

تشکیل اتم پوزیترونیم در تقریب آیکنوال مستقیم

فریده شجاعی^۱، رضا فتحی^۱، حسین آفریده^۲، شیما عزیزان^۱ و منصوره رحمانیان^۱

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

۲. دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران

پست الکترونیکی: fshojaei@uk.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۳/۰۹؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۶/۰۴/۲۵)

چکیده

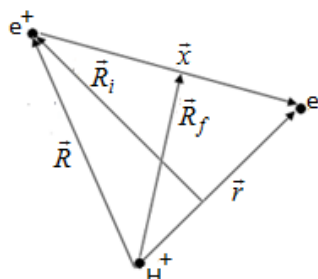
تشکیل پوزیترونیم حالت پایه و حالت ۲s از اتم هیدروژن توسط برخورد پوزیترون در انرژی‌های میانه و بالا، در فرمول‌بندی تقریب آیکنوال مستقیم مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. دامنه پراکندگی انتقال بار آیکنوال و سطح مقطع جزئی و کل جهت این فرایند توسط کاهش انتگرال‌های شش‌بعدی به یک‌بعدی محاسبه شده و با نتایج دیگر نظریه‌ها و تجربی قابل دسترس مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: آیکنوال مستقیم، پوزیترونیم، بازآرایی، سطح مقطع جزئی، سطح مقطع کل

۱. مقدمه

مسئله پراکندگی پوزیترون از اتم هیدروژن و محاسبه سطح مقطع، با این که مسئله آشنایی است، اما پیچیدگی‌های بازآرایی را به دلیل تشکیل پوزیترونیم به دنبال دارد. دستگاه پراکندگی پوزیترون از اتم جالب تراز دستگاه پراکندگی الکترون از اتم، به دلیل وجود دو مرکز پراکندگی متمایز (اتم هیدروژن و پوزیترونیم) بوده و این موضوع این فرایند را از دیگر فرایندهای بازآرایی متمایز می‌کند. به علت وجود فناوری پیشرفته، تولید پرتوهای پوزیترون در گستره‌ای از انرژی کم، میانه و بالا (۵۰ MeV-۵ eV) قابل دسترس است. لذا کارهای تجربی زیادی در زمینه مطالعه برخورد پوزیترون با اتم صورت

گرفته است. از جمله موارد قابل ذکر می‌توان به کارهای انجام شده توسط چارلتون [۱]، دیانا [۲]، فرم [۳] و فرناری [۴] در رابطه با سطح مقطع تشکیل پوزیترونیم اشاره نمود. اسپربر [۵] سطح مقطع کل پراکندگی تشکیل پوزیترونیم را در ناحیه انرژی ۱۳-۵۵ الکترون‌ولت اندازه‌گیری نموده است. در زمینه نظری نیز مطالعات گسترده‌ای روی این فرایند انتقال بار در روش‌های مختلف پراکندگی صورت گرفته است. ساها و ری [۶] در ناحیه انرژی بالا با استفاده از تقریب مرتبه اول بورن و تقریب مرتبه اول تعویض، تشکیل پوزیترونیم را در حالات مختلف مورد مطالعه قرار داده‌اند. در ناحیه انرژی‌های پایین بیشتر کارها توسط هامبرستون [۷] و گریفیت [۸] انجام شده



شکل ۱. مختصات استفاده شده در متن.

با نتایج نظری و آزمایشگاهی قابل دسترس مقایسه شده است. در کلیه محاسبات از یکاهای اتمی استفاده شده است.

۲. نظریه

در فرایند برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن، واکنش‌هایی مانند: پراکندگی کشسان، پراکندگی ناکشسان، تشکیل پوزیترونیم و یونیزاسیون امکان وقوع دارند. هدف این مقاله محاسبه فاز دامنه و سطح مقطع جزئی و کل پراکندگی تشکیل پوزیترونیم برای فرایند برخورد بازآرایی



و



با استفاده از تقریب آیکونال^۱ می‌باشد. در شکل ۱ مختصات استفاده شده جهت فرایند تشکیل پوزیترونیم نشان داده شده است. \vec{x} و \vec{r} به ترتیب بردار موقعیت الکترون نسبت به پوزیترون فرودی (e^+) به جرم m مساوی با جرم الکترون و پروتون هدف (H^+) به جرم M می‌باشد. بردار موقعیت پوزیترون فرودی و پروتون هدف نسبت به مرکز جرم دستگاه‌های (H^+, e) و (e^+, e) به ترتیب با \vec{R}_i و \vec{R}_f نشان داده شده است. و \vec{R} بردار موقعیت پوزیترون نسبت به پروتون هدف می‌باشد. مطابق شکل بین بردارهای ذکر شده روابط

$$\begin{aligned} \vec{R}_i + \vec{x} &= a\vec{r}, \\ \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{x} &= \vec{R}_f, \\ \vec{R} + \vec{x} &= \vec{r}, \end{aligned} \quad (3)$$

برقرار است که در آن $a = M / (m + M)$ بوده و جرم‌های

است. باسو و قوش [۹] سطح مقطع این فرایند را در تقریب مرتبه دوم بورن محاسبه نموده‌اند. ناهار [۱۰] در چارچوب تقریب اول بورن و تقریب موج وایچیده بورن سطح مقطع تشکیل پوزیترونیم را محاسبه نموده است. با استفاده از فرمول‌بندی تقریب دوم فادیف-واتسون که روشی بر مبنای برخورد کاملاً کوانتومی بوده، کارهایی توسط رابرت [۱۱]، قنبری [۱۲] و شجاعی [۱۳] انجام شده است. جرجوی [۱۴]، جوشین [۱۵] و کویگ [۱۶] تقریب آیکونال را به برخوردهای اتمی اعمال نموده‌اند. همه موارد انجام شده یا در ناحیه خاصی از انرژی و یا درگستره زاویه پراکندگی محدود و خاصی با نتایج تجربی توافق دارند. روش آیکونال یک روش نیمه‌کلاسیکی بوده که برای برخوردهای یون-اتم کشسان و غیرکشسان مطرح شده است. این نظریه برای طیف وسیعی از برخوردها کاربرد داشته و برای محدوده انرژی‌های میانه و بالا معتبر است. روش آیکونال برای مطالعه یونش [۱۷]، برانگیزش [۱۸] یا ربایش الکترون [۱۸] از هدف‌های اتمی با استفاده از پراکندگی پوزیترون یا الکترون (پرتابه‌های سبک) نیز به کار گرفته شده است. در این مقاله برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در نواحی مختلف انرژی ۵۰ تا ۲۰۰۰ الکترون ولت، با استفاده از تقریب آیکونال انجام شده است. این کار مشابه کار تریپاتی [۱۹] بوده از حل معادله شرودینگر در تقریب گلوبر آیکونال استفاده شده است با این تفاوت که برهم‌کنش پرتابه با هسته هدف نیز وارد مسئله شده است. تریپاتی با یکسان در نظر گرفتن موقعیت پوزیترون و الکترون هدف در کانال اولیه و نهایی محاسبه مستقیم ماتریس گذار را انجام داده است. این کار با انتخاب پتانسیل کولنی خاصی در کانال اولیه ورودی و در نظر گرفتن شرایط مرزی خاص که تابع موج را ارضاء نماید، همچنین موقعیت متفاوت پوزیترون و الکترون هدف، انجام شده است. طرح مقاله به صورت زیر است: در بخش دوم خلاصه‌ای از نظریه مسئله با تأکید بر روی فرایند بازآرایی در برخورد سه‌جسمی آورده شده است. در بخش سوم به محاسبه دامنه پراکندگی و سطح مقطع جزئی و فاز دامنه پراکندگی پرداخته شده است. در بخش آخر نتایج محاسبات و مقایسه آنها

۱. Eikonal approximation

$$\psi_i(\vec{r}, \vec{R}_i) = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{R}_i} \varphi_i(\vec{r}), \quad (11)$$

در معادله شرودینگر $H\psi_i(\vec{r}, \vec{R}_i) = E_i\psi_i(\vec{r}, \vec{R}_i)$ صدق کرده که H هامیلتونین الکترونی کل دستگاه و E_i ویژه انرژی وابسته است. شرط اعتبار تقریب آیگونال و تابع موج آیگونال در پیوست (الف) بیان شده است.

دامنه بازآرایی شامل دو قسمت موهومی و حقیقی بوده که فاز دامنه با در نظر گرفتن رابطه $\text{Phase} = \text{tag}\left(\frac{\text{Im}(\mathfrak{S}_{if})}{\text{Re}(\mathfrak{S}_{if})}\right)$ قابل

محاسبه است. از نقطه نظر فیزیکی فاز دامنه پراکندگی در بر گیرنده جزئیات برخورد و اختلاف بین فاز مربوط به موج تخت (تقریب بورن) و فازی است که از تقریب آیگونال بیرون آمده و پتانسیل مرتبط بوده که این کمیت در بخش نتایج تجزیه و تحلیل شده است.

سطح مقطع جزئی پراکندگی در چارچوب مرکز جرم از رابطه

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{v_i k_f}{v_f k_i} |\Re_{k_i}(\vec{k}_i, \vec{k}_f)|^2, \quad (12)$$

و در چارچوب آزمایشگاه از رابطه

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{LAB} = \frac{(1 + \tau^2 + 2\tau \cos(\theta))^{\tau/2}}{1 + \tau \cos(\theta)} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}, \quad \tau = m/M \quad (13)$$

و سطح مقطع کل از رابطه

$$\sigma_{total} = 2\pi \int \sin\theta d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (14)$$

به دست آورده شده است. θ زاویه پراکندگی بین جهت دو بردار اندازه حرکت \vec{k}_i و \vec{k}_f می باشد.

۳. محاسبات

در این قسمت به محاسبه ماتریس گذار پرداخته می شود. با انجام انتگرال گیری روی Z' تابع موج کل در رابطه (۹) در کانال خروجی بر طبق تقریب گلوبار-آیگونال به صورت

$$\psi_f^-(\vec{x}, \vec{R}_f) = e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{R}_f} e^{-i\zeta_i \ln\left(\frac{x-x_z}{R-R_z}\right)} \varphi_f^*(\vec{x}) \quad (15)$$

محاسبه شده و ماتریس گذار جهت تشکیل پوزیترونیم به شکل

$$\mathfrak{S}_{if} = -\frac{1}{2\pi} \iint d\vec{r} d\vec{R} \varphi_f^*(\vec{x}) e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{R}_f} \left(\frac{x-x_z}{R-R_z}\right)^{-i\zeta_i} V_i(\vec{R}, x) \psi_i(\vec{r}, \vec{R}_i) \quad (16)$$

کاهش یافته در کانال اولیه و نهایی به صورت

$$\begin{aligned} v_i &= m / (M + 2m), \\ v_f &= M / (M + 2m) \end{aligned} \quad (4)$$

بوده و در محاسبات، دستگاه مختصات به گونه ای در نظر گرفته شده است که سرعت پوزیترون فرودی در جهت محور Z آن و هسته هدف در مبدأ دستگاه باشد. اگر بردار اندازه حرکت پوزیترون در کانال اولیه و نهایی به ترتیب برابر با \vec{k}_i و \vec{k}_f در نظر گرفته شوند، بر طبق اصل پایستگی انرژی رابطه

$$\frac{k_i^2}{2v_i} + \varepsilon_i = \frac{k_f^2}{2v_f} + \varepsilon_f, \quad (5)$$

را می توان نوشت، که در آن ε_i و ε_f به ترتیب انرژی قیدی الکترونی زیر دستگاه های مقید کانال اولیه و نهایی است. تابع موج الکترون فعال در زیر دستگاه های مقید در کانال اولیه و نهایی در گذار $H(1s) \rightarrow Ps(1s)$ به صورت

$$\begin{aligned} \varphi_i(\vec{r}) &= C_i e^{-\lambda_i r}, \\ \varphi_f(\vec{r}) &= C_f e^{-\lambda_f r} \end{aligned} \quad (6)$$

و در گذار $H(1s) \rightarrow Ps(2s)$ به صورت

$$\begin{aligned} \varphi_i(\vec{r}) &= C_i e^{-\lambda_i r}, \\ \varphi_f(\vec{r}) &= C_f \left(1 - \frac{\lambda_f}{\nu} r\right) e^{-\frac{\lambda_f}{\nu} r} \end{aligned} \quad (7)$$

در نظر گرفته شده اند، که در آن $C_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\lambda_i = 1$ و $C_f = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}$, $\lambda_f = \frac{1}{2}$ می باشد.

دامنه بازآرایی مستقیم^۱ با فاز آیگونال برای فرایند (۱،۲) به صورت

$$\Re_{k_i}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) = -\frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}(\vec{k}_i, \vec{k}_f) \quad (8)$$

نوشته می شود که در آن ماتریس گذار بوده و می توان آن را به شکل

$$\mathfrak{S}_{if} = \langle \Psi_f^- | V_i | \Psi_i \rangle, \quad (9)$$

تعریف نمود. $\langle \Psi_f^- |$ تابع موج کل تقریب آیگونال با فاز موج تخت و اپیچیده در کانال نهایی به صورت

$$\psi_f^-(\vec{x}, \vec{R}_f) = e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{R}_f + i\zeta_i \int_z^\infty dZ' V_i(R, x)} \varphi_f(\vec{x}) \quad (10)$$

و V_i و V_f برهم کنش های اختلال در کانال اولیه و نهایی بوده و $|\Psi_i\rangle$ ویژه تابع کانال اولیه با رابطه

۱. The direct rearrangement amplitude by eikonal phase

$$\Xi(\lambda, \chi_i, q_1, q_2) = \int \frac{dq}{(q^\gamma + \lambda^\gamma)(|\bar{q} - \bar{q}_1|^\gamma + \chi_1^\gamma)(|\bar{q} - \bar{q}_2|^\gamma + \chi_2^\gamma)} \quad (20)$$

بوده q_1 و q_2 تابعی از χ_1 و χ_2 می‌باشند. در مرحله اول به محاسبه انتگرال $\Xi(\lambda, \chi_i, q_1, q_2)$ پرداخته خواهد شد.

انتگرال رابطه (۲۰) با استفاده از نمایش انتگرالی تابع لوییس [۲۱]، به شکل

$$\int \frac{d\bar{q}}{(q^\gamma + \lambda^\gamma)(|\bar{q} - \bar{q}_1|^\gamma + \chi_1^\gamma)(|\bar{q} - \bar{q}_2|^\gamma + \chi_2^\gamma)} = \frac{1}{\gamma \pi^\gamma} \int_c^\infty \frac{dx}{\alpha' x^\gamma + \beta' x + \gamma'} \quad (21)$$

نوشته می‌شود که ضرایب در آن به صورت

$$\begin{aligned} \alpha' &= [(q_1 - q_2)^\gamma + (\chi_1 + \chi_2)^\gamma][q_1^\gamma + (\chi_1 + \lambda)^\gamma] \\ \beta' &= \lambda[(q_1 - q_2)^\gamma + (\chi_1 + \chi_2)^\gamma] \\ &+ \chi_2(\lambda^\gamma + q_1^\gamma + \chi_1^\gamma) + \chi_1(\lambda^\gamma + q_2^\gamma + \chi_2^\gamma) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\gamma' = [q_1^\gamma + (\chi_1 + \lambda)^\gamma]$$

تعریف شده‌اند. با در نظر گرفتن ضرایب در روابط (۲۲)، مخرج کسر انتگرالده به $A + B\chi_1 + C\chi_2 + D\chi_1\chi_2$ تغییر داده شده که ضرایب A, B, C, D ترکیب خطی از χ_1 و χ_2 بوده و معادله (۱۹) به صورت

$$\begin{aligned} I_w &= \int \int_{c_1, c_2} d\chi_1 d\chi_2 \frac{d^\gamma}{d\lambda d\chi_i} \frac{g(\chi_1)g(\chi_2)}{A + B\chi_1 + C\chi_2 + D\chi_1\chi_2} dx \\ I_w &= \int \int_{c_1, c_2} d\chi_1 d\chi_2 \frac{d^\gamma}{d\lambda d\chi_i} \frac{g(\chi_1)g(\chi_2)}{A(1 + \alpha\chi_1 + \beta\chi_2 + \alpha\beta\gamma\chi_1\chi_2)} dx \\ &= \frac{1}{A} \int_c^\infty \frac{d}{d\lambda} J_\alpha dx \end{aligned} \quad (23)$$

نوشته می‌شود که

$$J_\alpha = \int \int_{c_1, c_2} d\chi_1 d\chi_2 \frac{d}{d\chi_i} \frac{g(\chi_1)g(\chi_2)}{1 + \alpha\chi_1 + \beta\chi_2 + \alpha\beta\gamma\chi_1\chi_2} \quad (24)$$

و ضرایب به صورت $\alpha = \frac{B}{A}, \beta = \frac{C}{A}, \gamma = \frac{DA}{BC}$ تعریف شده‌اند. حال به حل معادله (۲۴) پرداخته می‌شود اول نسبت به χ_i مشتق‌گیری شده و بعد روی متغیر χ_1 با استفاده از حساب مانده‌ها انتگرال گرفته می‌شود با توجه به شکل

$$\chi_1 = -\frac{1 + \beta\chi_2}{\alpha(1 + \beta\gamma\chi_2)}$$

نوشته می‌شود که در آن x_2 و R_2 مؤلفه‌های Z بردارهای متناظر و $V_i = \frac{1}{R} - \frac{1}{x}$ است.

با استفاده از روش سین‌ها [۲۰] معادله (۱۶) به صورت تحلیلی قابل حل است. انتگرال شش بعدی به انتگرال یک بعدی تبدیل خواهد شد. برای رسیدن به این منظور از نمایش انتگرالی

$$D^{-i\zeta} = -\frac{1}{\gamma \sin(i\pi\zeta)\Gamma(i\zeta)} \int_c^\infty (-\chi)^{i\zeta-1} e^{-\chi D} d\chi \quad (17)$$

برای جمله فـاز آیکونـال از تبدیل

$$e^{-i\zeta_i \ln(\frac{x-x_2}{R-R_2})} = (\frac{x-x_2}{R-R_2})^{-i\zeta_i}$$

انتگرال‌گیری در رابطه (۱۷) دارای شاخه قطعی از صفر تا ∞ است.

با وارد نمودن تابع موج $(\psi_i(\vec{r}, \vec{R}_i))$ از رابطه (۱۱) و پتانسیل برهم‌کنش $(\frac{1}{R} - \frac{1}{x})$ در ماتریس گذار (۱۶) و استفاده از رابطه (۱۷) و تقریب آیکونال ماتریس گذار معادله (۱۶) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{if} &= -A \int \int_{c_1, c_2} d\vec{r} d\vec{R} d\chi_1 d\chi_2 g(\chi_1) \\ &g(\chi_2) e^{-ik_i \cdot \vec{R}} e^{ik_f \cdot \vec{R}_f} e^{-\lambda_f r} \\ &(\frac{1}{R} - \frac{1}{x}) e^{-\lambda_f r} \times e^{-\chi_1(x-x_2)} e^{-\chi_2(R-R_2)} \\ A &= \frac{\mu_f}{\gamma \pi} \frac{C_i C_f}{\gamma \sin(i\pi\zeta_i)\Gamma(i\zeta_i) \gamma \sin(-i\pi\zeta_i)\Gamma(-i\zeta_i)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$g(\chi_2) = (-\chi_2)^{i\zeta_f-1} \text{ و } g(\chi_1) = (-\chi_1)^{-i\zeta_i-1}$$

با استفاده از رابطه تبدیل فوریه

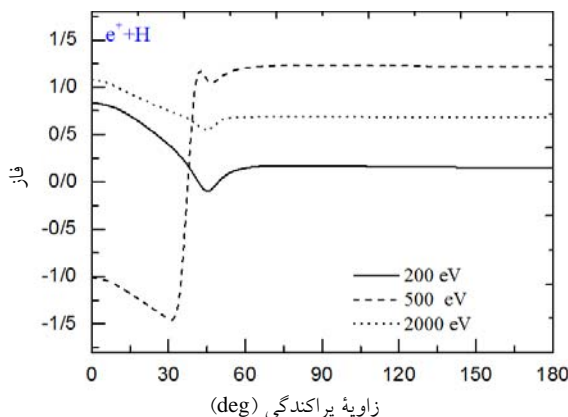
$$e^{-\lambda r} = -\frac{1}{\gamma \pi^\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \int \frac{e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}}}{(k^\gamma + \lambda^\gamma)} d\vec{k}$$

\vec{R} و \vec{r} و خواص تابع دلتا جملات معادله (۱۸) انتگرال‌هایی به شکل

$$I_w = \int \int_{c_1, c_2} d\chi_1 d\chi_2 g(\chi_1)g(\chi_2) \frac{d^\gamma}{d\lambda d\chi_i} \Xi(\lambda, \chi_i, q_1, q_2), \quad (19)$$

$$i=1,2$$

پیدا خواهد کرد، که در آن



شکل ۲ ب. نمودار فاز دامنه پراکندگی بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی‌های ۲۰۰، ۵۰۰ و ۲۰۰۰ الکترون ولت.

روش‌های عددی کلاسیک قابل حل می‌باشد.

۴. نتایج و بحث

محاسبات انجام شده در بخش سوم، برای تمام گذارهای ممکن در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن کاربرد دارد. در این بخش، نتایج محاسبه دامنه، سطح مقطع جزئی ربایش الکترون در برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن در حالت پایه و تشکیل اتم پوزیترونیم در حالت ۱s و ۲s در فرایند بازآرایی (۱) و (۲) آورده می‌شود.

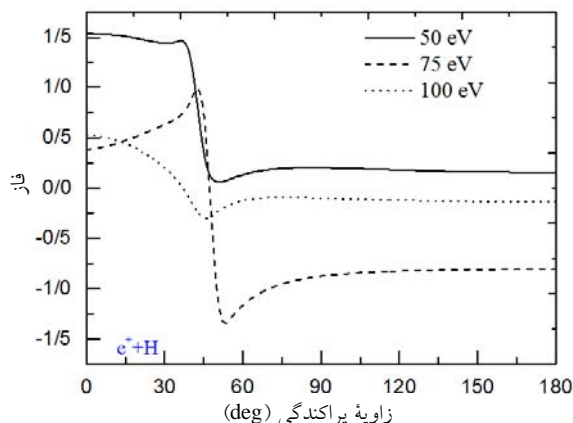
الف) گذار $H(1s) \rightarrow Ps(1s)$

نمودار فاز دامنه پراکندگی که در واقع اختلاف فاز بین فاز مربوط به موج تخت و فازی است که از تقریب آیکنوال استخراج شده و پتانسیل مرتبط می‌باشد، برطبق رابطه

$$\text{Phase} = \text{tag} \left(\frac{\text{Im}(\mathfrak{S}_{if})}{\text{Re}(\mathfrak{S}_{if})} \right)$$

در انرژی‌های ۵۰، ۷۵، ۱۰۰ الکترون

ولت برای گذار $H(1s) \rightarrow Ps(1s)$ در شکل ۲ (الف) رسم شده است. دامنه پراکندگی شامل دو قسمت حقیقی و موهومی بوده که قسمت موهومی دامنه با افزایش انرژی پرتابه و زاویه پراکندگی، کاهش می‌یابد. این جمله در زوایای کوچک پراکندگی حائز اهمیت است. در انرژی ۵۰ الکترون ولت، فاز دامنه پراکندگی در ابتدا از مقدار $\pi/2$ آغاز شده و تا زاویه پراکندگی ۴۵° به صورت ملایم و آرام تغییر می‌کند. در این



شکل ۲ الف. نمودار فاز دامنه پراکندگی بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی‌های ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ الکترون ولت.

دارد. از این رو با جانشینی جواب انتگرال روی χ_1 در رابطه (۲۴) انتگرال به صورت

$$J_0 = 2\pi i \int_{c_1} d\chi_1 g(\chi_1) \left(-\frac{1 + \beta\chi_1}{\alpha(1 + \beta\gamma\chi_1)} \right)^{-i\zeta_i - 1} \\ = -2\pi i (1 + i\zeta_i)(\alpha)^{i\zeta_i + 1} \int_{c_1} d\chi_1 (-\chi_1)^{i\zeta_i - 1} \\ (1 + \beta\chi_1)^{-i\zeta_i - 2} (1 + \beta\gamma\chi_1)^{i\zeta_i + 1} \quad (25)$$

در می‌آید. برای حل انتگرال روی χ_1 از تغییر متغیر $1 + \beta\chi_1 = \rho y$ با $\rho = (\gamma - 1)/\gamma$ استفاده شده است. لذا انتگرال روی χ_1 به

$$J_0 = \Delta \int_{c_1} dy (1 - \rho y)^{i\zeta_i - 1} y^{-i\zeta_i - 2} (1 - y)^{i\zeta_i - 1}, \quad (26)$$

$\Delta = -2\pi i (1 + i\zeta_i)(\alpha)^{i\zeta_i + 1} (-1)^{i\zeta_i + 1} (\beta)^{i\zeta_i} (\gamma)^{-i\zeta_i - 1}$ ، تبدیل شده و انتگرال (۳-۱۲) مشابه انتگرال $\int_{c_1} dy (1 - \rho y)^{-a} y^{b-1} (1 - y)^{c-b-1}$ روی مرز تعریف شده، است

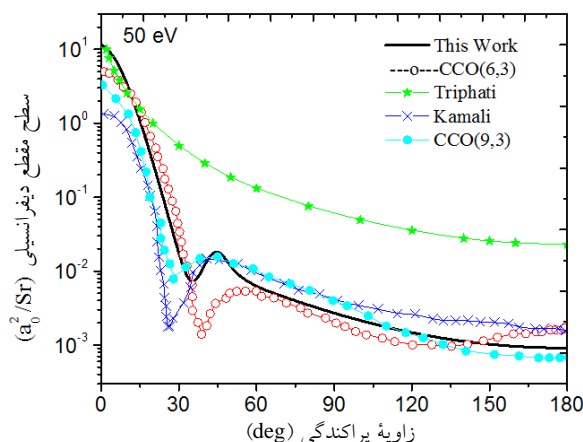
و این انتگرال، جواب معادله دیفرانسیل به صورت

$$\rho(1 - \rho) \frac{d^2 u}{d\rho^2} + [c - (a + b + 1)\rho] \frac{du}{d\rho} - abu = 0, \quad (27)$$

خواهد بود که دارای دو جواب به شکل

$$C_0 {}_2F_1(a, b, c; \rho) \quad \text{اگر } c \neq 0, -1, -2, \dots \\ C_0 \rho^{n+1} {}_2F_1(a + n + 1, b + n + 1, n + \rho; \rho) \quad \text{اگر } c = -n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

می‌باشد. ثابت C_0 با مساوی قرار دادن جواب‌های (۲۸) با جواب معادله (۲۴) با $\gamma = 1$ به دست آمده است. با جایگزینی جواب در رابطه (۲۳) انتگرال یک‌بعدی ماتریس گذار با



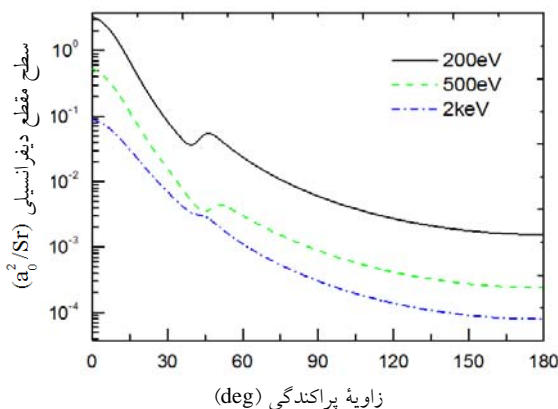
شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار سطح مقطع پراکندگی جزئی در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 1s$ بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی ۵۰ الکترون ولت (CCO (۳,۶) [۲۰]، تریفاتی [۱۹]، کمالی [۲۰] CCo (۳,۹) [۲۰].

پراکندگی 30° تغییر می‌کند. در این زاویه فاز دامنه به $-\pi/2$ رسیده و بعد با یک جهش فاز ناگهانی مواجه شده به طوری که فاز از $-\pi/2$ به $\pi/3$ تغییر می‌یابد. به طور کلی تغییرات این فاز در زوایای کوچک پراکندگی زیاد بوده و با افزایش زاویه پراکندگی فاز به مقدار ثابتی می‌رسد.

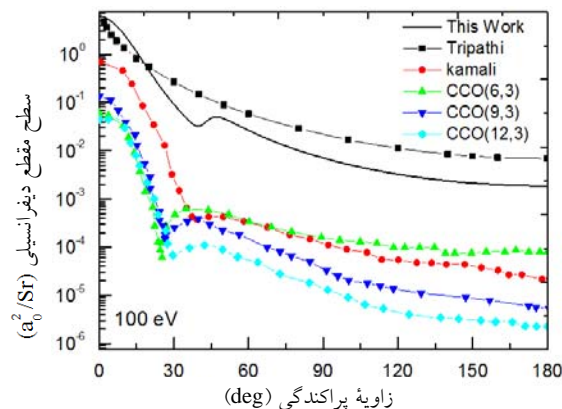
شکل ۳ نمایانگر سطح مقطع جزئی برای انرژی ۵۰ الکترون ولت بوده و با نتایج دیگر نظریه‌ها مقایسه شده است. در این شکل کار ارائه شده توسط تریپاتی بر اساس محاسبه مستقیم ماتریس گذار بوده و موقعیت پوزیترون و الکترون هدف در کانال اولیه و نهایی یکسان در نظر گرفته شده است. برهم‌کنش بین هسته هدف و هسته پرتابه در نظر گرفته نشده و مانند آن است که پرتابه بر الکترون آزادی فرود آمده و آن را جذب کرده است. همان گونه که نمودار نشان می‌دهد هیچ اثر تداخلی ناشی از دو مرکز پراکندگی (اتم هیدروژن و اتم پوزیترونیم) دیده نمی‌شود. اما در کار این مقاله و دیگر کارها این اثر به خوبی در نمودار با ایجاد یک کمینه و بعد حرکت به سمت یک بیشینه به خوبی مشاهده می‌گردد. در نگاه اول به نظر می‌رسد که از لحاظ کیفی بین این نمودارها شباهت‌هایی وجود داشته باشد. با این حال واضح است که برخی از تفاوت‌های کیفی و کمی قابل توجه و معنی داری بین آنها وجود دارد. شکل ظاهری نمودارها از لحاظ کمی و کیفی مشابه بوده به جز در کمینه که

زاویه دامنه با یک جهش فاز ناگهانی مواجه شده به طوری که فاز از $\pi/2$ به 0° تغییر می‌یابد. این تغییر فاز ناگهانی در دامنه تأثیر گذاشته و ایجاد یک بیشینه و کمینه می‌نماید. با افزایش انرژی این جهش نیز در فاز مشاهده می‌شود با این تفاوت که مقدار شروع فاز و زاویه بحرانی تغییر می‌کند برای انرژی ۷۵ الکترون ولت فاز از مقدار $\pi/6$ آغاز شده و تا زاویه پراکندگی 45° به صورت ملایم و آرام تغییر کرده و بعد با یک جهش فاز ناگهانی مواجه شده به طوری که فاز از $\pi/6$ به $-\pi/6$ تغییر می‌یابد. به طور متناظر در انرژی ۱۰۰ الکترون ولت این زاویه بحرانی 50° بوده و فاز از $\pi/6$ به $-\pi/2$ تغییر می‌یابد. همان گونه که مشاهده می‌شود در تمام انرژی‌ها در زاویه بحرانی خاصی (θ_c) تغییر فاز مشخصی دیده می‌شود این زاویه با توجه به محاسبات پیوست ب (۱) در محدوده زاویه $30^\circ - 45^\circ$ رخ داده است. این شیب که به وضوح در نمودارها دیده می‌شود از سهم متناظر با حذف قسمت‌های جاذبه و دافعه اختلال باقی مانده می‌باشد. مقدار فاز در زوایای بزرگ پراکندگی تقریباً ثابت مانده است.

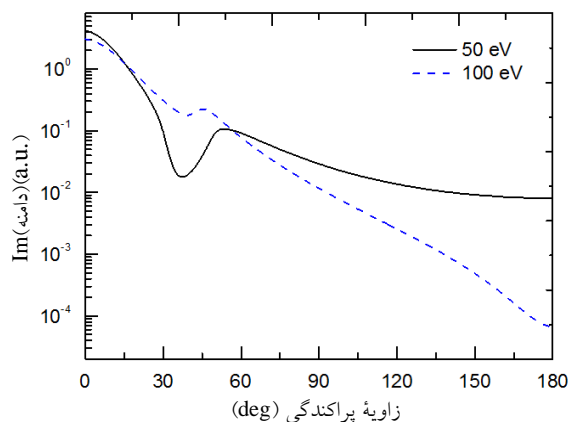
شکل ۲ (ب) مشابه شکل ۲ (الف) برای انرژی‌های ۲۰۰، ۵۰۰ و ۲۰۰۰ الکترون ولت است. انرژی پرتابه تأثیر واضحی بر روی جهش فاز گذاشته و در انرژی ۲ کیلو الکترون ولت فاز دامنه پراکندگی در ابتدا از مقدار $-\pi/3$ آغاز شده و تا زاویه



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار سطح مقطع پراکندگی جزئی در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 1s$ بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی‌های ۲۰۰، ۵۰۰ و ۲۰۰۰ الکترون ولت.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار سطح مقطع پراکندگی جزئی در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 1s$ بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی ۱۰۰ الکترون ولت (CCO (۳,۶) [۲۰]، CCo (۱۲,۳) [۲۰]، تری فاتی [۱۹]، کامالی [۲۰]، CCo (۳,۹) [۲۰]).

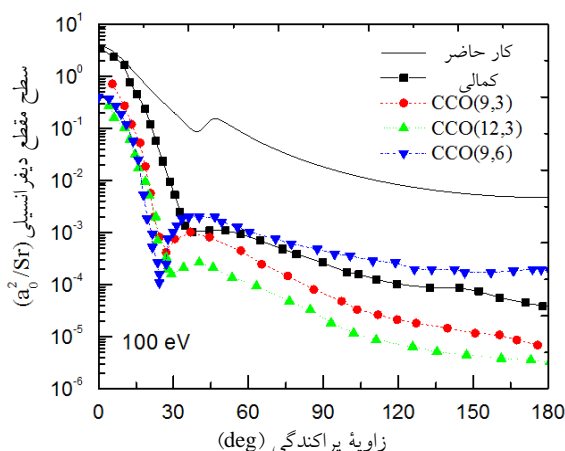


شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار قسمت موهومی دامنه پراکندگی در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 1s$ بر حسب زاویه پراکندگی.

پیوست ب به طور مفصل توضیح داده شده است. شکل ۴ مشابه شکل ۳ برای انرژی ۱۰۰ الکترون ولت رسم شده است. در شکل ۵ سطح مقطع جزئی برای انرژی‌های ۱۰۰، ۵۰۰ و ۲۰۰۰ الکترون ولت رسم شده است با بالا رفتن انرژی سطح مقطع جزئی کاهش یافته و از شدت کمینه کاسته می‌شود. با افزایش انرژی فرودی احتمال جذب الکترون و در نتیجه سطح مقطع جزئی پراکندگی کاهش می‌یابد.

برای این که نقطه اثر وجود بیشینه‌ها و کمینه‌ها در مسئله واضح شود به بررسی قسمت حقیقی و موهومی دامنه‌ها پرداخته شد و نتیجه کار در شکل ۶ رسم شده است. همان گونه که شکل ۶ نشان می‌دهد وجود بیشینه و کمینه در قسمت

این اختلاف به خوبی دیده می‌شود. مدل استفاده شده در این مقاله و مدل کامالی [۲۰] و CCO یک کمینه را در زاویه بین ۳۰-۴۵ درجه را پیش‌بینی می‌کنند. همه نمودارها یک حداکثر برجستگی را در ناحیه ۳۵-۵۵ نشان می‌دهند. به وضوح این کمینه و برجستگی در نمودار فاز دامنه نیز مشاهده شد که تغییر جهش ناگهانی فاز در زاویه خاصی باعث ایجاد یک کمینه و بیشینه می‌کند. دامنه پراکندگی ابتدا به یک کمینه موضعی در اطراف زاویه پراکندگی ۴۵ و سپس به یک بیشینه موضعی در زاویه پراکندگی ۶۰ می‌رسد می‌توان گفت که این بیشینه به دلیل رخ دادن فرایند پراکندگی دوگانه توماس ظاهر می‌شود. چگونگی رفتار زاویه توماس و وابستگی آن به انرژی پرتابه در



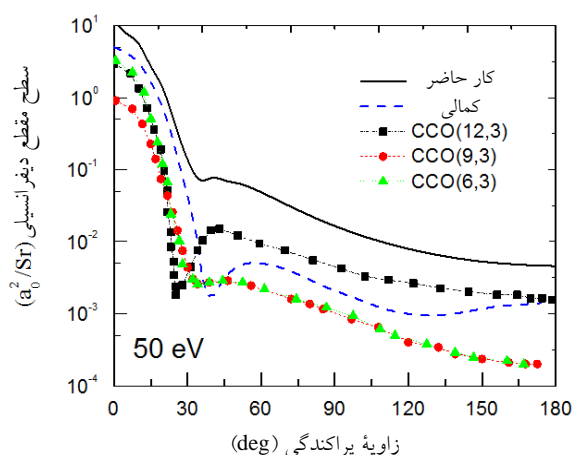
شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار سطح مقطع پراکندگی جزئی در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 2s$ بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی ۱۰۰ الکترون ولت.

است. شکل ۸ مشابه شکل ۷ برای انرژی ۱۰۰ الکترون ولت رسم شده است.

در شکل ۹ سطح مقطع کل پراکندگی بر حسب سرعت پوزیترون فرودی برای گذار $1s \rightarrow 1s$ رسم شده است و با نتایج تجربی مقایسه شده است. محاسبات انجام شده با نظریه جفت‌شدگی نزدیک در انرژی ۱۰۰ الکترون ولت برای سطح مقطع کل، کمالی [۲۲] مقدار $0.049\pi a_0^2$ ، روش CCO (۳،۹) مقدار $0.041\pi a_0^2$ ، روش CCO (۹، ۶) مقدار $0.05\pi a_0^2$ را گزارش نموده‌اند. در همین راستا نتایج دیگری نیز برای انرژی‌های مورد نظر گزارش شده است که در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. خطای محاسبات انجام شده از روش‌های مختلف و کار این مقاله با نتایج تجربی در جدول ۲ و ۳ برای دو انرژی ۱۰۰ و ۵۰ الکترون ولت آورده شده است.

۵. نتیجه‌گیری

تقریب آیکونال روشی برای تخمین رفتار دامنه پراکندگی در انرژی میانه و بالا می‌باشد. با استفاده از تقریب آیکونال واکنش $e^+ + H(1s) \rightarrow Ps(ns) + H^+$ برای $n=1,2$ مطالعه شده است. برای محاسبه دامنه پراکندگی از انتگرال لویس و ابزار

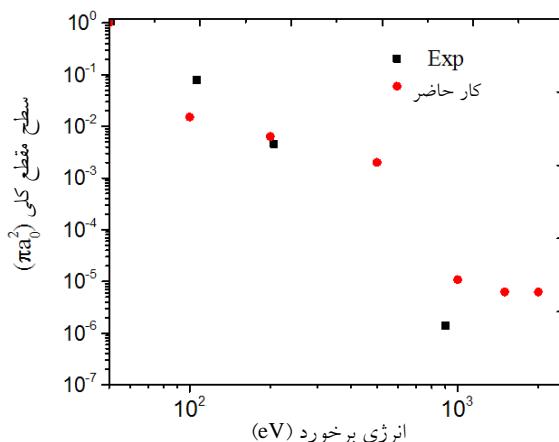


شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار سطح مقطع پراکندگی جزئی در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 2s$ بر حسب زاویه پراکندگی در انرژی ۵۰ الکترون ولت.

موهومی دامنه به طور واضح دیده می‌شود و بیانگر این است که قسمت موهومی دامنه پراکندگی تأثیر قابل توجهی بر روی سطح مقطع پراکندگی و نهایتاً سطح مقطع کل دارد که در قضیه اپتیکی در پراکندگی نیز به این موضوع اشاره شده است. قسمت حقیقی دامنه نکته خاصی نداشت، بنابراین از آوردن نمودار آن خودداری شده است.

(ب) گذار $H(1s) \rightarrow Ps(2s)$

توزیع زاویه‌ای سطح مقطع جزئی پراکندگی در انرژی ۵۰ الکترون ولت برای گذار $H(1s) \rightarrow Ps(2s)$ در شکل ۷ رسم شده و با نتایج دیگر نظریه‌ها مقایسه شده است. در این گذار نیز برخی از تفاوت‌های کیفی و کمی قابل توجه و معنی‌داری بین نمودارها وجود دارد. شکل ظاهری نمودارها از لحاظ کمی و کیفی مشابه بوده به جز در کمینه که این اختلاف به خوبی دیده می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده این است که وجود کمینه در نمودار یک امر بدیهی بوده و تفاوت در زاویه بحرانی به مسئله نظریه به کار گرفته شده برمی‌گردد. با مقایسه شکل ۷ با شکل ۵، واضح است که سطح مقطع جزئی پراکندگی حالت پایه به مراتب بیشتر از حالت $2s$ بوده و این بیانگر این نکته است که الکترون حالت پایه شانس بیشتری برای ربایش داشته و احتمال تشکیل پوزیترونیوم در این حالت به مراتب بیشتر



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار سطح مقطع پراکندگی کل در اثر برخورد پوزیترون با اتم هیدروژن و گذار $1s \rightarrow 1s$ بر حسب زاویه انرژی برخورد نتایج تجربی برگرفته از مرجع [۵].

جدول ۱. نتایج سطح مقطع کل پراکندگی تشکیل پوزیترونیم در واحد πa_0^2 ، اعداد در جدول به صورت $a[-b] = a \times 10^{-b}$ است.

انرژی (eV)	CC(۳, ۳)*	FBA*	SBA(۳, ۳)*	UBA(۳, ۳)*
۵۰	۰/۱۹۳۴	۰/۱۸۰۱	۰/۱۸۲۵	۰/۱۶۲۲
۱۰۰	۰/۱۹۳۴[-۱]	۰/۱۳۴۸[-۱]	۰/۱۴۶[-۱]	۰/۱۲۸۹[-۱]
۲۰۰	۰/۶۸۶[-۳]	۰/۵۹۲[-۳]	۰/۷۳۳[-۳]	۰/۵۸۱[-۳]
۴۰۰	۰/۲۴[-۵]	۱/۷۷[-۵]	۲/۴۹[-۵]	۱/۷۵[-۵]
۶۰۰	۲/۹۳[-۶]	۲[-۶]	۲/۹۹[-۶]	۱/۹۹[-۶]
۸۰۰	۶/۲۶[-۷]	۴/۱[-۷]	۶/۳۲[-۷]	۴/۰۸[-۷]
۱۰۰	۱/۸۴[-۷]	۱/۱۸[-۷]	۱/۸۵[-۷]	۱/۱۷[-۷]

* مرجع [۲۳]

جدول ۲. نتایج خطای محاسبه شده سطح مقطع کل پراکندگی نظریه‌های مختلف با مقدار تجربی برای انرژی ۱۰۰ الکترون ولت.

روش	این کار	کمالی	CCO(۹, ۳)	CCO(۹, ۶)	CCO(۱۲, ۳)
خطای مطلق	۰/۰۱۹	۰/۰۳۱	۰/۰۳۹	۰/۰۳۴	۰/۰۳
خطای نسبی	%۲۴/۳۵	%۳۸/۷۵	%۴۸/۷۵	%۴۲/۵	%۳۷/۵

جدول ۳. نتایج خطای محاسبه شده سطح مقطع کل پراکندگی نظریه‌های مختلف با مقدار تجربی برای انرژی ۵۰ الکترون ولت.

روش	این کار	UBA(۳, ۳)	SBA(۳, ۳)	FBA	CC(۳, ۳)
خطای مطلق	۰/۰۸۰۲	۰/۹۳۸۰	۰/۹۱۷۷۵	۰/۹۲۰۱۵	۰/۹۰۶۸
خطای نسبی	%۷/۲۹	%۸۵/۲۵	%۸۳/۴۱	%۸۳/۶۳	%۸۲/۴۲

شواهدی از سازوکار دومرحله‌ای توماس را نشان می‌دهد. سطح مقطع کل برای تشکیل پوزیترونیم در حالت پایه و در نواحی

ریاضی ساده استفاده شده که انتگرال‌های چندبعدی دامنه را به انتگرال یک‌بعدی تبدیل نموده است. روش استفاده شده

باشد، را برقرار نخواهد کرد. این تابع تنها در مواقعی که پتانسیل برهم کنش غیرصفر باشد مقدار تقریبی اختلاف بین موج پراکنده و تخت را نتیجه می‌دهد. از آنجا که در محاسبات نیاز به دامنه پراکندگی می‌باشد. این موضوع مشکلی را ایجاد نمی‌کند. در تقریب آیکونال تابع موج نهایی با تابع موجی که برای انرژی‌های بالا مناسب است جایگزین می‌گردد. هر چند فرض مستقیم بودن مسیر پرتابه اعتبار این تقریب را زیر سوال می‌برد، ولی با وجود این وقتی با نتایج تجربی مقایسه می‌شود، این تقریب در زوایای بزرگ پراکندگی هم منجر به نتایج بهتری نسبت به تقریب بورن خواهد شد که در تقریب بورن (مرتبه اول) برای محاسبه دامنه پراکندگی تابع موج نهایی با تابع موج اولیه جایگزین می‌گردد (پتانسیل تأثیر چندانی روی ذره ندارد).

پیوست ب

توماس نشان داده است که در سازوکار برخورد دو مرحله‌ای زاویه‌ای وجود دارد که قله چشمگیری در اطراف این زاویه دیده می‌شود. در حالی که پرتابه پوزیترون باشد دو فرایند کلاسیکی دو مرحله‌ای مختلف (A و B) می‌تواند مورد بحث فرار گرفته شود. در هر دو مرحله (A و B) یک زاویه پراکندگی بحرانی پیش‌بینی می‌کنند. در فرایند A در اولین مرحله پوزیترون با الکترون برخورد کرده، پراکنده می‌شود. در دومین مرحله الکترون به هسته هدف ضربه زده و با همان زاویه و سرعتی برابر با پوزیترون ظاهر می‌شود. در فرایند B نقش پوزیترون و الکترون عوض می‌شود. در اولین مرحله پوزیترون با الکترون برخورد کرده، الکترون تحت زاویه‌ای پراکنده می‌شود. در دومین مرحله پوزیترون به هسته هدف ضربه زده و با همان زاویه و سرعتی برابر با الکترون ظاهر می‌شود. تداخل‌ها از این حقیقت ناشی می‌شود که پوزیترون و الکترون دارای جرم مساوی اما بار مخالف هستند. برای ربایش به اتم پوزیترونیم از اتم هیدروژن انتظار یک تداخل مخرب می‌رود. زاویه پراکنده شدن الکترون و پروتون به روشی که بیان می‌گردد قابل مجاسه است. شکل ۱۰ مراحل مختلف سازوکار توماس در ربایش الکترون توسط پرتابه را نشان می‌دهد.

مختلف انرژی محاسبه شده است. نتایج حاضر در توافق خوبی با نتایج تجربی بوده و با نتایج دیگر نظریه‌ها مقایسه شده است.

قدردانی

نویسنده از دانشکده مهندسی انرژی و فیزیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر به علت در اختیار قرار دادن این فرصت جهت انجام کار تحقیقاتی تشکر و قدردانی می‌نماید.

پیوست الف

تقریب نیمه کلاسیکی آیکونال در شرایطی که طول موج دوبروی پرتابه به حد کافی از فاصله‌ای که پتانسیل تغییرات کمی داشته باشد، کوچک‌تر باشد، اعتبار دارد. این شرط برای پتانسیل با دامنه a به صورت

$$ka \gg 1 \quad (1)$$

بیان می‌شود. اضافه بر شرط داشتن عدد موج بزرگ، شرط انرژی زیاد نیز به صورت

$$\frac{|V_0|}{E} = \frac{U_0}{k^2} \ll 1, \quad (2)$$

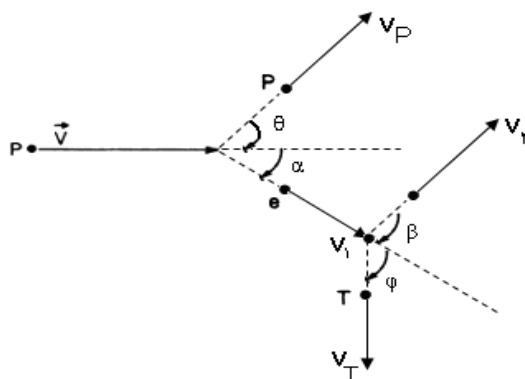
برای تقریب آیکونال تعریف می‌شود، که در آن $|V_0|$ و U_0 به ترتیب شدت پتانسیل $V(\vec{r})$ و پتانسیل $U(\vec{r})$ کاهش یافته هستند. تغییرات پتانسیل بر روی فاصله طول موج دوبروی به آهستگی بوده لذا تابع موج به صورت

$$\psi_{k_i}^{(+)}(\vec{r}) = e^{ik_i \cdot \vec{r}} \varphi(\vec{r}), \quad (3)$$

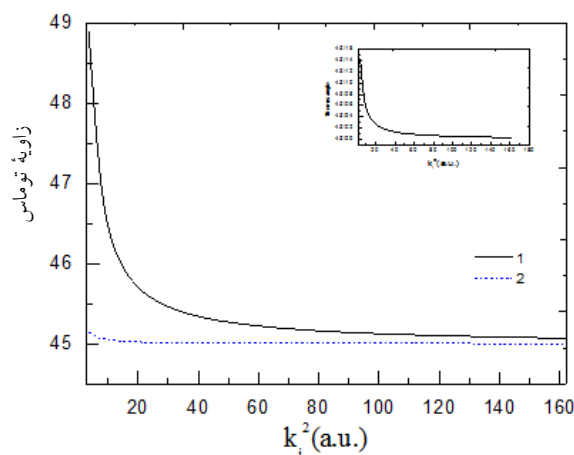
بیان می‌گردد، به عبارتی تابع موج ذره آزاد از تابع موج اصلی جدا می‌گردد. که $\varphi(\vec{r})$ تابعی است که با شرط عدد موجی بزرگ، تغییرات کوچکی دارد. با جانشینی این تابع در معادله انتگرالی لیپمن شوینگر و محاسبه انتگرال، تابع موج تقریبی در تقریب آیکونال به صورت

$$\psi(\vec{r}) = e^{ik_i \cdot \vec{r} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^z dz' U(z')}, \quad (4)$$

به دست می‌آید. که انتگرال در مسیری موازی با \vec{k}_i انجام می‌شود. تابع موج آیکونال شرط مرزی که بایستی در $r \rightarrow \infty$ تابع موج ترکیبی از موج تخت فردی و موج پراکنده کروی



شکل ۱۰. مراحل مختلف سازوکار توماس.



شکل ۱۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تغییرات زاویه بحرانی توماس بر حسب انرژی پرتابه.

رابطه $\cos \theta_c = \frac{v_p}{v}$ به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که زاویه

پراکندگی پوزیترون از رابطه $\cos \psi \theta_c = \frac{\epsilon_i - \epsilon_f}{E_i}$ نیز به دست

می‌آید. تغییرات این زاویه در شکل ۱۱ رسم شده است. رابطه

اول وابستگی زاویه به سرعت پوزیترون در کانال اولیه و

سرعت آن در کانال نهایی و رابطه دوم وابستگی زاویه به

انرژی‌های قیدی در کانال اولیه و کانال نهایی و انرژی پرتابه

دارد. برای این که محدوده تغییرات دو رابطه نشان داده شود،

هر دو در یک شکل رسم شده‌اند و تغییرات رابطه دوم در

گوشه شکل نشان داده شده است. با توجه به نمودار می‌توان

گفت که زاویه به انرژی پرتابه وابسته بوده و در روابط به دلیل

مساوی بودن جرم پرتابه و جرم الکترون محدوده تغییرات زاویه

کم و می‌توان زاویه بحرانی را مساوی 45° گرفت.

بر اساس قانون پایستگی انرژی و اندازه حرکت در برخورد

پوزیترون با اتم هیدروژن

$$M_p v = M_p v_p \cos \theta + m v_1 \cos \alpha \quad (1)$$

$$M_p v_p \sin \theta = m v_1 \sin \alpha \quad (2)$$

از ترکیب دو رابطه فوق

$$M_p^2 (v^2 - 2v v_p \cos \theta + v_p^2) = m^2 v_1^2 \quad (3)$$

و با استفاده از اصل بقای انرژی

$$M_p v^2 = M_p v_p^2 + m v_1^2 \quad (4)$$

عبارت

$$\cos \theta_c = \frac{(M_p - m)v^2 + (m + M_p)v_p^2}{2M_p v v_p} \quad (5)$$

را می‌توان نوشت برای فرایند حاضر جرم پرتابه $M_p = m$ با

جرم الکترون برابر بوده بنابراین زاویه پراکندگی پوزیترون از

مراجع

- Ghanbare Adivi, *J. Math. Phys* **48** (2007) 033506.
13. F Shojaei, E Ghanbare Adivi, M J Brunger, and M A Bolorizadeh, *J. Math. Phys* **50** (2009) 013501.
 14. E Gerjuoy and B K Thomas *Rep. Prog. Phys.* **37** (1974) 1395
 15. C J Joachain, *Comp. Phys. Commun.* **6** (1970) 358.
 16. C J Joachain and C. Quigg, *Rev. Mod. Phys.* **46** (1970) 279.
 17. T Sekimura, *Progress of Theoretical Physics*, **64** (1980) 28-39.
 18. F W Byron, *Phys. Rev. A* **4** (1971) 1907.
 19. S Tripathi, C Sinha, and N C Sil, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 2924.
 20. C Sinha, S Tripathi, and N C Sill, *Phys. Rev. A* **34** (1986) 1026.
 21. R R Lewis. *Phys. Rev.* **102** (1956) 535.
 22. M Z M Kamali, K Ratnavelu, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B* **266** (2008) 388.
 23. K Ratnaveluyx, J Mitroyz and A T Stelbovicsy, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **29** (1996) 2775.
 1. M Charlton, G Clark, T C Griffith, and G K Heyland, *J. Phys. B* **16** (1983) L465.
 2. L M Diana, P G Coleman, D L Brooks, P K Pendleton, and D M Norman, *Phys. Rev. A* **34** (1986) 2731.
 3. D Fromme, G Kruse, W Raith, and G Sinapus, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 3031.
 4. L S Fornari, L M Diana, and P G Coleman, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 2276.
 5. W Sperber, D Becke, K G Lynn, W Raith, and A Schweb, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 3690.
 6. B C Saha and P K Ray, *Phys. Rev. A* **30** (1984) 2980.
 7. J W Humberston, *Phys. Adv. At. Mol. Phys.* **22** (1986) 1.
 8. T C Griffith, *Physics Adv. At. Mol. Phys.* **22** (1986) 37.
 9. M Basu and A S Ghosh, *J. Phys. B* **21** (1988) 3439.
 10. S N Nahar, *Phys. Rev. A* **40** (1989) 6231.
 11. M J Roberts, *J. Phys. B* **22** (1989) 3315.
 12. M A Bolorizadeh, M J Brunger, T Maddern, and E