

## ساختار خوشه‌های پرکولاسیون تهاجمی در دو بعد

زهرة دادی گیو، محمود خاک سفیدی، فاطمه ابراهیمی

گروه فیزیک، دانشگاه بیرجند  
پست الکترونیکی: febrahimi@birjand.ac.ir

(دریافت مقاله: ۸۶/۲/۱۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۶/۹/۱۸)

### چکیده

با انجام شبیه‌سازیهای مفصل عددی، بُعد فرکتالی جرم و نیز میزان ناهمسانگردی در شکل خوشه گسترش یافته در نمونه در فرآیندهای پرکولاسیون تهاجمی جایگاهی دو بعدی محاسبه شده‌اند. نتایج به دست آمده در مورد بُعد فرکتالی جرم که در توافق با آخرین نتایج اعلام شده هستند، نشان می‌دهند که دو فرآیند پرکولاسیون تهاجمی با و بدون قانون به دام اندازی به دو دسته متفاوت از نظر خاصیت جهانشمولی تعلق دارند. همچنین برای اولین بار میزان ناهمسانگردی در خوشه گسترش یافته در نمونه محاسبه شده است. مشاهده می‌شود که علی‌رغم همسانگردی محیط، خوشه‌های حاصل از فرآیند پرکولاسیون تهاجمی همسانگرد نیستند. میزان ناهمسانگردی برای خوشه‌های فرآیند پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی بیشتر است. به علاوه، تفاوت‌های این دو نوع فرآیند بر اساس تابع توزیع اندازه حفره‌های اشغال شده بررسی شده‌اند.

**واژه‌های کلیدی:** پرکولاسیون تهاجمی، خوشه گسترش یافته در نمونه، محیط‌های متخلخل بی‌نظم، فرکتال، ناهمسانگردی، جهانشمولی

### ۱. مقدمه

متخلخل بی‌نظم باشد. در واقع انگیزه ابداع این روش، یافتن مدل مناسبی برای توصیف چگونگی تحول زمانی فصل مشترک یک شماره (مدافع) هنگام جابه‌جا شدن توسط شماره دیگر (مهاجم) در محیط متخلخل و در حضور نیروهای موینگی بود. محیط متخلخل را به صورت شبکه‌ای از حفره‌ها که توسط گلوله‌های باریک‌تری به هم وصل شده‌اند در نظر بگیرید که از ابتدا توسط یک شماره که ما آن را مدافع می‌نامیم پر شده باشد. شماره دیگری که مهاجم نامیده می‌شود با یک نرخ بسیار آهسته از یک ناحیه مرزی دلخواه به محیط تزریق می‌شود. در شرایطی که عدد موینگی کوچک باشد، یعنی زمانی که نیروهای چسبندگی در مقایسه با نیروهای موینگی قابل صرف نظر باشند، پیشروی مهاجم را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از پرشهای ناپیوسته سطح مشترک در نظر گرفت. در هر لحظه

پرکولاسیون تهاجمی<sup>۱</sup> شکل متفاوتی از پرکولاسیون استاندارد است که در آن ساز و کار رشد خوشه گسترش یافته در نمونه<sup>۲</sup> از طریق پیشروی سطح خوشه از میان مسیره‌های با کمترین مقاومت تعیین می‌شود [۱-۳]. مقاومت در مقابل "اشغال" را می‌توان به صورت کاملاً تصادفی و یا از یک توزیع آماری دلخواه انتخاب کرد و به جایگاهها یا پیوندهای یک شبکه با توپولوژی و ابعاد دلخواه نسبت داد. در مقایسه با پرکولاسیون استاندارد، پرکولاسیون تهاجمی یک فرآیند دینامیک است [۴] که یافتن نتیجه آن مستلزم یافتن مرز خوشه در هر لحظه از زمان است. به این دلیل، این مدل می‌تواند مدل مناسب‌تری برای پیش‌بینی جابه‌جایی شماره‌ها در محیط‌های

۱. Invasion Percolation

۲. Sample Spanning Cluster

محدودیت پیشروی کند، یعنی تراکم پذیری مدافع بی نهایت باشد، ما با پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی سروکار داریم.

همانند پرکولاسیون استاندارد، رسیدن سطح مشترک به مرزهای آزاد محیط حکایت از یک گذار فاز مرتبه دوم دارد. اما بر خلاف پرکولاسیون استاندارد که در آن علاوه بر خوشه اصلی پرکوله کننده، تعداد زیادی خوشه های متناهی با اندازه های متفاوت در محیط وجود دارد [۶]، در پرکولاسیون تهاجمی به دلیل اعمال شرط پیوسته بودن خوشه مهاجم، تنها یک خوشه از این شاره در محیط حضور دارد. در زمان رسوخ، یعنی زمانی که برای اولین بار شاره مهاجم به مرزهای آزاد محیط می رسد، این خوشه، خوشه گسترش یافته در محیط نامیده می شود.

بررسی خواص مقیاس بندی خوشه گسترش یافته در محیط، موضوع پژوهشهای متعددی بوده است. برای اولین بار، ویلکینسون و ویلمسن متوجه تغییر بعد فرکتالی جرم،  $\alpha$ ، به دلیل اعمال قانون به دام اندازی در فرآیند پرکولاسیون تهاجمی شدند [۲]. اما از آنجا که اندازه شبکه های مورد استفاده آنها حداکثر  $L=100$  بود، مقادیر به دست آمده برای  $\alpha$  توسط آنها دقت زیادی نداشت. امروزه، استفاده از ماشینهای پر سرعت که گنجایش حافظه زیادی دارند و نیز، طراحی الگوریتمهای سریعتر، امکان شبیه سازی فرآیند را بر روی شبکه های بسیار بزرگتری فراهم کرده است. طبق آخرین نتایج مطرح شده [۸] در پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی مقدار  $\alpha$  برابر  $1/8959$  و مستقل از شبکه به کار رفته است. وقتی که قانون به دام اندازی اعمال می شود، این مقدار به نوع شبکه بستگی دارد. برای شبکه های مربعی مقدار به دست آمده برابر است با  $1/825(4)$  (اعداد داخل پرانتز نشان دهنده میزان خطا در رقم آخر هستند).

در این تحقیق ما به بررسی جرم و شکل خوشه های گسترش یافته در نمونه در فرآیندهای پرکولاسیون تهاجمی دو بعدی می پردازیم. ابتدا در بخش دوم روش شبیه سازی فرآیند توضیح داده خواهد شد. سپس در بخش سوم به بررسی نتایج

از زمان، مکان پرش بعدی را شرط کمترین مقاومت موینگی در فرآیند آبکشی<sup>۱</sup> و یا بزرگترین نیروی پیشران موینگی در فرآیند آبگیری<sup>۲</sup> تعیین می کند. به این صورت که در فرآیند آبگیری که شاره مهاجم ترکنندگی بیشتری دارد، پیشروی شاره مهاجم در محیط به صورت خود به خودی و بنا بر این از طریق مکانهایی است که بزرگترین نیروی پیشران موینگی را دارند. فشار موینگی با شعاع نسبت وارون دارد و بنابر این در فرآیند آبگیری حفره های کوچکتر سریعتر اشغال می شوند و حفره های بزرگتر در لیست انتظار در مکانهای پایین تری قرار می گیرند. گلوگاهها به دلیل آن که شعاع کوچکتری دارند سریعاً و بدون قید و شرط اشغال می شوند. بنابراین فرآیند آبگیری فرآیند پرکولاسیون تهاجمی جایگاهی است. برعکس هنگامی که شاره مهاجم ترکنندگی کمتری دارد، این گلوگاهها هستند که مسیر حرکت مهاجم را مشخص می کنند، زیرا حفره ها که شعاع بزرگتر و در نتیجه مقاومت کمتری دارند سریعاً اشغال می شوند. از این منظر فرآیند آبکشی را با پرکولاسیون تهاجمی پیوندی می توان مقایسه کرد [۵].

پیشروی شاره مهاجم در محیط می تواند منجر به، به دام افتادن برخی نواحی از شاره مدافع شود. به این معنا که نواحی از شاره مدافع توسط قسمتی از سطح شاره مهاجم کاملاً احاطه شده و ارتباط آنها با بقیه نواحی شاره مدافع و به خصوص ناحیه ای که به مرزهای آزاد محیط ارتباط دارند، قطع شود. در اکثر کاربردهای عملی (مثلاً در صنعت نفت که در آن با تزریق آب نمک به صخره، نفت جابه جا می شود) معمولاً شاره مدافع تراکم پذیری ناچیزی دارد، در چنین موقعیتی سطح مشترک نمی تواند در محدوده یک تله (دام) پیشروی کند و به عبارت دیگر به محض تشکیل شدن یک دام، تمام حفره ها یا گلوگاههای موجود در آن از لیست انتظار خارج می شوند. به این فرآیند، پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی یا پرکولاسیون تهاجمی با حذف تله ها گفته می شود. اما اگر فرض شود که شاره مدافع در محدوده تله ها نیز می تواند بدون

۳. Drainage

۴. Imbibition

آن  $N$  تعداد عناصر لیست در هر لحظه از زمان است. برای اعمال قانون به دام اندازی لازم است که مناطق به دام افتاده از لیست خارج شوند. برای یافتن تله‌ها ما از الگوریتم هوشن-کوپلمن [۷] استفاده کرده‌ایم که برای یافتن خوشه‌ها در پرکولاسیون معمولی طراحی شده است. اجرای الگوریتم نام‌برده در حالت کلی بسیار وقت‌گیر است، لذا ما تدابیر مختلفی برای کاهش زمان محاسبات به کار برده‌ایم. به عنوان مثال قبل از اجرای این الگوریتم بررسی می‌شود که آیا پیشروی سطح به مکان جدید علی‌الاصول می‌تواند باعث تشکیل تله شود یا خیر. واضح است که اگر جواب منفی باشد نیازی به استفاده از الگوریتم گفته شده در آن مرحله خاص نیست. همچنین چون ایجاد تله‌ها یک پدیده جایگزیده است، دامنه جستجو با این الگوریتم مرحله به مرحله افزایش می‌یابد تا آنجا که تله‌هایی که احتمالاً تشکیل شده‌اند، پیدا شوند. این تدبیر نیز باعث کاهش مؤثر زمان شبیه‌سازی می‌شود. با این حال مجموعاً شبیه‌سازی پرکولاسیون تهاجمی با و بدون قانون به دام اندازی کاری وقت‌گیر است. در شکل ۱ نمونه‌ای از شکل خوشه گسترده شده در یک نمونه برای دو حالت پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی و پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام‌اندازی آمده است.

### ۳. نتایج

#### الف) بعد فرکتالی خوشه اصلی

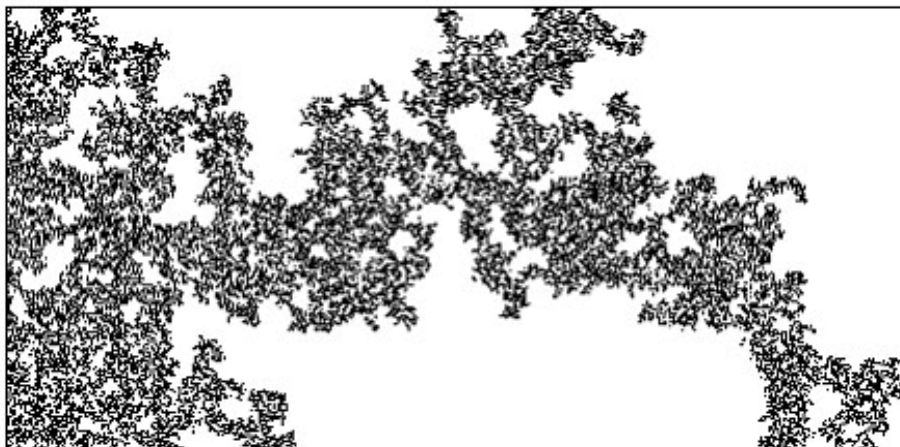
در حالت کلی جرم خوشه گسترده شده در نمونه (خوشه اصلی) حول یک میانگین  $M(L)$  توزیع شده است (شکل ۲). در شکل ۳ نمودار لگاریتم جرم متوسط خوشه گسترش یافته در نمونه در فرآیند پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی در سه شبکه مختلف مربعی، مثلثی و لانه زنبوری نمایش داده شده است. خطای محاسبه میانگین جرم خوشه متناسب با تعداد نمونه‌های مورد استفاده کاهش می‌یابد. در محاسبات ما تعداد ده هزار نمونه برای  $L=50$ ، پنج هزار نمونه برای  $L=100$ ، و تعداد سه هزار نمونه برای هر کدام از مقادیر بزرگتر  $L$  استفاده شده است. در نتیجه، خطا در تخمین لگاریتم میانگین جرم

حاصل خواهیم پرداخت. اگرچه امکانات محاسباتی ما در حدی است که حداکثر طول شبکه مورد استفاده  $L=500$  است، با این حال همان گونه که در ادامه خواهیم دید، دقت محاسبه  $\alpha$  در محاسبات ما در حدی است که بتوان در مورد تفاوت‌های مقادیری که این کمیت در شرایط مختلف به خود می‌گیرد، قاطعانه داوری کرد. مطالعه توزیع اندازه حفره‌های اشغال شده نیز نشانگر وجود تفاوت‌های ساختاری دیگری بین دو نوع فرآیند پرکولاسیون تهاجمی است. در آخر، شکل خوشه گسترش یافته در نمونه از طریق محاسبه ویژه مقادیر تانسور ماند آن برای نخستین بار بررسی خواهد شد.

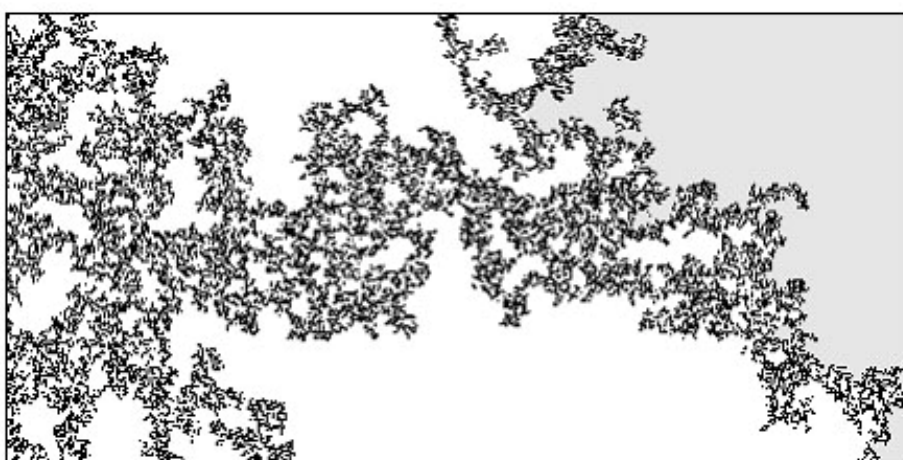
### ۲. روش شبیه‌سازی

شبکه‌ای منظم از جایگاهها به ابعاد  $L \times 2L$  را در نظر بگیرد. مقاومت  $r$  هر جایگاه از یک توزیع کاملاً تصادفی در بازه  $[0, 1]$  انتخاب می‌شود. شاره مهاجم از یک لبه شبکه مثلاً لبه سمت چپ وارد محیط شده و از لبه مقابل در سمت راست که همان مرز آزاد محیط است، خارج می‌شود. به علاوه فرض می‌شود لبه‌های بالا و پایینی ناتراوا هستند. برای بررسی خواص هندسی خوشه اصلی بخش میانی شبکه به ابعاد  $L \times L$  را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دلیل این امر آن است که با دور شدن از لبه‌ها، اثرات مرزی تا حد امکان حذف شوند.

در هر گام زمانی لیستی از جایگاههای اشغال نشده که در همسایگی اول سطح مشترک دو شاره قرار دارند تهیه می‌شود. بالاترین عنصر لیست، جایگاهی است که در مرحله بعد اشغال می‌شود. این لیست باید به ترتیب صعودی از بالا به پایین مرتب شده باشد. در لحظه اولیه عناصر آن عبارتند از ردیف اول سمت چپ محیط، جایی که مهاجم به آن وارد می‌شود. طول این لیست در هر گام افزایش می‌یابد تا آنجا که به دلیل وقوع پرکولاسیون جانبی خوشه بین دو مرز بالایی و پایینی محیط طول آن به بیشینه می‌رسد. از آن پس، طول لیست کاهش می‌یابد. برای کاهش زمان محاسبات ما از الگوریتم جستجوی دودویی برای مرتب کردن لیست استفاده کرده‌ایم. این کار زمان لازم برای جستجو را به صورت  $N \ln N$  کاهش می‌دهد که در

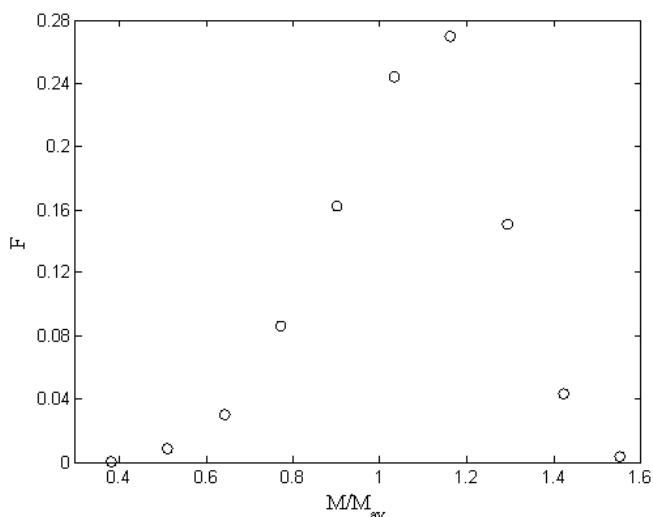


الف) پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی.

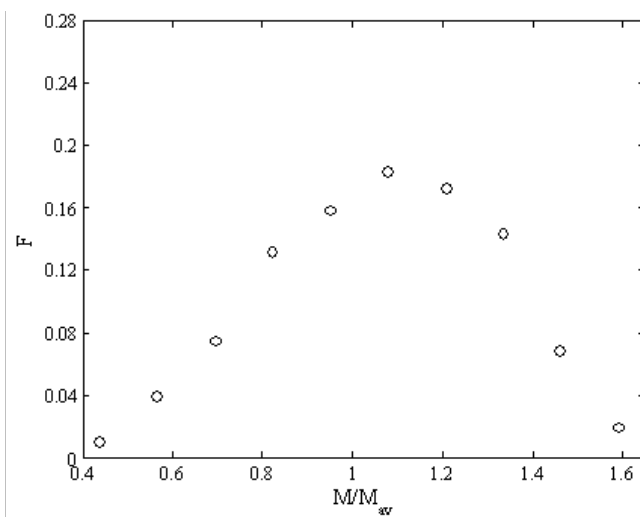


ب) پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی.

شکل ۱. نمونه‌ای از شکل خوشه گسترده شده در یک نمونه.



ب



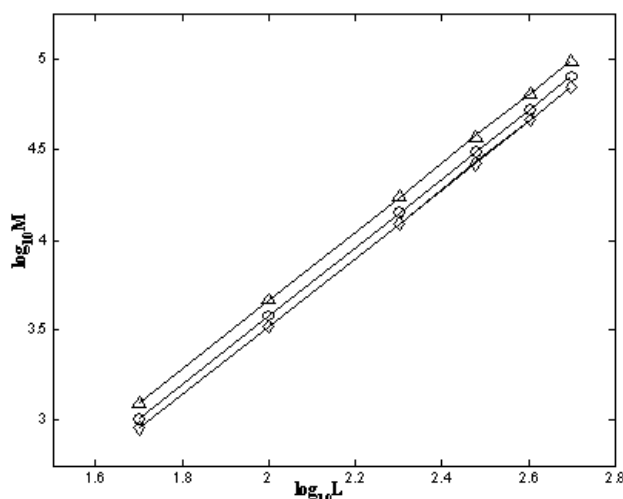
الف

شکل ۲. نمودار فراوانی نسبی جرم خوشه گسترده شده در نمونه. الف) پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی ب) پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی.

حاکی از آن است که بعد فراکتالی خوشه گسترده شده در نمونه،  $\alpha = 1.82 \pm 0.02$  است. بنابراین پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی و پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی در دو کلاس متفاوت از جهت خاصیت جهانشمولی قرار می‌گیرند.

### ب) آمار جایگاههای اشغال شده

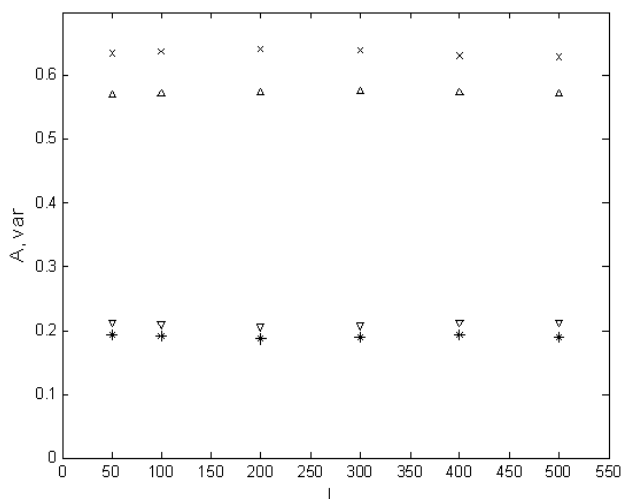
در پرکولاسیون استاندارد تمام جایگاههایی که مقاومت آنها کمتر از یک مقدار از پیش تعیین شده هستند پر و بقیه خالی هستند. در آستانه پرکولاسیون این مقدار برابر  $p_c$  است که اندازه آن به نوع شبکه بستگی دارد. در پرکولاسیون تهاجمی مقدار از قبل تعیین شده‌ای برای مقاومت حفره‌های اشغال شده وجود ندارد، با این حال انتظار می‌رود [۲] که تمام اعداد کوچک در خوشه اصلی پذیرفته شده و تمام اعداد بزرگ از آن حذف شده باشند. یک روش مناسب برای بررسی کمی‌تر، مطالعه توزیع آماری اعداد مربوط به جایگاههای اشغال شده است. برای این منظور چگالی احتمال  $p(r)$  مربوط به احتمال اشغال حفره‌ای با عدد  $r$  را رسم کرده‌ایم. روشن است که  $p(r)dr$  احتمال آن است که عددی در فاصله  $[r, r+dr]$  در خوشه اصلی پذیرفته شده باشد. همان گونه که در شکل ۴ می‌بینیم این کمیت با افزایش  $L$  به سمت یک تابع پله‌ای میل می‌کند. مکان پله در  $L$ ‌های بسیار بزرگ در  $r = 0.6$  اتفاق می‌افتد که همان  $p_c$  برای پرکولاسیون استاندارد در شبکه مربعی است [۶]. نتایج شبیه سازی روی شبکه‌های لانه زنبوری و مثلثی نیز رفتار مشابهی را برای  $p(r)$  نشان می‌دهد. در این دو مورد نیز محل پله در  $L$ ‌های بسیار بزرگ در آستانه پرکولاسیون این شبکه‌ها (۰/۵ برای مثلثی و ۰/۷ برای لانه زنبوری) اتفاق می‌افتد. به علاوه در تمام این موارد یک ناحیه گذار حول  $p_c$  وجود دارد که با افزایش  $L$  عرض آن کوچکتر و کوچکتر می‌شود تا آنجا که برای  $L$ ‌های بسیار بزرگ به سمت صفر میل می‌کند (نمای بحرانی مربوط به این ناحیه نمای طول همدوسی است [۹ و ۱۰]) اما در پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی وضع به گونه دیگری است (شکل ۵). به دلیل



شکل ۳. نمودار لگاریتمی جرم متوسط خوشه گسترش یافته در نمونه. (□): شبکه مربعی؛ (▽): شبکه مثلثی؛ (◊): شبکه لانه زنبوری.

هیچگاه بزرگتر از ۰/۰۰۲ نبوده است. اما در تخمین نهایی  $\alpha$ ، عامل دیگری نیز وجود دارد و آن جمله موسوم به تصحیح در مقیاس بندی است که از محدود بودن اندازه شبکه‌های مورد استفاده ناشی می‌شود [۶]. برای کم کردن اثر این عامل می‌بایست از شبکه‌هایی با اندازه‌های بزرگ استفاده کرد. استفاده از شبکه‌هایی به بزرگی  $L = 500$  باعث شده است که در محاسبات انجام شده در این تحقیق مقدار مطلق خطا در تخمین بعد فرکتالی جرم حداکثر  $|\delta\alpha| \leq 0.02$  باشد.

به این ترتیب، ضریب نمودار برای شبکه مربعی و مثلثی برابر  $\alpha = 1.89 \pm 0.02$ ، و برای شبکه لانه زنبوری  $\alpha = 1.88 \pm 0.02$  محاسبه شده است که در محدوده خطای محاسبات با هم برابر هستند. این نتیجه که با نتایج دیگران [۸] نیز در توافق است حکایت از عام بودن پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی دارد. بنابراین جرم متوسط در آستانه رسوخ به صورت  $M(L) \propto L^\alpha$  است، یعنی چگالی حجمی خوشه اصلی با افزایش طول شبکه به صورت  $L^{-1}$  کاهش می‌یابد. در حالت پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی به دلیل به دام افتادن بخش قابل ملاحظه‌ای از شاره مدافع، جرم M در مقایسه با حالت پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی کمتر است (شکل ۲ ب). محاسبات ما برای شبکه مربعی

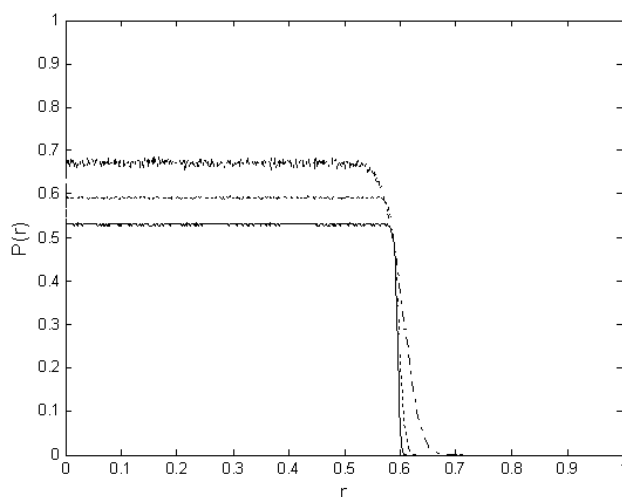


شکل ۶.  $\Delta$ ) ناهمسانگردی (A) و  $\nabla$ ) واریانس (var) برای حالت پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی و  $x$ ) ناهمسانگردی و  $x$ ) واریانس برای حالت پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی بر حسب طول شبکه.

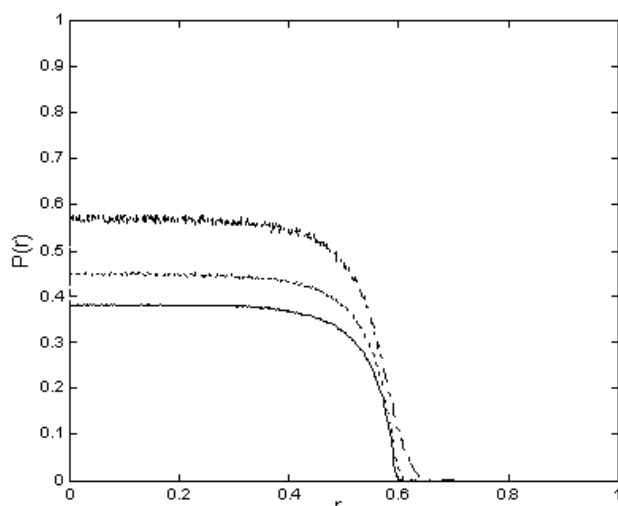
$$I = \sum_{k=1}^M (x_k^i - \bar{x}_k) \overrightarrow{x_k}$$

محاسبه می شود، که در آن  $\bar{x}_k$  جا به جایی جایگاه  $i$ -ام تا مرکز خوشه است. نسبت ویژه مقدار کوچکتر به ویژه مقدار بزرگتر،  $A$ ، ناهمسانگردی خوشه را تعیین می کند. به این ترتیب که هر چه این کمیت از یک کوچکتر باشد، خوشه ناهمسانگردتر است. در شکل (۶) مقادیر  $A$  برای  $L$  های مختلف در دو حالت پرکولاسیون تهاجمی با و بدون قانون به دام اندازی آمده است. مشاهده می شود که برای پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی  $A$  مستقل از طول شبکه بوده و برابر  $0/64$  است. برای پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی مقدار  $A$  در حدود  $0/57$  است. وابسته نبودن  $A$  به طول شبکه به دلیل آن است که در محدوده مورد مطالعه، جرم خوشه آنقدر بزرگ است که جمله معروف به تصحیح در مقیاس بندی [۶] ناچیز می شود و در واقع مقدار به دست آمده برای ناهمسانگردی خوشه، همان مقدار جانبی آن برای حالتی است که جرم به بی نهایت میل می کند.

بزرگ بودن واریانس، حاکی از پهن بودن توزیع مقدار ناهمسانگردی حول میانگین است. اما نکته بسیار جالب تر آن



شکل ۴. نمودار پذیرش برای شبکه مربعی در پرکولاسیون تهاجمی بدون قانون به دام اندازی.  $L=500$  (-);  $L=200$  (..);  $L=50$  (-).



شکل ۵. نمودار پذیرش برای شبکه مربعی در پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی.  $L=500$  (-);  $L=200$  (..);  $L=50$  (-).

قانون به دام اندازی حتی در  $L$  های بسیار بزرگ نیز  $p(r)$  به مانند یک تابع پله ای تیز رفتار نمی کند. اگر چه در اینجا نیز مقدار آستانه پرکولاسیون مرز طبیعی بین اعداد پذیرفته شده در خوشه و بقیه اعداد است.

### ج) توزیع ناهمسانگردی خوشه اصلی

خاصیت جالب دیگر فرکتالهای تصادفی میزان ناهمسانگردی در شکل هندسی آنهاست. این کمیت از ویژه مقادیر تانسور ماند [۱۱]:

خوشه‌های پرکولاسیون دو بعدی که با نتایج دیگران در توافق است، نشانگر آن است که پرکولاسیون تهاجمی بدون و با قانون به دام اندازی به دو دسته متفاوت از نظر خاصیت جهانشمولی بستگی دارند. به دست آمدن دو مقدار متفاوت برای میزان ناهمسانگردی خوشه گسترش یافته در نمونه نیز تأیید دیگری بر این موضوع است.

### قدردانی

از پروفیسور محمد سهمی استاد دانشگاه کالیفرنیا جنوبی به خاطر راهنمایی‌های سودمند ایشان سپاسگزاریم.

7. J Hoshen and R Kopelman, *Phys. Rev. B* **14** (1976) 3428.
8. M A Knakstedt, M Sahimi, A P Sheppard, *Phys. Rev. E* **65** (2002)035101( R ).
9. M M Dias , D Wilkinson , *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** (1986) 3131.
۱۰. ز. دادی گیو، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند (۱۳۸۵).
۱۱. ک. ر. سایمون، مکانیک، ترجمه: ا. نیرومندراد، غ. ح. همدانی، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف (۱۳۷۷) ۳۲۶.
12. F Family and T Vicsek , *Phys. Lett.* **55** (1985) 641.

است که با وجود همسانگرد بودن محیط و فرآیند مورد مطالعه، خوشه‌ها چه در حالت پرکولاسیون تهاجمی با قانون به دام اندازی و چه در حالت پرکولاسیون تهاجمی بون قانون به دام اندازی همسانگرد نیستند. این یافته که برای اولین بار در این مقاله مطرح می‌شود، با نتایج مطالعات قبلی بر روی مجموعه‌هایی از فرکتال‌های تصادفی ناشی از فرآیندهای همسانگرد دیگر، همخوانی دارد [۱۲].

### ۴. جمع‌بندی

مقادیر به دست آمده در این مقاله برای بعد فرکتالی جرم

### مراجع

1. R Chandler, J Koplik, K Lerrman and J F Willemsen, *J. Fluid Mech.*, **119** (1982) 249.
2. W Wilkinson and J F Willemsen, *J. Phys. A*, **16** (1983) 365.
3. R Lenormand, *Physica A*, **140** (1986) 114.
4. L Furuberg, J Feder, A Aharony and T Jqssang, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2117.
۵. م. خاک سفیدی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه بیرجند (۱۳۸۳).
6. D Stuffer and A Aharony, " *Introduction to Percolation Theory* ", Taylor and Francis, London (1995).