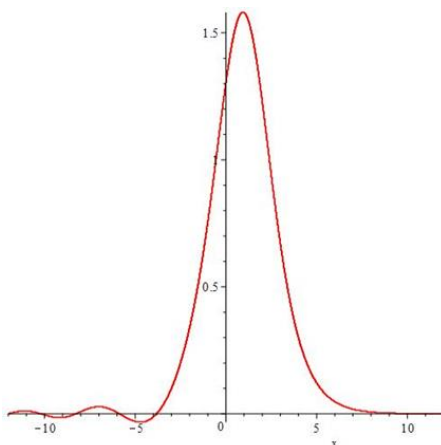
با توجه به رابطه به دست آمده برای معادله KdV، ضرایب پاشندگی و غیرخطیت به ترتیب $\frac{1}{2}$ و ۱ است و جمله $C_p \tilde{\eta}$ در



شکل ۱. موج سالیتمونی بار فضایی کند باریکه ذرات باردار گرم در یک کانال با دیواره مقاومتی در زمان $\tau = 0$ (محور افقی مکان و محور عمودی دامنه را نشان می‌دهد).



شکل ۲. موج سالیتمونی بار فضایی کند باریکه ذرات باردار گرم در یک کانال با دیواره مقاومتی در زمان $\tau = 1/2$ (محور افقی مکان و محور عمودی دامنه را نشان می‌دهد).



شکل ۳. موج سالیتمونی بار فضایی کند باریکه ذرات باردار گرم در یک کانال با دیواره مقاومتی در زمان $\tau = 2/4$ (محور افقی مکان و محور عمودی دامنه را نشان می‌دهد).

میبل برای هر C_p مشخص، شکل موج سالیتمونی را در زمان‌های مشخص به دست آورده و مقدار دامنه آن را در آن لحظه یادداشت می‌کنیم.

برای مقایسه میزان رشد و میرایی دامنه امواج سالیتمونی مختلف تند و کند بار فضایی، با استفاده از داده‌های جدول ۱ در زمان‌های مختلف، مقدار دامنه نسبی هر موج را محاسبه می‌کنیم.

برای محاسبه دامنه نسبی برای یک موج مشخص در یک زمان مشخص برای مثال برای موج سالیتمونی با $C_p = 0/3$ در زمان $T = 1/0.6666$ که با $R_{relative}^{C_p=0/3}_{T=1/0.6666}$ مشخص می‌شود، مقدار بیشینه دامنه این موج در این زمان مشخص را که در جدول ۱ درج شده است بر مقدار بیشینه دامنه موج سالیتمونی با $C_p = 0$ در همان زمان مشخص تقسیم می‌کنیم:

$$R_{relative}^{C_p=0/3}_{T=1/0.6666} = \frac{1/3533016}{0/9746785} = 1/3873$$

با استفاده از داده‌های درج شده در جدول ۲، نمودار دامنه نسبی امواج سالیتمونی مختلف را نسبت به زمان، به کمک نرم‌افزار اکسل رسم می‌کنیم (شکل ۴).

۵. نتیجه‌گیری و بحث

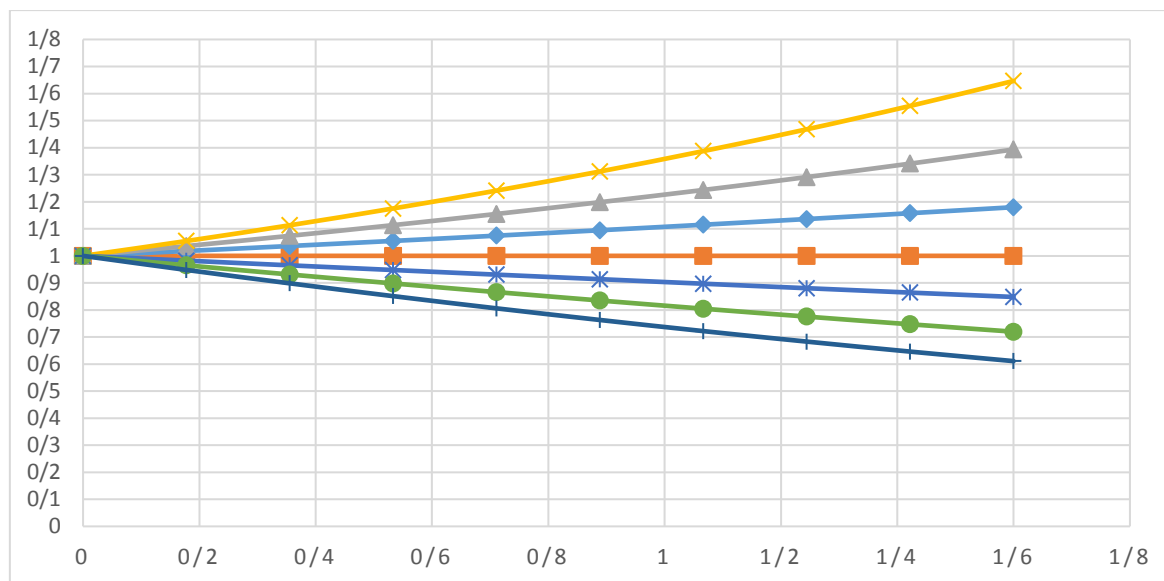
دیواره مقاومتی بیان‌کننده عدم رسانندگی کامل دیواره‌های کانال هدایت است. در اثر مقاومت حاصل از دیواره یک میدان الکتریکی به دلیل حضور مقاومت دیواره به رابطه اساسی حرکت افزوده می‌شود. روابط اساسی تکانه و پیوستگی و همچنین معادله پواسون با استفاده از روش اختلال کاهشی به معادله کورته و گ-دی وری تقلیل می‌یابند. ملاحظه می‌شود که معادله KdV با $C_p > 0$ نشان دهنده موج سالیتمونی بار فضایی کند ناشی از ذرات باردار گرم و معادله KdV با $C_p < 0$ نشان دهنده موج سالیتمونی بار فضایی تند ناشی از ذرات باردار گرم است. برای موج $C_p = 0/2$ با بیشینه دامنه ۱ در زمان $\tau = 0$ ، ملاحظه شد که با گذشت زمان در $\tau = 1/2(5)$ ، نقطه بیشینه موج اندکی به راست جابه‌جا شده و ارتفاع آن افزایش یافته است و با گذشت بیشتر زمان در $\tau = 2/4(5)$ ، بیشینه دامنه موج نسبت به زمان

جدول ۱. بیشینه دامنهٔ امواج سالیوتونی مختلف در زمان‌های مختلف. (C_p و T به ترتیب نمایشگر موج و زمان هستند).

T	$C_p = -0/3$	$C_p = -0/2$	$C_p = -0/1$	$C_p = 0$	$C_p = 0/1$	$C_p = 0/2$	$C_p = 0/3$
۰	۰/۹۹۸۵۱۵۵۴۸	۰/۹۹۸۵۶۷۷۶۵	۰/۹۹۸۵۶۷۱۶۲	۰/۹۹۸۵۵۶۳۸۳	۰/۹۹۸۵۵۳۵۸	۰/۹۹۸۵۶۱۴۳۴	۰/۹۹۸۵۷۹۴۷۸
۰/۱۷۷۷۷۷۷۸	۰/۹۴۴۵۶۳۵۲۴	۰/۹۶۱۵۲۲۱۶۵	۰/۹۷۸۷۹۲۱۴	۰/۹۹۶۳۸۰۴۶۶	۱/۰۱۴۲۸۹۹۸۴	۱/۰۳۲۴۷۹۰۰۰۶	۱/۰۵۱۰۷۴۵۸۴
۰/۳۵۵۵۵۵۵۵۶	۰/۸۹۱۴۵۵۸۴۲	۰/۹۲۳۸۶۸۷۲۷	۰/۹۵۷۴۶۰۶۷۹	۰/۹۹۲۲۴۸۹۰۵	۱/۰۲۸۳۸۹۲۶۶	۱/۰۶۵۷۶۱۳۶۴	۱/۱۰۴۵۴۷۹۱۱
۰/۵۳۳۳۳۳۳۳۳	۰/۸۴۰۶۱۷۴۰۸	۰/۸۸۷۰۳۲۸	۰/۹۳۶۰۱۶۷	۰/۹۸۷۷۲۴۱۱۶	۱/۰۴۲۳۴۸۴۴۱	۱/۰۹۹۹۷۴۴۴۱	۱/۱۶۰۷۹۹۴
۰/۷۱۱۱۱۱۱۱۱	۰/۷۹۲۳۹۵۳۷۹	۰/۸۵۱۴۵۹۹۷۴	۰/۹۱۴۹۵۶۲۳۲	۰/۹۸۳۲۲۷۰۱۹	۱/۰۵۶۶۶۰۴۵۱	۱/۱۳۵۶۰۶۵۹۶	۱/۲۲۰۵۲۴۰۶۳
۰/۸۸۸۸۸۸۸۸۹	۰/۷۴۶۷۵۶۸۰۱	۰/۸۱۷۱۹۱۵۷۳	۰/۸۹۴۳۳۷۷۴۵	۰/۹۷۸۷۷۶۰۷۳	۱/۰۷۱۴۶۶۹۰۴	۱/۱۷۲۹۵۰۱۹۲	۱/۲۸۴۱۸۷۲۵۸
۱/۰۶۶۶۶۶۶۶۷	۰/۷۰۳۵۱۶۷۱۸	۰/۷۸۴۲۴۴۷۷۱	۰/۸۷۲۳۶۰۰۴	۰/۹۷۴۶۷۸۴۹۲	۱/۰۸۶۸۶۴۷۵۲	۱/۲۱۲۱۳۶۲۰۸	۱/۳۵۲۲۰۱۵۸۷
۱/۲۴۴۴۴۴۴۴۴	۰/۶۶۲۹۸۶۵۱	۰/۷۵۲۶۶۵۳۴۱	۰/۸۵۴۶۵۶۸۵۳	۰/۹۷۰۷۰۴۷۷۴	۱/۱۰۲۸۴۵۶۷۴	۱/۲۵۳۳۶۳۳۷۵	۱/۴۲۴۹۳۳۴۷۵
۱/۴۲۲۲۲۲۲۲۲	۰/۶۲۴۶۳۰۸۹۲	۰/۷۲۲۳۱۲۴۳۸	۰/۸۳۵۵۵۱۳۰۴	۰/۹۶۶۹۰۵۴۸۱	۱/۱۱۹۴۲۱۸۱۲	۱/۲۹۶۶۴۴۰۱۶	۱/۵۰۲۸۲۰۵۰۱
۱/۶	۰/۵۸۸۴۸۸۸۶۹	۰/۶۹۳۲۲۹۸۰۶	۰/۸۱۶۹۷۱۳۳۴	۰/۹۳۳۵۶۵۷۱	۱/۱۳۶۶۹۱۴۳۶	۱/۳۴۲۱۸۰۳۴۵	۱/۵۸۶۳۳۴۲۴۳

جدول ۲. مقادیر دامنهٔ نسبی برای امواج سالیوتونی مختلف در زمان‌های مختلف.

T	$C_p = -0/3$	$C_p = -0/2$	$C_p = -0/1$	$C_p = 0$	$C_p = 0/1$	$C_p = 0/2$	$C_p = 0/3$
۰	۰/۹۹۹۹۵۹۲۰۶	۱/۰۰۰۰۱۱۴۹۹	۱/۰۰۰۰۱۰۸۹۵	۱	۰/۹۹۹۹۹۷۲۹۳	۱/۰۰۰۰۰۵۱۵۹	۱/۰۰۰۰۰۲۳۲۲۹
۰/۱۷۷۷۷۷۷۸	۰/۹۴۷۹۹۴۸۲۴	۰/۹۶۵۰۱۵۰۶۹	۰/۹۸۲۳۴۷۷۸۱	۱	۱/۰۱۷۹۷۴۵۷۸	۱/۰۳۶۲۲۹۶۷۵	۱/۰۵۴۸۹۲۸۰۴
۰/۳۵۵۵۵۵۵۵۶	۰/۸۹۸۴۱۹۵۷۷	۰/۹۳۱۰۸۵۶۶	۰/۹۶۴۹۴۰۰۲۱	۱	۱/۰۳۶۴۲۲۶۷۶	۱/۰۷۴۰۸۶۷۱۲	۱/۱۱۳۱۷۶۲۴۵
۰/۵۳۳۳۳۳۳۳۳	۰/۸۵۱۰۶۴۹۸۳	۰/۸۹۸۰۵۷۲۴۷	۰/۹۴۷۶۴۹۹۴	۱	۱/۰۵۵۳۰۳۲۲۱	۱/۱۱۳۶۴۵۴۲۲	۱/۱۷۵۲۲۶۳۴۲
۰/۷۱۱۱۱۱۱۱۱	۰/۸۰۵۹۱۲۹۴۲	۰/۸۶۵۹۸۵۱۲۶	۰/۹۳۰۵۶۴۵۷۴	۱	۱/۰۷۴۶۸۶۱۴۲	۱/۱۵۴۹۷۹۰۳۸	۱/۲۴۱۳۴۵۱۲۲
۰/۸۸۸۸۸۸۸۸۹	۰/۷۶۲۹۴۹۵۸۱	۰/۸۳۴۹۱۱۶۷۸	۰/۹۱۳۷۳۰۶۹۹	۱	۱/۰۹۴۷۰۰۷۵۳	۱/۱۹۸۳۸۴۶۲	۱/۳۱۲۰۳۳۷۹۵
۱/۰۶۶۶۶۶۶۶۷	۰/۷۲۱۷۹۳۶۲۱	۰/۸۰۴۶۱۸۹۳۶	۰/۸۶۹۹۵۵۸۷۹	۱	۱/۱۱۵۱۰۰۷۸۵	۱/۲۴۳۶۲۶۷۱۱	۱/۳۸۷۳۰۸۹۷
۱/۲۴۴۴۴۴۴۴۴	۰/۶۸۲۹۹۵۱۴۹	۰/۷۷۵۳۸۰۲۸۲	۰/۸۸۰۴۴۹۸۳	۱	۱/۱۳۶۱۲۸۸۲۴	۱/۲۹۱۱۷۱۵۳۸	۱/۴۶۷۹۳۷۰۲۳
۱/۴۲۲۲۲۲۲۲۲	۰/۶۴۶۰۱۰۲۸۷	۰/۷۴۷۰۳۵۲۰۳	۰/۸۶۴۱۴۹۹۲۴	۱	۱/۱۵۷۷۳۶۵۳۸	۱/۳۴۱۰۲۴۵۷	۱/۵۵۴۲۵۷۹۰۸
۱/۶	۰/۶۱۰۸۷۳۳۶۳	۰/۷۱۹۵۹۸۳۵۷	۰/۸۴۸۰۴۶۶۷۲	۱	۱/۱۷۹۹۲۸۰۴۶	۱/۳۹۳۳۳۳۱۸۷	۱/۶۴۶۶۷۴۰۲۶



شکل ۴. تغییرات دامنه نسبی چند نوع موج سالیتمونی با گذشت زمان. محور افقی زمان و محور عمودی دامنه نسبی است. نمودارها به ترتیب از بالا به پایین برای امواج سالیتمونی $C_p = 0/3$, $C_p = 0/2$, $C_p = 0/1$, $C_p = 0$, $C_p = 0/1$, $C_p = 0/2$, $C_p = 0/3$ است.

(سریع) ناشی از باریکه ذرات باردار افزایش می‌یابد و در صورتی که دیواره کانال هدایت کننده فاقد مقاومت باشد به عبارتی C_p صفر باشد، دامنه نسبی موج سالیتمونی بار فضایی فاقد رشد و میرایی است.

$\tau = 1/2(s)$ به راست جلبه‌جا شده و دامنه آن افزایش یافته است. از طرفی دیگر تپ اولیه در زمان $\tau = 0$ فقط یک قله داشت ولی با گذشت زمان ریزموج‌هایی در سمت چپ موج اصلی به وجود آمد که تعداد این ریزموج‌ها با گذشت زمان روند افزایشی دارد.

مشاهده شد که با افزایش مقدار مقاومت دیواره، سرعت رشد (میرایی) دامنه نسبی امواج سالیتمونی بار فضایی آهسته

مراجع

1. M Nazmabadi et al., *Iran. J. of Phys. Res.* **15**, 129 (2014) (In Persian)
2. M Reiser, "Theory and Design of Charged Particle Beams", Wiley, New York (1994).
3. D B Williams and C B Carter, "Transmission Electron Microscopy, Plenum", New York (1996).
4. M Reiser, "Theory and Design of Charged Particle Beams", WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, (2008).
5. Jr Stanley Humphries, "Charged Particle Beams", John Wiley and Sons (2002).
6. Jr Stanley Humphries, *Charged Particle Beams*, John Wiley and Sons (2001).
7. Y S Kivshar, *Phys. Rev. A* **42**, 1757 (1990).
8. J S Russel, *Report of the Fourteenth Meeting of British Association for the Advancement of Science*, Murray, London, pp **311-390** (1844).
9. T Filippov, "The Versatile Soliton", Springer Verlag (2000).
10. P G Drazin and R S Johnson, "Solitons: An Introduction", Cambridge university press, Cambridge (1989).
11. R C Davidson, "Methods in Nonlinear Plasma Theory", Academic, New York (1972).
12. S Banerjee, and B Ghosh, *Pramana* **90** (2018) 1.
13. Woo-Pyo Hong and Young-Dae Jung, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **71**, 10 (2016) 971.
14. A Neogi and S Ghosh. *Physical Review B*, **44**, 23 (1991) 13074
15. B I Sturman, M Mann, and K H Ringhofer, *Optics letters* **17**, 22 (1992) 1620.
16. Langmuir, Irving. *Physical review* **33**, 6 (1929) 954.
17. H Schamel and R Fedele, *Physics of Plasmas* **7**, 8 (2000) 3421.
18. Bonilla, Luis L and José M Vega. *Physics Letters A* **156**, 3-4 (1991) 179.
19. Y Nakamura and K Ohtani, *Journal of Plasma Physics* **53**, 235 (1995)
20. H Suk, J G Wang, and M Reiser, *Phys. Plasma* **3**, 2 (1996).

21. R C Davidson and E A Startsev, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 7 (2004) 024401.
22. M Reiser, “*Theory and Design of Charged Particle Beams*”, Wiley, New York (1994).
23. H Suk, J G Wang, and M Reiser. *Physics of Plasmas* 3, 2 (1996) 669.
24. Davidson, Ronald C , and Edward A Startsev, *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams* 7, 2 (2004) 024401.