



## تابع سرعت و فشار شاره نوسانی در سلول هل-شاو دایره‌ای

مهدیه محمدی و مانیا ملکی\*

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: m\_maleki@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۵/۲۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۷/۲۸)

### چکیده

ما در این مطالعه شکل تابع سرعت و فشار شاره‌ای در حال نوسان بین دو صفحه موازی شیشه‌ای را که تشکیل سلول هل-شاو دایره‌ای می‌دهند، بررسی کرده‌ایم. جریان شاره شعاعی، تراکم ناپذیر و آرام در نظر گرفته شده است. معادله نوبه-استوکس وابسته به زمان در مختصات استوانه‌ای با استفاده از تبدیل فوریه حل شده است و سرعت شاره نوسانی در سراسر ضخامت سلول در زمان‌های مختلف به دست آمده است. تابع سرعت شاره در حالت غیر پایا به مؤلفه عمودی مختصات به صورت توابع سهموی و همچنین با عکس مؤلفه شعاعی متناسب است. وابستگی به زمان به صورت هماهنگ ساده با بسامدی برابر با بسامد نوسان ظاهر می‌شود. سرعت شاره در میانه سلول در راستای ارتفاع سلول بیشینه است و از میانه سلول به سمت صفحه بالا و یا پایین، به تدریج کم می‌شود و به صفر می‌رسد. فشار به ارتفاع بستگی ندارد و با شعاع به صورت لگاریتمی تغییر می‌کند. وابستگی فشار به زمان نیز به صورت هماهنگ ساده با بسامد خارجی است، ولی نسبت به سرعت اختلاف فاز دارد.

واژه‌های کلیدی: سلول هل-شاو، شارش نوسانی، شارش شعاعی، شارش پوازی

### ۱. مقدمه

سلول تزریق کردند. بر اثر این تزریق، فصل مشترک بین دو این دو مایع مخلوط نشدنی، ناپایدار شد و طرح‌هایی انگشت‌مانند تشکیل شد که در سراسر سلول منتشر شدند [۳].

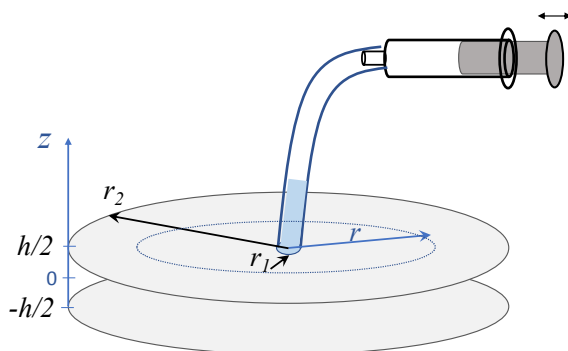
میانگین سرعت شاره و شکسان دوبعدی یعنی  $\bar{u}$ ، بین دو صفحه موازی با فشار  $P$  و به فاصله  $h$  به صورت فرمول شماره ۱ مرتبط می‌شود:

$$\vec{u} = -\frac{h^2}{12\eta} \nabla P, \quad (1)$$

که  $\eta$  ثابت و شکسانی شاره است (در سلول هل-شاو به علت

در سال ۱۹۵۶ تیلور متوجه شد که شاره دوبعدی در محیطی متخلخل<sup>۱</sup> به وسیله شاره در یک سلول هل-شاو [۱] قابل مدل شدن است. سلول هل-شاو متشکل از دو صفحه موازی است که با فاصله بسیار کمی از هم قرار گرفته‌اند [۲]. تیلور و سفمن اولین بار یک سلول هل-شاو را با شاره‌ای با و شکسانی بالا پر کردند و سپس شاره‌ای با و شکسانی پایین‌تر از شاره اول به

۱. Porous



شکل ۱. سلول هل-شاو دایره‌ای به ضخامت  $h$  تحت تأثیر نوسان از سمت پیستون.

پابرجاست و بنابراین در سایر نقاط تابع سرعت اغلب مسطح است [۱۶].

## ۲. نمایه سرعت و فشار در حالت پایا

سرعت مستقل از زمان شاره در یک سلول هل-شاو دایره‌ای که متشکل از دو قرص به فاصله  $h$  است (شکل ۱)، در حالتی که شاره نیوتنی، تراکم‌ناپذیر، پایا و آرام است، با استفاده از معادلات نویه-استوکس و معادله پیوستگی قابل محاسبه است. شکل معادلات نویه-استوکس (با صرف نظر از گرانش) و معادله پیوستگی به ترتیب به صورت زیر است:

$$\frac{\rho(\partial \vec{u})}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3)$$

که در معادلات بالا  $\rho$  چگالی شاره است. محدوده فرضی مورد نظر برای به دست آوردن تابع سرعت در سلول از  $r_1 < r < r_2$  است. اگر معادلات بالا را در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  بنویسیم، با فرض این که شارش شعاعی و همسانگرد است، مؤلفه‌های سرعت در راستای  $\theta$  و  $z$  صفر است؛ یعنی  $u_\theta = 0$  و  $u_z = 0$ . پس تنها مؤلفه شعاعی برای سرعت داریم که از ترکیب معادلات نویه-استوکس و پیوستگی به دست می‌آید. معادلات نویه-استوکس در راستای  $\theta$ ،  $z$  و  $r$  به صورت زیر است:

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0, \quad (4-f)$$

کوچک بودن فاصله بین دو صفحه از اثرات گرانشی صرف نظر می‌شود). این رابطه با قانون داریسی در محیط متخلخل با ضریب نفوذپذیری  $\frac{h^2}{12}$  برابر است. قانون داریسی شار جریان ماکروسکوپی سیال عبوری از یک محفظه را به افت فشار سیال در طول شارش حاصل از نیروهای ماکروسکوپی مرتبط می‌کند [۴]. مطالعه جریان شعاعی بین قرص‌های دایره‌ای موازی در سیستم‌های فیزیکی مانند غلطک‌های مخروطی هوای هیدرواستاتیک پخش کننده‌های شعاعی و هواپیماهای عمودپرواز که در قسمت پایین خود حامل جت هستند، حائز اهمیت است [۵]. شاره‌های نوسانی در استوانه‌های دایره‌ای منفرد مورد مطالعه قرار گرفته است [۶-۸]. برای حالتی که شاره نوسانی در بین دو صفحه موازی مستطیلی باشد نیز تحقیقاتی انجام شده است [۹-۱۱]. در فاز مستقل از زمان، شکل تابع سرعت حاصل از جریان‌های آرام شعاعی بین دو قرص مسطح که با فاصله بسیار کمی از هم قرار گرفته‌اند، در مراجع [۱۲-۱۵] محاسبه شده است. نتایج تابع سرعت شاره حاصل از جریان پوزوی صفحه‌ای نوسانی (شاره نوسانی بین دو صفحه کاملاً موازی با طول بی نهایت) در حالت غیر پایا نشان می‌دهد که سرعت در رژیم‌های مختلف رفتار متفاوتی دارد. در موقعیتی که نصف ضخامت سلول از عمق لایه استوکس کوچک‌تر باشد، اثرات وشکسانی کاملاً غالب است و سرعت در چرخه‌های نوسانی به صورت سهموی رفتار می‌کند؛ ولی در موقعیت‌هایی که شاره در مکانی است که ضخامت میانه سلول از عمق لایه استوکس بزرگ‌تر است، اثرات وشکسانی تنها در لایه‌ای نزدیک دیواره‌ها

و فرض این که میزان شار ورودی به سلول برابر با  $Q$  باشد

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u(r, z) 2\pi r dz,$$

حل کنیم ( $P_0$  فشار جو)، به جواب نهایی برای سرعت و فشار شار در سلول هل-شاو در حالت مستقل از زمان می‌رسیم [۱۵].

$$u_r(r, z) = \frac{3Q}{4\pi rh} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad (۱۲-الف)$$

$$P(r) = P_0 + \frac{\epsilon \eta Q}{\pi h^3} \ln \frac{r_2}{r}. \quad (۱۲-ب)$$

### ۳. نمایه سرعت و فشار در حالت نوسانی

حال می‌توان با این مقدمه به حل نهایی سرعت شار در حالت نوسانی وابسته به زمان در سلول هل-شاو پرداخت. با نوشتن سرعت به صورت  $\vec{u} = u_r(r, z; t) \hat{r}$  در حالت وابسته به زمان، معادلات نوبه-استوکس را بازنویسی می‌کنیم و به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (۱۳)$$

معادله پیوستگی، مانند حالت قبل به متناسب بودن سرعت با  $\frac{1}{r}$  می‌انجامد و بنابراین می‌توان حدس کاملی از شکل تابع سرعت در حالت وابسته به زمان به صورت زیر ارائه داد:

$$u_r(r, z; t) = \frac{F(t)C(z)}{r}, \quad (۱۴)$$

که  $F(t)$  قسمت وابسته به زمان سرعت و  $C(z)$  تابع وابسته به مؤلفه  $z$  است. برای وارد کردن تابع زمانی، حجمی از شار را که به صورت نوسانی در سلول جابه‌جا می‌شود، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(t) = \Delta V \sin \Omega t, \quad (۱۵)$$

که  $\Delta V$  دامنه حجمی از شار است که در هر نوسان جابه‌جا می‌شود. حال می‌توان با تعریف نرخ شار حجمی  $Q$ ، رابطه‌ای کیفی برای سرعت به دست آورد.

$$Q = \frac{dV}{dt} = \Delta V \Omega \cos \Omega t = \int (\vec{u} \cdot \hat{n}) d\vec{s}. \quad (۱۶)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (۴-ب)$$

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left( -\frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right), \quad (۴-ج)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که فشار در سلول تنها وابسته به شعاع است و در راستای عمودی ثابت است. از معادله (۳) با شرط تراکم ناپذیری مایع، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0, \quad (۵)$$

حال اگر از رابطه بالا مشتق بگیریم، به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = \left( -\frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) = 0, \quad (۶)$$

با قرار دادن نتیجه بالا در معادله (۴-ج)، بعد از ساده‌سازی و حذف شدن جمله‌های قرینه به معادله زیر دست می‌یابیم:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right). \quad (۷)$$

با فرض این که در رژیم سرعت‌های پایین یا عدد رینولدز کوچک هستیم، می‌توان طرف اول معادله بالا را تقریباً صفر فرض کرد. در نتیجه:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(r)}{\partial r} = \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_r(r, z)}{\partial z^2} \right), \quad (۸)$$

همچنین از انتگرال معادله (۵) نتیجه می‌شود که وابستگی سرعت به شعاع، به شکل  $\frac{1}{r}$  است و در نتیجه شکل تابع سرعت به این صورت خواهد بود [۱۵]:

$$u_r(r, z) = \frac{C(z)}{r}. \quad (۹)$$

با قرار دادن این رابطه در معادله (۸) و جداسازی متغیرها، به این رابطه می‌رسیم:

$$r \frac{\partial P(r)}{\partial r} = \eta C''(z) = A, \quad (۱۰)$$

که  $A$  مقداری ثابت است.

اگر معادلات بالا را با شرایط مرزی زیر:

$$u_r(r, z) \Big|_{z=-\frac{h}{2}} = u_r(r, z) \Big|_{z=\frac{h}{2}} = 0, \quad (۱۱-الف)$$

$$P(r_2) = P_0, \quad (۱۱-ب)$$

$$i\omega \frac{\partial u_{\omega}^z(z)}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_{\omega}^z(z)}{\partial z^2} = 0, \quad (25)$$

جواب معادله بالا به صورت  $u_{\omega}^z(z) \propto e^{kz}$  است. اگر این جواب را در معادله (۲۵) قرار دهیم، معادله‌ای جبری برای نما حاصل می‌شود:

$$i\omega k + \nu k^2 = 0, \quad (26)$$

جواب‌های  $k$  عبارت‌اند از  $k_1 = 0$  و  $k_2 = -\frac{i\omega}{\nu}$ . از معادله اخیر مشخص است که  $k$  کمیتی مختلط است و می‌توان آن را به صورت  $k = a + ib$  نمایش داد که  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی‌اند.  $k^2$  را بازنویسی می‌کنیم.

$$k^2 = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = \frac{-i\omega}{\nu}. \quad (27)$$

جواب معادله اخیر وقتی معنادار است که  $a^2 = b^2$  باشد، یا به عبارتی  $a = \pm b$  باشد. با این توصیف، جواب‌های محتمل را برای مدهای مثبت و منفی جدا بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} a^2 = \frac{\omega}{2\nu} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, & (a = -b, \omega > 0) \\ a^2 = \frac{-\omega}{2\nu} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{-\omega}{2\nu}}, & (a = b, \omega < 0) \end{cases} \quad (28)$$

حال برای ساده‌سازی بیشتر در محاسبات کمیت زیر را معرفی می‌کنیم:

$$k_{\omega} = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\nu}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}, & (\omega > 0) \\ \sqrt{\frac{-\omega}{2\nu}}, & (\omega < 0) \end{cases} \quad (29)$$

پس در نهایت نماها در دو حالت مدهای مثبت و منفی به این صورت به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} k_{\omega}^+ = k_{\omega}(1-i), & (\omega > 0) \\ k_{\omega}^- = k_{\omega}(i-1), & (\omega > 0) \\ k_{\omega}^+ = k_{\omega}(1+i), & (\omega < 0) \\ k_{\omega}^- = -k_{\omega}(1+i). & (\omega < 0) \end{cases} \quad (30)$$

حال می‌توان با استفاده از رابطه (۳۰) صورت کلی بخش وابسته به  $z$  تابع سرعت را در هر دو بازه بسامدی محاسبه کرد.

پس روابط زیر قابل حصولند:

$$u_{\omega}^z(z) = A_{\omega} e^{k_{\omega}^z(1-i)} + A_{\omega} e^{k_{\omega}^z(i-1)} - A_{\omega}, \quad (31)$$

$$u_{\omega}^z(z) = B_{\omega} e^{k_{\omega}^z(1+i)} + B_{\omega} e^{-k_{\omega}^z(1+i)} - B_{\omega}. \quad (32)$$

در رابطه بالا  $\hat{n}$  و  $d\vec{s}$  به ترتیب بردار عمود بر سطح شماره و عنصر سطح شماره است. بعد از تجزیه عنصر سطح در راستای شعاع به عبارت زیر می‌رسیم:

$$u_r(r, z; t) = \frac{B(z)}{r} \cos \Omega t, \quad (17)$$

که  $B(z)$  جمله‌ای است که وابستگی سرعت به  $z$  را در خود نهفته دارد.

تا اینجا مشخص شد که تابع سرعت دو بخش منفک از هم وابسته به  $r$  و  $z$  و یک بخش وابسته به زمان نوسانی دارد. در مرحله بعد فرض می‌کنیم که اثرات لختی در مقابل اثرات وشکسانی قابل صرف نظر است؛ یعنی رابطه زیر برقرار است:

$$\left| u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right| \ll \left| \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right|. \quad (18)$$

با این شرط، معادله (۱۳) به معادله زیر تقلیل می‌یابد:

$$\frac{\partial u(r, z; t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u(r, z; t)}{\partial z^2}. \quad (19)$$

برای حل این معادله دیفرانسیل، از تبدیل فوریه بهره گرفته و از فضای زمان به فضای مدهای نوسانی (بسامد) می‌رویم. تابع سرعت و تابع فشار را با استفاده از تبدیل فوریه بازنویسی می‌کنیم:

$$u(r, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} u_{\omega}(r, z) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (20)$$

$$P(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} P_{\omega}(r) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (21)$$

که  $u_{\omega}$  و  $P_{\omega}$  تبدیل فوریه توابع سرعت و فشار هستند. روابط بالا را در معادله (۱۹) جایگذاری کرده و به عبارت زیر می‌رسیم:

$$-i\omega u_{\omega}(r, z) = -\frac{\partial P_{\omega}(r)}{\rho \partial r} + \nu \frac{\partial^2 u_{\omega}(r, z)}{\partial z^2}, \quad (22)$$

$$i\omega u_{\omega}(r, z) + \nu \frac{\partial^2 u_{\omega}(r, z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\omega}(r)}{\partial r} = f(r), \quad (23)$$

که  $\nu = \eta / \rho$  و  $f(r)$  تابع دلخواهی از شعاع است. معادله بالا نشان می‌دهد تابع  $u_{\omega}$  تابعی جداشدنی است که به صورت زیر قابل نمایش است:

$$u_{\omega}(r, z) = u_{\omega}^r(r) u_{\omega}^z(z). \quad (24)$$

حال معادله (۲۴) را در معادله (۲۳) قرار داده و از طرفین معادله نسبت به  $z$  مشتق می‌گیریم و به معادله زیر می‌رسیم:

$$\int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u_{\omega}(r_*, z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u(r_*, z; t) e^{i\omega t} dz. \quad (39)$$

رابطه (۳۸) را در رابطه (۳۹) قرارداده، به جواب زیر می‌رسیم:

$$\int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u_{\omega}(r_*, z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta V}{\gamma \pi r_*} \Omega \cos \Omega t e^{i\omega t} dt. \quad (40)$$

از تعریف تابع دلتا داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = \gamma \pi \delta(\omega), \quad (41)$$

بنابراین، با استفاده از تابع دلتا می‌توان رابطه (۴۰) را بازنویسی کرد:

$$\int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u_{\omega}(r_*, z) dz = \frac{\Omega \Delta V}{\gamma r_*} [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)]. \quad (42)$$

با استفاده از برقراری قانون بقای شار در هر سطح مقطع نوعی از شاره، می‌توان از رابطه زیر بهره برد:

$$\int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u_{\omega}(r_*, z) dz = \int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u_{\omega}(r, z) dz. \quad (43)$$

با مقایسه این رابطه با رابطه (۳۸) می‌توان به عبارت زیر رسید:

$$u_{\omega}^r(r) = \frac{\Omega \Delta V}{\gamma r} [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)]. \quad (44)$$

حال، رابطه (۲۰) را شکسته و به دو نیم فضا شامل مدهای مثبت و منفی تبدیل می‌کنیم.

$$u(r, z; t) = \left(\frac{1}{\gamma \pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega}^r(r) u_{\omega-}^z(z) e^{-i\omega t} d\omega \quad (45)$$

$$+ \left(\frac{1}{\gamma \pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega}^r(r) u_{\omega+}^z(z) e^{-i\omega t} d\omega.$$

سپس رابطه (۴۴) را در رابطه بالا جاگذاری می‌کنیم.

$$u(r, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega \Delta V}{\gamma \pi r} u_{\omega-}^z(z) [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] e^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega \Delta V}{\gamma \pi r} u_{\omega+}^z(z) [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)] e^{-i\omega t} d\omega. \quad (46)$$

حال روابط (۳۵) را در رابطه بالا قرار می‌دهیم.

با شرایط مرزی صفر بودن سرعت روی صفحات که در  $z = \pm h/2$  واقع شده‌اند، می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه کرد.

$$u_{\omega}^z(z) \Big|_{z=\frac{h}{\gamma}} = u_{\omega}^z(z) \Big|_{z=-\frac{h}{\gamma}} = 0. \quad (33)$$

بعد از اعمال شرایط اولیه به معادلات زیر می‌رسیم:

$$A_{\gamma} = A_{\gamma} \left[ e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (1-i)} + e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (i-1)} \right], \quad (34-الف)$$

$$A_{\gamma} = A_{\gamma}, \quad (34-ب)$$

$$B_{\gamma} = B_{\gamma} \left[ e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (1+i)} + e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (i+1)} \right], \quad (34-ج)$$

$$B_{\gamma} = B_{\gamma}. \quad (34-د)$$

با استفاده از این ضرایب می‌توان شکل توابع سرعت در فضای نوسان را به صورت زیر نشان داد:

$$u_{\omega+}^z(z) = A_{\gamma} \left[ e^{k_{\omega} z (1-i)} + e^{k_{\omega} z (i-1)} - e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (1-i)} - e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (i-1)} \right], \quad (35-الف)$$

$$u_{\omega-}^z(z) = B_{\gamma} \left[ e^{k_{\omega} z (1+i)} + e^{-k_{\omega} z (i+1)} - e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (1+i)} - e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma} (i+1)} \right]. \quad (35-ب)$$

حال با استفاده از تبدیل فوریه و تبدیل فوریه معکوس، به حل نهایی تابع سرعت برای حالت وابسته به زمان می‌پردازیم. برای یک شعاع دلخواه داریم:

$$u(r_*, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma \pi} u_{\omega}(r_*, z) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (36)$$

$$u_{\omega}(r_*, z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r_*, z; t) e^{i\omega t} dt. \quad (37)$$

برای محاسبه ضرایب مجهول باقی‌مانده، باید از پایستگی شار حجمی استفاده کنیم. با استفاده از این واقعیت که حجم وارد شده به سلول از لوله ورودی باید با حجم خارج شده از مقطع استوانه‌ای به شعاع دلخواه در واحد زمان برابر باشد، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$Q = \Delta V \Omega \cos \Omega t = \int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u(r_*, z; t) \gamma \pi r_* dz \quad (38)$$

حال از رابطه (۳۶) در کل ضخامت سلول انتگرال می‌گیریم.

$$U(z) = \frac{\gamma \pi B(z)}{\Omega k \Omega \Delta V} \quad (52)$$

و برحسب کمیت بی بعد  $k\Omega z$  رسم کنیم، به نمودار شکل ۲ می‌رسیم که برای سه مقدار مختلف  $k\Omega z$  رسم شده است.

برای دیده شدن وابستگی شعاعی سرعت، مقدار سرعت را در  $t=0$  و  $z=0$  که بیشینه مقدار خود را در ارتفاع‌ها و زمان‌های مختلف دارد، در نظر می‌گیریم. سپس آن را با

$$u_0 = \frac{\Delta V \Omega A_1}{\pi r}$$

بی‌بعد شده با شعاع لوله رسم می‌کنیم. نتیجه در شکل ۳ دیده می‌شود.

حال، تابع فشار سیال را از معادله (۲۳) به دست می‌آوریم. با شکستن معادله به مدهای مثبت و منفی، و جاگذاری روابط (۳۵) در آنها، به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\left[ i \omega u_{\omega^+}^z(z) + v \frac{\partial^2 u_{\omega^+}^z(z)}{\partial z^2} \right] u_{\omega}^r(r) = i \omega A_1 \left[ -e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(1-i)} - e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(i-1)} \right] u_{\omega}^r(r), \quad (53-الف)$$

$$\left[ i \omega u_{\omega^-}^z(z) + v \frac{\partial^2 u_{\omega^-}^z(z)}{\partial z^2} \right] u_{\omega}^r(r) = i \omega B_1 \left[ -e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(1+i)} - e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(i+1)} \right] u_{\omega}^r(r), \quad (53-ب)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[ i \omega A_1 \left[ -e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(1-i)} - e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(i-1)} \right] \right]_{/\omega > 0} \\ & \left[ i \omega B_1 \left[ -e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(1+i)} - e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(i+1)} \right] \right]_{/\omega < 0} \end{aligned} \right\} u_{\omega}^r(r) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\omega}(r)}{\partial r}. \quad (53-ج)$$

با توجه به یکی بودن مقدار ثابت‌ها از رابطه (۴۹) و انتگرال‌گیری از معادله آخر و با استفاده از رابطه (۲۱)، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$P_0 - P(r;t) = \int_r^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho A_1 \cos \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \cosh \frac{k_{\Omega} h}{\gamma}}{\pi} \times (-i \omega) u_{\omega}^r(r) e^{-i \omega t} d \omega dr, \quad (54)$$

$$u(r, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega \Delta V}{\gamma \pi r} B_1 \times \left[ e^{k_{\omega} z(1+i)} + e^{-k_{\omega} z(i+1)} - e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(1+i)} - e^{-k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(i+1)} \right] \times \left[ \delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega) \right] e^{-i \omega t} d \omega + \int_0^{\infty} \frac{\Omega \Delta V}{\gamma \pi r} A_1 \times \left[ e^{k_{\omega} z(1-i)} + e^{k_{\omega} z(i-1)} - e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(1-i)} - e^{k_{\omega} \frac{h}{\gamma}(i-1)} \right] \times \left[ \delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega) \right] e^{-i \omega t} d \omega. \quad (47)$$

هنوز دو ضریب مجهول در رابطه بالا باقی مانده است، برای به دست آوردن این دو ضریب مجهول از برابری نرخ شار حجمی در داخل و خارج سلول (درون لوله) بهره می‌بریم.

$$\int_{-\frac{h}{\gamma}}^{\frac{h}{\gamma}} u(r, z; t) \gamma \pi r dz = Q = \Delta V \Omega \cos \Omega t, \quad (48)$$

با استفاده از رابطه بالا ضرایب مجهول به دست می‌آیند.

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{\frac{\cos \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \sinh \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} + \sin \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \cosh \frac{k_{\Omega} h}{\gamma}}{\frac{-\gamma \cos \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \cosh \frac{k_{\Omega} h}{\gamma}}{k_{\Omega}}}. \quad (49)$$

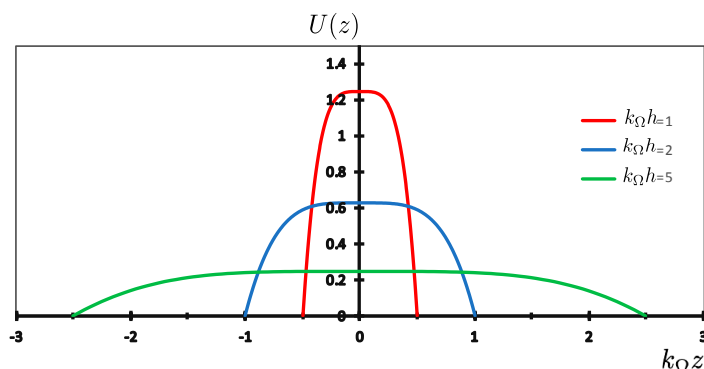
با مشخص شدن ضرایب مجهول، می‌توان تابع سرعت وابسته به زمان را از رابطه (۴۷) محاسبه کرد.

$$u(r, z; t) = \frac{A_1 \Omega \Delta V}{\pi r} \times \left( \cos k_{\Omega} z \cosh k_{\Omega} z - \cos \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \cosh \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \right) \cos \Omega t. \quad (50)$$

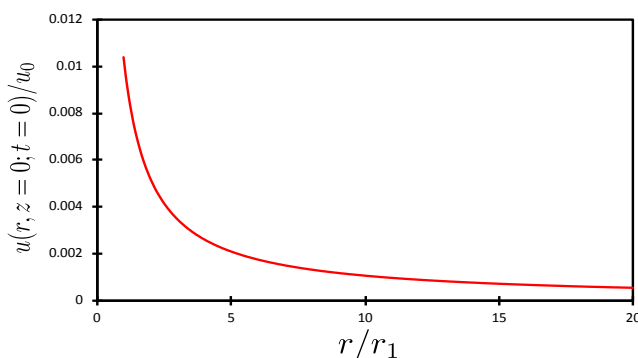
به این ترتیب تابع وابسته به  $z$  تعریف شده در معادله (۱۷) به این صورت است:

$$B(z) = \frac{A_1 \Omega \Delta V}{\pi} \times \left( \cos k_{\Omega} z \cosh k_{\Omega} z - \cos \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \cosh \frac{k_{\Omega} h}{\gamma} \right) \quad (51)$$

اگر این تابع را که متناسب با نمایه سرعت بر حسب ارتفاع در زمان و شعاع ثابت است، به صورت زیر بی‌بعد کنیم:



شکل ۲. نمودار قسمت وابسته به ارتفاع تابع سرعت به صورت بی بعد شده، بر حسب ارتفاع بی بعد شده داخل سلول برای سه ضخامت مختلف سلول.



شکل ۳. نمودار سرعت بی بعد شده بیشینه در ارتفاع و زمان، بر حسب شعاع بی بعد شده داخل سلول برای ضخامت معادل با  $k\Omega h = 1$ .

شده است. از رابطه (۵۵) می توان فشار در شعاع  $r_1$  را با قرار دادن  $r = r_1$  در تابع لگاریتم محاسبه کرد. این مقدار، فشار لازم برای به حرکت در آوردن مایع در سلول و نوسان حجم آن به صورت رابطه (۱۵) است.

#### ۴. نتیجه گیری

میدان سرعت و میدان فشار شارۀ داخل یک سلول هل شایو دایره ای در حالت شارش نوسانی محاسبه شد. اگر حجمی از شارۀ به صورت نوسان سینوسی تک بسامد توسط یک پیستون به داخل سلول پمپ شود، میدان سرعتی شعاعی در سلول ایجاد می کند. سرعت با زمان به صورت کسینوسی تغییر می کند و با فاصله شعاعی از مرکز سلول نسبت عکس دارد. با ارتفاع نسبت به صفحه میانی سلول، سرعت به شکل رابطه (۴۷) تغییر

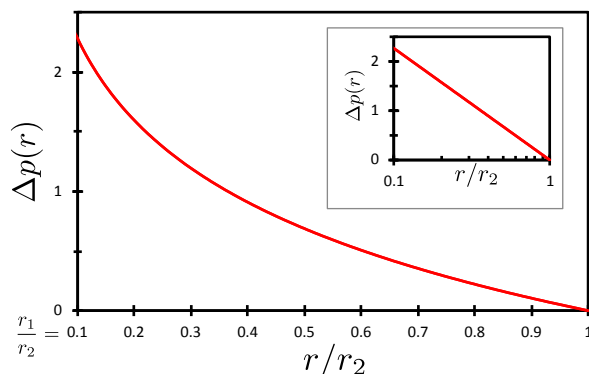
که محاسبه انتگرال ها، ما را به تابع فشار بر حسب شعاع و زمان می رساند:

$$P(r;t) = P_0 + \frac{\rho A_1 \Delta V \Omega^2 \cos \frac{k\Omega h}{2} \cosh \frac{k\Omega h}{2}}{\pi} \times \ln \left( \frac{r_1}{r} \right) \sin \Omega t. \quad (55)$$

همان طور که این معادله نشان می دهد، فشار تابعیت سینوسی با زمان و تابعیت لگاریتمی با شعاع دارد. اگر اختلاف فشار داخل و خارج سلول را به این صورت بی بعد کنیم:

$$\Delta p(r) = \frac{\pi (P(r;t = \pi/2\Omega) - P_0)}{\rho A_1 \Delta V \Omega^2}$$

شده رسم کنیم، نمودار شکل ۴ به دست می آید. با توجه به اینکه کمترین شعاع در مسئله ما  $r = r_1$  است، بیشترین فشار نیز مربوط به همین شعاع است. در شکل ۴ نسبت  $\frac{r_1}{r} = 10$  فرض



شکل ۴. نمودار فشار بی بعد شده بیشینه در زمان، بر حسب شعاع بی بعد شده داخل سلول برای ضخامت معادل با  $k_{\Omega}h = 1$  و  $\frac{r_1}{r_2} = 10$ ، در نمودار داخلی محور افقی لگاریتمی است.

با در نظر نگرفتن گرانش، به ارتفاع وابستگی ندارد. رابطه فشار با شعاع به صورت لگاریتمی است و بستگی آن با زمان به شکل نوسان سینوسی با بسامدی مساوی با بسامد نوسان حجم سیال است.

می کند. این رابطه و نمودارهای حاصل از آن در شکل ۲ نشان می دهند که سرعت بر روی دو صفحه صفر و در صفحه میانی یا ارتفاع صفر بیشینه است. همچنین در نواحی اطراف این صفحه سرعت با ارتفاع تقریباً ثابت می ماند. میدان فشار نیز محاسبه شد و نشان داده شد که فشار فقط تابع شعاع است و

## مراجع

1. H S Hele-Shaw, *Nature* **58** (1898) 520.
2. P G Saffman, *J. Fluid Mech.* **173** (1986) 73.
3. P G Saffman and G I Taylor, *Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci.* **245** (1958) 312.
4. S Whitaker, *Transp. Porous Media* **1** (1986) 3.
5. S Mochizuki and W J Yang, *J. Fluid Mech.* **154** (1985) 377.
6. D Nehari, V Armenio and F Ballio, *J. Fluid Mech.* **520** (2004) 157.
7. P Anagnostopoulos and R Minear, *Appl. Ocean Res.* **26** (2004) 147.
8. M F Wybrow, B Yan, and N Riley, *Fluid Dyn. Res.* **18** (1996) 269.
9. M Ozgoren, *Flow Meas. Instrum.* **17** (2006) 225.
10. P C H Aben, P R Bloemen, and J C H Zeegers, *Exp. Fluids* **46** (2009) 631.
11. R Moosavi, M Maleki, M R Shaebani, J C Ruiz-Suárez, and E Clément, *EPL (Europhys. Lett.)* **107** (2014) 34006.
12. A Y Wee and A Gorin, *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* **78** (2015) 012021.
13. G H Vatistas, *AIAA J.* **26** (1988) 887.
14. G H Vatistas, *AIAA J.* **28** (1990) 1308.
15. R T Yen, Radial flow between two parallel discs (1965) (krex.k-state.edu).
16. H L Ma and C H Kuo, *Phys. Fluids* **29** (2017) 053602.