



## رسانندگی هال ناهنجار ذاتی نوار دیراک در حضور میدان مغناطیسی عمود

هدیه یاراحمدی و رضا سپهری نیا\*

۱. دانشکده فیزیک، دانشگاه تهران، تهران

پست الکترونیکی: sepehrinia@ut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۵/۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۸/۴)

### چکیده

سهم ذاتی رسانندگی هال ناهنجار را در حضور میدان مغناطیسی عمود مطالعه کرده‌ایم. رویکرد نیمه کلاسیک برای محاسبه رسانندگی در حضور فاز بری غیر بدیهی مورد استفاده قرار گرفته است. این روش مبتنی بر معادلات حرکت نیمه کلاسیک با تصحیح سرعت ناهنجار و معادله ترابرد بولتزمن است. فرمول‌بندی رسانندگی هال ناهنجار را در این رویکرد معرفی می‌کنیم. برای سیستم دو بعدی که با هامیلتونی دیراک توصیف می‌شود محاسبه صریح انجام می‌دهیم. در حد میدان مغناطیسی صفر، نتایج ما بر نتایج قبلی که هم به روش نیمه کلاسیک و هم از فرمول کوبو به دست آمده منطبق است. در حد میدان مغناطیسی قوی رسانندگی هال به صورت توانی با میدان کاهش می‌یابد. نمای مربوط به رفتار توانی برای نوار انرژی نامحدود  $\frac{1}{3}$  و برای نوار انرژی محدود ابتدا  $\frac{1}{3}$  و سپس به ۱ تغییر می‌کند.

واژه‌های کلیدی: رسانندگی هال ناهنجار ذاتی، فاز بری، میدان مغناطیسی، رویکرد نیمه کلاسیک

### ۱. مقدمه

الکترونی از ناخالصی‌ها [۴ و ۵] و ساز و کار ذاتی که ناشی از انحنا بری موجود در ساختار نواری الکترونی است [۶ و ۷]. امروزه مشخص شده است که هر یک از این ساز و کارها نقش متفاوتی در مواد مختلف دارد. ارتباط اثر ذاتی با مفهوم فاز بری و در نتیجه دارا بودن ماهیت توپولوژیک باعث شده است که کشف موادی چون گرافین و عایق‌های توپولوژیک، که می‌توانند فاز بری غیر بدیهی داشته باشند، توجه زیادی را برای مطالعه این اثر در این مواد جلب کند. در این تحقیق به مطالعه سهم ذاتی در حضور

پس از کشف اثر هال عادی، ادوین هال در سال ۱۸۸۱ مشاهده کرد که در مواد فرومغناطیس این اثر چند برابر بزرگ‌تر است [۱] که اثر هال ناهنجار نام گرفته است. مطالعات بیشتر نشان داد که این اثر رابطه مستقیم با مغناطش در مواد فرومغناطیس دارد [۲ و ۳]. ساز و کار پیدایش اثر هال ناهنجار مدت‌ها مورد بحث بوده است. دو ساز و کار اصلی در ایجاد این اثر شناخته شده است. ساز و کار خارجی که ناشی از پراکندگی‌های

$$\begin{aligned} J &= -e \int \dot{r} f \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\ &= -e \int \frac{1}{\hbar} \nabla_k \varepsilon_n \delta f \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} + e \int \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) f_{eq} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

در اینجا جمله اول، چگالی جریان عادی و جمله دوم که عمود بر میدان الکتریکی است سهم ذاتی اثر هال است. با جایگذاری در معادله (۱) از معادله (۲) و با استفاده از  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_c \hat{z}$  خواهیم داشت:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar(1 + e\Omega_c B / \hbar)} (\nabla_k \varepsilon_n + e\mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})). \quad (4)$$

چگالی جریان هال ذاتی برابر با

$$\mathbf{J} = -e \int \frac{e\mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})}{\hbar(1 + e\Omega_c B / \hbar)} f_{eq} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \quad (5)$$

است و با استفاده از  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ، رسانندگی به دست می‌آید:

$$\sigma_{AH}^{int} = \frac{e^2}{h} \int \frac{\Omega_c}{1 + e\Omega_c B / \hbar} f_{eq} \frac{d^3 k}{2\pi}. \quad (6)$$

در حد میدان مغناطیسی صفر، این معادله ساده می‌شود و به نتیجه استاندارد می‌رسد [۱۱، ۱۴ و ۱۵].

$$\sigma_{AH}^{int} = c \frac{e^2}{h}, \quad (7)$$

که در آن  $c$  برای نوار پر، یک عدد صحیح موسوم به عدد چرن است. با استفاده از فرمول رسانندگی به دست آمده و استفاده از ملاحظات تقارنی می‌توان در شرایط خاص مقدار رسانندگی را پیش بینی کرد. می‌توان نشان داد که در حضور تقارن وارونی زمان داریم  $\boldsymbol{\Omega}(-\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$  و در حضور تقارن وارونی فضایی  $\boldsymbol{\Omega}(-\mathbf{k}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$ ؛ بنابراین اگر این دو تقارن همزمان وجود داشته باشند انحنا بری و در نتیجه رسانندگی هال صفر می‌شود. غالباً بلورها این دو تقارن را دارند در نتیجه جمله سرعت ناهنجار از معادله سرعت حذف می‌شود. اگر سیستم، تقارن وارونی زمانی داشته باشد ولی وارونی فضایی نداشته باشد انحنا در حالت کلی صفر نیست؛ اما انتگرال آن در منطقه اول بریلوئن صفر می‌شود. در مواد فرومغناطیس تقارن وارونی زمانی شکسته می‌شود بنابراین انتظار داریم سهم رسانندگی ذاتی هال، مقدار غیر صفر داشته باشد.

#### ۴. هامیلتونی دیراک

هامیلتونی مؤثر الکترون‌ها در گرافین در نزدیکی نقاط دیراک

میدان مغناطیسی عمود بر صفحه در این دسته از مواد می‌پردازیم. رویکرد ما در این کار، استفاده از روش نیمه کلاسیک برای محاسبه رسانندگی هال است [۸-۱۲] که در آن پتانسیل شبکه به صورت کوانتومی و دینامیک الکترون تحت اثر میدان‌های خارجی به صورت کلاسیکی در نظر گرفته می‌شود.

#### ۲. روش نیمه کلاسیک

چنان که اشاره کردیم در روش نیمه کلاسیک، پتانسیل متناوب شبکه به صورت کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه توابع موج بلوخ و ساختار نواری الکترونی  $\varepsilon_n(\mathbf{k})$  را داریم که در آن  $n$  شاخص نوار است. با اعمال میدان‌های خارجی و با استفاده از نگرش بسته موج، معادلات حرکت الکترون در فضای مکان و تکانه به صورت زیر به دست می‌آیند [۸-۱۱ و ۱۳]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_k \varepsilon_n - \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}), \quad (1)$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

در اینجا  $e$  بار الکترون،  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{B}$  میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی اعمال شده به جامد هستند و  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$  انحنا بری است که در ادامه معرفی خواهیم کرد. جمله دوم در معادله اول سرعت ناهنجار نامیده می‌شود و خواهیم دید که سهم ذاتی جریان هال را ایجاد می‌کند.

محدوده اعتبار این روش عموماً میدان‌های ضعیف برای اجتناب از شکست الکتریکی و مغناطیسی است [۱۳]. در اینجا میدان الکتریکی را به دلخواه کوچک در نظر می‌گیریم، اما چون اثر میدان مغناطیسی محدود را مطالعه خواهیم کرد در ادامه به این نکته باز می‌گردیم.

#### ۳. رسانندگی

در حالت تعادل، تابع توزیع  $f_{eq}$  در فضای شبه تکانه به گونه‌ای است که جریان الکترونی خالص صفر است. با اعمال میدان‌های خارجی، اولاً تابع توزیع از حالت تعادلی انحراف پیدا می‌کند،  $f = f_{eq} + \delta f$ ، و دوماً جمله سرعت ناهنجار به وجود می‌آید. با توجه به رابطه سرعت که در بالا آمده است، دو جمله درجه اول بر حسب میدان الکتریکی خواهیم داشت:

شبيه به هاميلتونی دیراک است [۱۶]:

$$H = \hbar v \sigma \cdot \mathbf{k} + M \sigma_z, \quad (8)$$

که در آن  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$  ماتریس‌های پائولی متناظر با درجه آزادی شبه اسپین،  $\mathbf{k}$  بردار شبه تکانه و  $v$  سرعت فرمی است. جمله دوم ناشی از شکست تقارن زیرشبکه در گرافین است و مانند جرم در معادله نسبیتی دیراک است. مشابه این هامیلتونی در سطح عایق‌های توپولوژیک نیز مشاهده می‌شود [۱۷-۱۹]. اگر ماتریس‌های پائولی نشانگر اسپین واقعی باشند جمله جرم به معنی مغناطش خواهد بود که باعث شکستن تقارن و ارونی زمان خواهد شد. در نتیجه این هامیلتونی شرط مورد نیاز برای وقوع اثر هال ناهنجار را دارد. توجه کنید که میدان مغناطیسی را در هامیلتونی وارد نکرده‌ایم و اثر آن در طیف انرژی و توابع موج (ترازهای لانداو) در نظر گرفته نشده است. همچنین در این مدل به دلیل عدم وجود همپوشانی نوارهای انرژی، شکست مغناطیسی اتفاق نمی‌افتد.

## ۵. انحناي بَرِي و رسانندگی هال

در این بخش انحناي بَرِي و رسانندگی هال را برای هامیلتونی فوق محاسبه می‌کنیم. در اینجا از نمایش زیر برای محاسبه انحنا استفاده می‌کنیم

$$\Omega_n(\mathbf{k}) = i \sum_{m \neq n} \frac{\langle u_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} H | u_m(\mathbf{k}) \rangle \times \langle u_m(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} H | u_n(\mathbf{k}) \rangle}{(E_m - E_n)^2}, \quad (9)$$

که در آن  $|u_n\rangle$  قسمت متناوب ویژه تابع هامیلتونی در نوار  $n$ ام است. دو ویژه‌حالت هامیلتونی دیراک با ویژه‌مقادیر

$$\varepsilon_{\pm} = \pm \sqrt{M^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2}$$

$$|u_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M(M - \sqrt{M^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2}}} \begin{pmatrix} M - \sqrt{M^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2} \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix},$$

$$|u_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M(M + \sqrt{M^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2}}} \begin{pmatrix} M + \sqrt{M^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2} \\ \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 e^{-i\varphi_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

که در آن  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar v k$  و  $\varphi_{\mathbf{k}} = \tan^{-1}\left(\frac{k_y}{k_x}\right)$  است.  $|u_{-}\rangle$  ویژه

حالت با انرژی منفی و  $|u_{+}\rangle$  ویژه‌حالت با انرژی مثبت است. حالتی را در نظر می‌گیریم که انرژی فرمی در داخل گاف قرار دارد. در این حالت تنها نوار با انرژی منفی، پر و نوار با انرژی مثبت، خالی است. بنابراین انحناي بَرِي را برای نوار ظرفیت به دست می‌آوریم:

$$(\Omega_{-})_z = \frac{\hbar^2 v^2 M}{2(M^2 + \varepsilon_{\mathbf{k}}^2)^{3/2}}, \quad (11)$$

و رسانندگی هال ناشی از آن عبارت است از:

$$\sigma_{AH}^{int} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{v^2 x^{1/2}} \left( \pi \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \arctan[(1-2x^{-1/2})/\sqrt{3}] + 2 \log(1+x^{1/2}) - \log(1-x^{1/2} + x^{1/2}) \right), \quad (12)$$

که در آن  $x = \frac{e\hbar B v^2}{2M^2}$  و بی بعد است. توجه کنید با وجود این که فقط نوار پر داریم، رسانندگی غیر صفر است؛ چون سرعت ناهنجار، برخلاف سرعت عادی، نسبت به شبه تکانه فرد نیست و حتی با توزیع متقارن در فضای شبه تکانه، جریان هال می‌تواند غیر صفر باشد. در حد میدان مغناطیسی صفر ( $x \rightarrow 0$ ) می‌توان دید که حد رابطه فوق به مقدار

$$\sigma_{AH}^{int} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{h}, \quad (13)$$

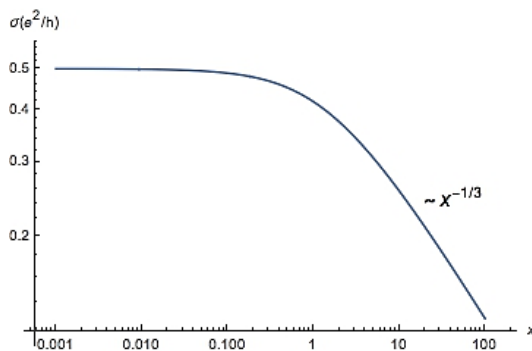
می‌رسد که همان نتیجه‌ای است که قبلاً با رویکرد نیمه کلاسیک و صورت‌مندی کوبو به دست آمده است [۱۴ و ۱۵]. در حد میدان قوی ( $x \gg 1$ )

$$\sigma_{AH}^{int} \approx \frac{e^2}{h} \frac{\pi}{3\sqrt{3}x^{1/2}}, \quad (14)$$

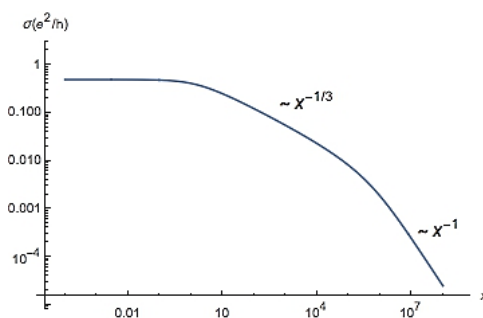
که در اینجا رفتار برحسب میدان، به شکل توانی است ولی بر خلاف اثر هال عادی با توان  $\frac{1}{3}$  است. در شکل ۱ این رفتار نشان داده شده است.

در یک کریستال، انتگرال در فضای شبه تکانه محدود به منطقه بریلوئن است. برای بررسی اثر آن، به عنوان یک مدل ساده، حدود انتگرال را به  $|k| < k_0$  محدود می‌کنیم. در این حالت رابطه رسانندگی عبارت است از:

$$\sigma_{AH}^{int} = \left( -2\sqrt{3} \arctan[(1-2x^{-1/2})/\sqrt{3}] + 2\sqrt{3} \arctan[(1-2x^{-1/2})/\sqrt{3}] \right)$$



شکل ۱. رسانندگی هال بر حسب میدان مغناطیسی برای  $q_0$  نامحدود.



شکل ۲. رسانندگی هال بر حسب میدان مغناطیسی برای  $q_0 = 100$ .

۲ این تغییر رفتار نشان داده شده است.

برای تخمین مرتبه بزرگی میدان مغناطیسی، گاف انرژی را از مرتبه میلی الکترون ولت و  $q_0 = 100$  در نظر می‌گیریم. در این صورت رفتار توانی با نمای  $\frac{1}{3}$  در بازه تقریبی  $5 \times 10^{-4}$  تا ۵ تسلا قابل مشاهده خواهد بود. رفتار توانی با نمای ۱ در میدان‌های قوی‌تر قابل مشاهده است اما در این محدوده، اثرات کوانتومی (ترازهای لانداو) می‌تواند نتیجه را تغییر دهد. در نتیجه برای مشاهده نمای ۱ باید  $q_0$  کوچک باشد که در  $k_0$  کوچک (ثابت شبکه بزرگ) و یا گاف انرژی بزرگ امکان‌پذیر است.

### ۶. نتیجه‌گیری

اثر میدان مغناطیسی عمود بر رسانندگی هال ناهنجار ذاتی را مطالعه کردیم. برای سیستم دو بعدی که با هامیلتونی دیراک توصیف می‌شود و انحنای بری غیر صفر دارد رسانندگی را به طور صریح محاسبه کردیم. به طور کلی میدان مغناطیسی باعث

$$\begin{aligned} & +2 \log(1+x^{1/3}) - 2 \log(\sqrt{1+q_0^2} + x^{1/3}) \\ & - \log(1-x^{1/3} + x^{1/3}) + \log(1+q_0^2 - \sqrt{1+q_0^2} x^{1/3} + x^{1/3}) \\ & \times \frac{e^2}{12hx^{1/3}}, \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن  $q_0 = \frac{hvk_0}{M}$  و بی بعد است. عبارت فوق در حد میدان صفر به مقدار

$$\sigma_{AH}^{int} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{h} (1 - (1+q_0^2)^{-1/2}), \quad (16)$$

میل می‌کند. در میدان مغناطیسی قوی، دو رژیم قابل مشاهده است: اگر  $q_0^3 \ll x \ll 1$  باشد همان رفتار توانی

$$\sigma_{AH}^{int} \approx \frac{e^2}{h} \frac{\pi}{3\sqrt{3}x^{1/3}}, \quad (17)$$

را خواهیم داشت و اگر  $x \gg q_0^3$  باشد رفتار توانی

$$\sigma_{AH}^{int} \approx \frac{e^2}{h} \frac{q_0^2}{4x}, \quad (18)$$

را مشاهده می‌کنیم که نما از  $\frac{1}{3}$  به ۱ تغییر یافته است. در شکل

ابتدا به صورت  $B^{-1/3}$  و از حدی به بعد به  $B^{-1}$  تغییر می‌کند. قابل توجه است که در اثر هال عادی رسانندگی هال در حد میدان مغناطیسی قوی به شکل  $B^{-1}$  رفتار می‌کند. رفتار متفاوت در اثر هال ناهنجار ناشی از تصحیح در سرعت است و بستگی به تابعیت انحنا بری دارد.

تضعیف جریان هال می‌شود. نتیجه به دست آمده برای رسانندگی، در حد میدان صفر به نتایج شناخته شده قبلی می‌رسد و در حد میدان قوی به شکل توانی کاهش می‌یابد. برای نوار نامحدود، رفتار توانی به صورت  $B^{-1/3}$  است و برای نوار محدود، دو رژیم توانی با نمای متفاوت مشاهده می‌کنیم که

## مراجع

1. E H Hall, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **12**, 74 (1881) 157.
2. E M Pugh, *Physical Review* **36**, 9 (1930) 1503.
3. E Pugh and T Lippert, *Physical Review* **42**, 5 (1932) 709.
4. J Smit, *Physica*, **24**, 1-5 (1958) 39.
5. L Berger, *Physical Review B* **2**, 11 (1970) 4559.
6. R Karplus and J Luttinger, *Physical Review* **95**, 5 (1954) 1154.
7. J Luttinger, *Physical Review* **112**, 3 (1958) 739.
8. M C Chang and Q Niu, *Physical Review B* **53**, 11 (1996) 7010.
9. M C Chang and Q Niu, *Physical Review Letters* **75**, 7 (1995) 1348.
10. G Sundaram and Q Niu, *Physical Review B* **59**, 23 (1999) 14915.
11. D Xiao, M C Chang, and Q Niu, *Reviews of modern physics* **82**, 3 (2010) 1959.
12. H Jebeli, *et al.*, *IJPR* **13** (1392) 51.
13. N W Ashcroft and N D Mermin, "*Solid state physics*", New York: Saunders College Publishing (1976).
14. N Nagaosa, *et al.*, *Reviews of modern physics* **82**, 2 (2010) 1539.
15. I Ado, *et al.*, *EPL (Europhysics Letters)* **111**, 3 (2015) 37004.
16. A C Neto, *et al.* *Reviews of modern physics* **81**, 1 (2009) 109.
17. S Q Shen, W Y Shan, and H Z Lu, *Spin* **1**, 1 (2011) 33.
18. A N Zarezad and J Abouie, *Physical Review B* **98**, 15 (2018) 155413.
19. A N Zarezad and J Abouie, *Physical Review B* **101**, 11 (2020) 115412.