یادداشت پژوهشی

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۳۷۹

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

فضا زمان‌های در حال تحول با فشار شعاعی خالص

بهرام نصر اصفهانی*

بخش فیزیک، دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله: ۷۸/۱۰/۲۸ دریافت نسخه نهایی: ۷۹/۵/۲)

چکیده

جوابهای متقارن کروی و وابسته به زمان معادلات اینشتین در یک پس زمینه ناهمسانگرد که فقط تنش شعاعی دارد ارایه شده‌اند. این جوابها سه دسته‌اند. دستهٔ اول شامل یک فضازمان باز است که کرمچاله‌ای می‌تواند در مرکز آن وجود داشته باشد. دستهٔ دوم شامل یک فضازمان مخروطی است. دستهٔ سوم نیز یک فضازمان بسته است. این جوابها به طور مجانبی به فضازمانهای روبرتسون - واکر در دوران غلبهٔ ماده تبدیل می‌شوند. نشان داده شده است که برای جواب کرمچاله‌ای، مادهٔ مورد نظر به طور کلی شرایط انرژی را برآورده می‌سازد. همچنین جوابهای ایستا مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی: نسبیت عام، تانسور تنش - انرژی، کرمچاله، شرایط انرژی

۱. مقدمه

ارتباط میان ساختار هندسی هر فضازمان و توزیع ماده و انرژی توسط معادلهٔ اینشتین

$$G = -8\pi G T \qquad (1)$$

داده می‌شود. که در آن $\mathbf{G}$ تانسور اینشتین و $\mathbf{T}$ تانسور تنش - انرژی است. چنانکه در نسبیت عام مرسوم است هر دستگاه خاص با تانسور تنش - انرژی $\mathbf{T}$ را می‌توان یک شاره در نظر گرفت. شاره‌ای تعمیم یافته که خواص آن الزاما شبیه خواص یک شارهٔ کلاسیکی نیست. گرچه معادلهٔ (۱) به شکلی مستقل از چارچوب نوشته شده است اما برای حل آن لازم است به چارچوب مشخصی رجوع شود. مناسبترین چارچوب در این بحث، چارچوب هم حرکت است که در آن حرکتهای کپه‌ای شاره حذف می‌شوند و فقط حرکتهای کاتوره‌ای باقی می‌مانند [1].

در اینجا، فضازمانهای متقارن کروی (همسانگرد) که متریک کلی آنها را به شکل زیر برمی‌گزینیم

$$ds^2 = -dt^2 + R(t)^2 \left\{ [1+a(r)]dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right\} \qquad (2)$$

مورد نظر ماست. چنین شکلی برای مقایسه با مدل استاندارد کیهانشناختی مناسب است. در اینجا تابع $R(t)$ شکل تحول زمانی، و $a(r)$ هندسهٔ زیرفضاهای سه‌بعدی را مشخص می‌کند. این متریک در یک چارچوب هم حرکت با پایه‌های $(e_t, e_r, e_\theta, e_\phi)$ نوشته شده است.

محاسبات ما بسیار ساده‌تر خواهند شد هرگاه به چارچوب هم حرکت ویژه با پایه‌های

$$e_{\hat{t}} = e_t \qquad e_{\hat{\theta}} = \frac{e_\theta}{rR}$$

$$e_{\hat{r}} = \frac{e_r}{R\sqrt{1+a}} \qquad e_{\hat{\phi}} = \frac{e_\phi}{rR\sin\theta}$$

*- نشانی فعلی: گروه فیزیک، دانشگاه کاشان

رجوع کنیم. می‌توان نشان داد [۲] که در این چارچوب متریک (۲) می‌شود

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + d\hat{r}^2 + d\hat{\theta}^2 + d\hat{\phi}^2$$

به علاوه، مؤلفه‌های غیرصفر تانسور اینشتین می‌شوند

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = -\frac{3\dot{R}^2}{R^2} - \frac{ra' + a + a^2}{r^2R^2(1+a)}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{a}{r^2R^2(1+a)}$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{a'}{2rR^2(1+a)^2}$$

$$G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$$

که در آن، نقطه مشتق زمانی و پریم مشتق شعاعی را نشان می‌دهند. در این چارچوب **G** قطری است پس **T** هم باید قطری باشد.

جوابهای معادلهٔ (۱) به نوع شاره بستگی دارند. در اینجا شاره‌ای را با

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathrm{diag}(\rho, -\tau, p, p)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن ρ چگالی جرم - انرژی و τ تنش (عکس فشار) در جهت $e_{\hat{r}}$ و p فشار در جهت $e_{\hat{\theta}}$ ($e_{\hat{\phi}}$) است. توجه کنید که $T_{\hat{t}\hat{r}} = T_{\hat{t}\hat{\theta}} = T_{\hat{t}\hat{\phi}} = 0$. این به آن معنی است که شارش انرژی (رسانش گرمایی) برای شارهٔ مورد نظر در این چارچوب صفر است. همچنین، قطری بودن $T_{\hat{i}\hat{j}}$ به آن معنی است که شارش تکانه بین عناصر شاره فقط در راستای عمود بر سطوح بین عناصر انجام می‌گیرد و تنش لایه‌ای وجود ندارد. در این وضعیت، ممکن است بخواهیم نتیجه بگیریم که این شاره ناوشکسان است. اما از آنجا که این شاره ناهمسانگرد است (یعنی $-\tau \neq p$)، چرخش مختصات می‌تواند عناصر غیرقطری را ایجاد کند که در این صورت وشکسانی مشاهده می‌شود. پس شارهٔ ناهمسانگرد و شکسان است. تنها اگر شاره همسانگرد باشد آنگاه $T_{\hat{i}\hat{j}}$ در همهٔ چارچوبهای هم حرکت واقع بر یک عنصر شاره قطری می‌ماند و شاره ناوشکسان است [۲].

برای شارهٔ ناهمسانگرد، فشار، چگالی یا سرعت به طرز محسوسی در فاصله‌هایی از مرتبهٔ یک مسافت آزاد میانگین یا در زمانهایی از مرتبهٔ یک زمان آزاد میانگین، یا هر دو، تغییر می‌کنند. در چنین شاره‌ای انرژی جنبشی به صورت گرما تلف می‌شود. به نظر می‌رسد چنین شاره‌هایی در جهان آغازین وجود داشته‌اند و خاصیت وشکسانی آنها نقش مهمی را در تشکیل ناهمگنیهای موضعی در جهان آغازین بازی کرده است که درنهایت به تشکیل کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی منجر شده‌اند [۳].

به عنوان یک انتخاب ویژه، شاره را همسانگرد در نظر می‌گیریم با

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p)$$

که براساس بحث قبلی، رسانش گرمایی و وشکسانی برای آن وجود ندارد. چنین شاره‌ای را کامل گویند. اگر قرار دهیم $p=0$ آنگاه یک غبار خواهیم داشت. در این حالت جوابها عبارتند از فضازمانهای فریدمان - روبرتسون - واکر در دوران غلبهٔ ماده (دوران فعلی) [۳]. یا اگر شرط بی‌رد بودن

$$T^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\mu}} = 3p - \rho = 0$$

را اعمال کنیم یک شاره کامل تابشی خواهیم داشت. در این حالت جوابها عبارتند از فضازماهای فریدمان - روبرتسون - واکر در دوران غلبهٔ تابش [۲]. در دو مورد اخیر، زیرفضاهای سه‌بعدی جوابها علاوه بر همسانگرد بودن همگن نیز هستند که این نتیجه‌ای است از هماسنگرد بودن شاره.

به عنوان انتخابی دیگر، یک شارهٔ ناهمسانگرد تابشی را در نظر می‌گیریم. بنابراین باید

$$T^{\hat{\mu}}{}_{\hat{\mu}} = 2p - \rho - \tau = 0$$

در این حالت سه دسته جواب برای معادلات اینشتین وجود دارد که می‌توانند هندسهٔ کرمچاله‌ای داشته باشند و به طور مجانبی به فضازمانهای فریدمان - روبرتسون - واکر در دوران غلبهٔ تابش نزدیک می‌شوند [۲]. در اینجا زیرفضاهای سه‌بعدی جوابها همگن نیستند و فقط همسانگردند.

آنچه در این مقاله مورد نظر است شاره‌ای است به طور کامل ناهمسانگرد با

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \mathrm{diag}\,(\rho, -\tau, 0, 0) \qquad (3)$$

که در آن تنش فقط در راستای $e_{\hat{r}}$ وجود دارد. به عبارت دیگر، شارش تکانه در بین عناصر شاره فقط در یک جهت انجام می‌گیرد. البته چنین رفتاری فقط در چارچوب انتخابی ما مشاهده می‌شود و چرخش مختصات می‌تواند دیگر عناصر

قطری و همین طور عناصر غیرقطری را ایجاد کند. از این رو، داشتن تنش شعاعی خالص نمی‌تواند یک خاصیت فیزیکی باشد. از نظر فیزیکی، ما با نوعی شارهٔ ناکامل (وشکسان) رو به رو هستیم و حدس زده‌ایم که می‌توانیم چارچوب هم حرکتی بیابیم که در آن تانسور تنش - انرژی شاره به شکل (۳) نوشته می‌شود.

در اینجا می‌خواهیم جوابهای همسانگرد معادلات اینشتین را با تانسور تنش - انرژی (۳) به دست آوریم. این مثالی است برای اینکه نشان دهیم چگونه ناهمسانگردی شاره منجر به ناهمگنی جوابها می‌شود. انتظار داریم این مدل به طور مجانبی به مدل استاندارد نزدیک شود و از این رو، بتواند برای تفسیر برخی از ناهمگنیهای موضعی مورد استفاده قرار گیرد.

۲. حل معادلات میدان

اکنون معادلات اینشتین

$$G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -8\pi G T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$$

با تانسور تنش - انرژی (۳)، می‌شوند

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{ra'+a+a^2}{R^2 r^2 (1+a)^2} = 8\pi G\rho \qquad (۴)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{a}{R^2 r^2 (1+a)} = 8\pi G\tau \qquad (۵)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{a'}{2rR^2 (1+a)^2} = 0 \qquad (۶)$$

معادلهٔ آخر به آسانی جدا می‌شود. داریم

$$2R\ddot{R} + \dot{R}^2 = \alpha \qquad (۷)$$

و

$$\frac{a'}{2r(1+a)^2} = -\alpha \qquad (۸)$$

که در اینجا α ثابت جداسازی است. این معادلات جوابهای دقیقی دارند که رفتار آنها بستگی به علامت α دارد. از این رو، سه دسته جواب وجود دارند.

۱.۲. حالت $\alpha > 0$

در این حالت معادلهٔ (۷) دارای یک جواب پارامتری به شکل زیر است

$$R(\Psi) = R_0(\cosh\Psi - 1) \qquad (۹)$$

که در آن Ψ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\sinh\Psi - \Psi = \frac{\sqrt{\alpha}}{R_0} t \qquad (۱۰)$$

و R_0 یک ثابت است. همچنین جواب معادلهٔ (۸) به شکل زیر به دست می‌آید

$$a(r) = \frac{1}{\alpha r^2 + b} - 1 \qquad (۱۱)$$

که در آن b یک ثابت انتگرالگیری است. در این صورت، جواب معادلات اینشتین چنین است

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{\alpha r^2 + b} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \qquad (۱۲)$$

بررسی معادله‌های (۹) و (۱۰) نشان می‌دهد که $R(t)$ از یک مقدار صفر در $t=0$ رشد می‌کند و بدون حد زیاد می‌شود. در نتیجه، متریک (۱۲) فضازمانی را وصف می‌کند که شعاع آن همواره در حال افزایش است.

اکنون شکل کلی فضازمانهای کرمچاله‌ای را در نظر می‌گیریم [۴]

$$ds^2 = -e^{-2\Phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{B(r)}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \qquad (۱۳)$$

که در آن $\Phi(r)$ تابع جابه‌جایی به سرخ و $B(r)$ تابع شکل نامیده می‌شود. تابع شکل باید شرط $B(r) \leq r$ را برآورده سازد. معادلهٔ $B(r)=r$ مکان گلوگاه کرمچاله را مشخص می‌کند که در واقع کمینه یا کران پایین مختصهٔ r است. واضح است که در گلوگاه، g_{rr} تکین است.

اگر متریک (۱۲) در زمان t_1 که در آن قرار می‌دهیم $R(t_1)=1$ را با متریک (۱۳) مقایسه کنیم، نتیجه می‌شود $\Phi(r)=0$ و

$$B(r) = r - \alpha r\left(r^2 - r_0^2\right)$$

که در آن $r_0 = \sqrt{\frac{-b}{\alpha}}$ است. دیده می‌شود که به ازای $r \geq r_0$ داریم $B(r) \leq r$. بنابراین ادعا می‌کنیم که کرمچاله‌ای در حال انبساط با شعاع گلوگاه r_0 در مرکز وجود دارد (مشروط بر اینکه $b<0$). به علاوه، چون $\Phi(r)$ همه جا محدود است کرمچالهٔ مورد نظر افق ندارد و عبور دوطرفه از آن برای نور و ذرات مادی امکان‌پذیر

است. از آنجا که $\lim_{r\to\infty} B(r)/r \neq 0$ این کرمچاله به طور مجانبی تخت نیست، ولی چون r از بالا کراندار نیست فضازمان مورد نظر باز است.

۲.۲. حالت $\alpha=0$

در این حالت جوابهای معادلات (۷) و (۸) به آسانی چنین به دست می‌آیند

$$R(t) = At^{\frac{2}{3}} \tag{۱۴}$$

و

$$a = a_0 = \frac{1}{b} - 1 \tag{۱۵}$$

که در اینجا A و a_0 ثابتهای انتگرالگیری هستند. با جایگذاری در متریک (۲) داریم

$$ds^2 = -dt^2 + A^2 t^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{b} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{۱۶}$$

که دوباره یک فضازمان باز با شعاع همیشه در حال افزایش را نشان می‌دهد. نمودار غوطه‌وری برای این متریک عبارت است از رویه‌ای با معادله $z(r)=\pm Br$ که یک رویهٔ مخروطی است [۲]. شکل (۱) این رویه را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان متریک (۱۶) را یک فضازمان مخروطی در حال تحول نامید.

۳.۲. حالت $\alpha<0$

در این حالت معادلهٔ (۷) جوابی پارامتری به شکل زیر دارد

$$R(\Theta) = R_0 (1 - \cos\Theta) \tag{۱۷}$$

که در آن Θ از معادلهٔ زیر به دست می‌آید

$$\Theta - \sin\Theta = \frac{\sqrt{\beta}}{R_0} t \tag{۱۸}$$

و $\beta=-\alpha>0$ جواب معادلهٔ (۸) نیز چنین به دست می‌آید

$$a(r) = \frac{1}{b - \beta r^2} - 1 \tag{۱۹}$$

بررسی معادلات (۱۷) و (۱۸) نشان می‌دهد که $R(t)$ از صفر در $t=0$ رشد می‌کند، به یک مقدار بیشینه می‌رسد و در زمان $t = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{\beta}}$ به صفر باز می‌گردد. این روند می‌تواند با دورهٔ معینی تکرار شود.

از طرفی، معادلهٔ (۱۹) نتیجه می‌دهد

$$g_{rr} = \frac{1}{b - \beta r^2}$$

مقایسه با متریک کرمچاله‌ای (۱۳) و به کار بردن مطالب بعد از آن نتیجه می‌دهد که در این حالت r از بالا کراندار است. از این رو، کرمچاله‌ای وجود ندارد و فضازمان بسته است.

۳. مقایسه با مدل استاندارد کیهانشناختی

وابستگی زمانی جوابهایی که در بخش ۲ در حالتهای $\alpha>0$، $\alpha=0$ و $\alpha<0$ به دست آمدند، به ترتیب با وابستگی زمانی متریکهای فریدمان - روبرتسون - واکر در حالتهای $k=-1$، $k=0$ و $k=+1$، در دوران غلبهٔ ماده یکسان است. اما، فوق سطحهای t- ثابت آنها یکسان نیستند و ساختار هندسی متفاوتی دارند. به ویژه، در متریک فریدمان - روبرتسون - واکر این فوق سطحها دارای تقارن بیشینه‌اند، یعنی همگن و همسانگردند [۳] در حالی که، فوق سطحهای به دست آمده در بحث ما فقط همسانگردند.

بررسی نشان می‌دهد که پارامتر b عامل تفاوت یاد شده است. تنها اگر قرار دهیم $b=1$ تفاوت از بین می‌رود. به طوری که معادلهٔ (۲۱) نتیجه می‌دهد $\tau=0$ و معادله (۲۰) نتیجه می‌دهد که چگالی جرم - انرژی ρ فقط تابعی از زمان است.

جالب توجه است که در حد rهای بزرگ نیز تفاوت یاد شده برداشته می‌شود و مدل مورد نظر ما به مدل استاندارد کیهانشناختی در دوران غلبهٔ ماده نزدیک می‌شود. این نتیجه بدان معنی است که مدل مورد بحث ما می‌تواند در مورد ناهمگنیهای موضعی که مدل استاندارد آنها را پیش‌بینی نمی‌کند به کار رود.

۴. شرایط انرژی

پس از یافتن $R(t)$ و $a(r)$ می‌توانیم آنها را در معادلات (۴) و (۵) قرار دهیم و مؤلفه‌های تانسور تنش - انرژی را به دست آوریم. پس از انجام محاسبات لازم، نتایج برای هر سه حالت α چنین به دست می‌آیند

$$\rho(r,t) = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{1-b}{r^2 R^2} - \frac{6\ddot{R}}{R}\right) \tag{۲۰}$$

و

$$\tau(r,t) = \frac{1}{8\pi G} \frac{1-b}{r^2 R^2} \tag{۲۱}$$

روشن است که ρ و τ هر دو در $t=0$ تکین هستند. در حالت $\alpha>0$ تکینگیهای دیگری نیز در انتهای هر دوره وجود دارند.

از آنجا که در حالت $\alpha<0$ جواب به دست آمده می‌تواند هندسهٔ کرمچاله‌ای داشته باشد، مناسب است که در این حالت شرایط انرژی را برای مولفه‌های تانسور تنش - انرژی امتحان کنیم.

یکی از مسایلی که از دیرباز در مورد کرمچاله‌ها به عنوان جوابهای معادلات اینشتین مطرح بوده است، مساله نقض شرایط انرژی توسط ماده‌ای است که آنها را ایجاد کرده است [۴-۸]. برای مادهٔ نقض‌کنندهٔ شرایط انرژی داریم $\tau>\rho$ و می‌توان اثبات کرد ناظرهایی وجود دارند که ρ را منفی اندازه می‌گیرند [۲]. از این رو، این یک مادهٔ غیرمتعارف است. میدانهای کوانتومی می‌توانند نقض کنندهٔ شرایط انرژی باشند و بنابراین به وجود آمدن کرمچاله‌ها در لحظه‌های آغازین جهان ممکن بوده است. اما، اخیرا نشان داده شده است که فقط برای کرمچاله‌های ایستا ماده به‌کلی نقض‌کنندهٔ شرایط انرژی است در حالی که برای کرمچاله‌های در حال تحول (اما غیرتورمی)، ماده می‌تواند به طور کلی یا در بازه‌های زمانی معینی شرایط انرژی را برآورده سازد [۲، ۵ و ۶]. این مطلب احتمال وجود کرمچاله‌ها را در دوره‌های بعدی جهان افزایش می‌دهد.

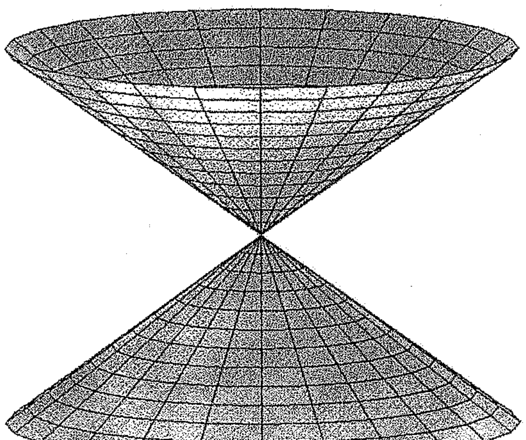
اکنون کمیت $(\tau-\rho)$ را با استفاده از معادلات (۲۰) و (۲۱) حساب می‌کنیم. داریم

$$\tau-\rho=\frac{3}{4\pi G}\frac{\ddot{R}}{R}$$

بررسی نشان می‌دهد که $\ddot{R}$ همواره منفی است. از این رو، $\rho>\tau$. بعلاوه، چون فرض کرده‌ایم $b>0$، از معادلهٔ (۲۰) معلوم است که در چارچوب فعلی داریم $\rho>0$ بدیهی است که تحت این شرایط مادهٔ مورد نظر به طور کلی نقض کنندهٔ شرایط انرژی نیست و یک مادهٔ متعارف است که این تاییدی است بر مطلبی که در بند آخر به آن اشاره شد.

۵. جواب ایستا

به منظور یافتن جواب ایستای اینشتین که توسط تانسور تنش -



شکل ۱. نمودار غوطه‌وری برای متریکهای (۱۶) و (۲۲).

انرژی (۳) ایجاد می‌شوند، کافی است تابع $R(t)$ را در متریک (۲) حذف کنیم. اکنون تنها یک تابع مجهول $a(r)$ وجود دارد. با ادامه دادن روش بخش ۲ نتیجه می‌شود که این تابع در معادلهٔ $da/dr=0$ صدق می‌کند. بنابرانی، جواب ایستا چنین خواهد بود

$$ds^2=-dt^2+(1+a_0)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (۲۲)$$

که در آن a_0 یک ثابت است. مقایسه با متریک (۱۶) نشان می‌دهد که متریک (۲۲) باید یک فضازمان مخروطی ایستا را وصف کند. نمودار غوطه‌وری برای متریک (۲۲) در شکل ۱ نشان داده شده است. ژئودزیکهای چنین فضازمانی محاسبه شده‌اند [۹].

مؤلفه‌های تانسور تنش - انرژی به طور مستقیم، یا با حذف R در معادلات (۲۰) و (۲۱) و استفاده از معادلهٔ (۱۵)، چنین به دست می‌آیند

$$\rho(r)=\tau(r)=\frac{1}{8\pi G}\frac{a_0}{(1+a_0)r^2} \qquad (۲۳)$$

در اینجا داریم $\rho=\tau$ و این یک شرط بحرانی است برای اینکه ماده‌ای شرایط انرژی را برآورده سازد [۲].

مراجع

1. B F Schutz, *A First Course in General Relativity, Cambridge University Press,* (1989).

2. B Nasre Esfahani, *Ph.D. Thesis,* Shiraz University, (1999).

3. S Weinberg, *Gravitation and Cosmology,* John Wiley, (1972).
4. M S Morris, K S Thorne, *Am. J. Phys.* **56**, 395 (1988).
5. S Kar, *Phys. Rev.* **D49**, 862 (1994).
6. S W Kim, *Phys. Rev.* **D53**, 6889 (1996).
7. T A Romman, *Phys. Rev.* **D47**, 1370 (1993).
8. B E Taylor, W A Hiscock, P R Anderson, *Phys. Rev.* **D55**, 6116 (1977).
۹. ب. نصر اصفهانی، مجلهٔ فیزیک، ۱۳۷۷، ۱۶، ۴، ص ۱۷۱.