

## بررسی مسیره‌های الکترون در لیزر الکترون آزاد با میدان ویگلر مارپیچی واقعی و کانال یونی راهنما

سعداله ابراهیمی<sup>۱</sup> و مهدی اسماعیل‌زاده<sup>۲</sup>

۱. مرکز تحقیقات لیزر، سازمان انرژی اتمی ایران، تهران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

(دریافت مقاله: ۸۲/۱۱/۸ ؛ پذیرش: ۸۳/۷/۲۵)

### چکیده

مسیره‌های الکترون در لیزر الکترون آزاد<sup>۱</sup> با میدان ویگلر مارپیچی واقعی<sup>۲</sup> و کانال یونی راهنما<sup>۳</sup> تجزیه و تحلیل شده و حالت‌های پایدار و ناپایدار مدار الکترونی به دست آمده است. نتایج نشان می‌دهند پایداری مسیره‌های الکترون (تک الکترون) در ویگلر مارپیچی واقعی که در فضای سه بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد در مقایسه با ویگلر مارپیچی ایده‌آل که در مختصات دو بعدی قبلاً به دست آمده است اختلاف دارد. این موضوع مورد بحث قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: لیزر الکترون آزاد، کانال یونی، میدان ویگلر مارپیچی واقعی

### ۱. مقدمه

سوم (در جهت محور) صرف نظر شده و همچنین از سرعت عرضی الکترون  $v_{x,y}$  نسبت به سرعت محوری  $v_z$  چشم‌پوشی می‌شود. این تقریب در نهایت موجب اختلاف در نتایج تئوری و تجربی خواهد شد [۴]. در حالی که با در نظر گرفتن ویگلر مارپیچی واقعی که شامل سه مؤلفه فضایی است، با اعمال سرعت عرضی الکترون، انتظار می‌رود که این اختلاف کاهش یابد. در مقاله حاضر، مسیره‌های الکترون در لیزر الکترون آزاد با ویگلر مارپیچی واقعی و کانال یونی، مورد مطالعه قرار گرفته است. میدان الکترواستاتیک عرضی ناشی از یونهای مثبت با چگالی یکنواخت و میدان مغناطیسی ویگلر ساکن فرض شده است. معادله نسبیتی حرکت الکترون حل شده است. در نهایت با استفاده از حل معادلات چند جمله‌ای در حالت پایا<sup>۶</sup>، مسیره‌های پایدار<sup>۷</sup> و ناپایدار الکترون که شامل دو گروه مداری است، به دست می‌آید.

کانال یونی با یونهای مثبت به عنوان یکی از ابزارهای راهنما به منظور افزایش بهره در لیزرهای الکترون آزاد با میدان ویگلر مارپیچی ایده‌آل<sup>۴</sup> [۱] و میدان ویگلر تخت ایده‌آل<sup>۵</sup> [۲ و ۳] تجزیه و تحلیل شده و مسیره‌های الکترونی در میدان ویگلر تخت ایده‌آل به دست آمده است [۲]. هنگامی که باریکه الکترونی از این کانال عبور می‌کند، وجود یونهای مثبت باعث ایجاد میدان الکترواستاتیکی در جهت عرضی شده و سبب کانونی شدن باریکه الکترونی در جهت محور استوانه لیزری (محیط فعال) می‌شود.

در حالت ایده‌آل ویگلر مارپیچی را تنها شامل دو مؤلفه در صفحه عمود بر مسیر پرتو الکترونی در نظر گرفته و از مؤلفه

۱. Free electron laser
۲. Realizable helical wiggler
۳. Ion channel guiding
۴. Ideal helical wiggler
۵. Ideal planar wiggler

۶. Steady state

۷. Stable trajectories

**۲. مسیره‌های الکترون**

در لیزر الکترون آزاد با میدان مغناطیسی ویگلر ماریچی ایده‌آل، میدان مغناطیسی ویگلر تنها در دو جهت  $x$  و  $y$  مؤلفه داشته و از مؤلفه  $z$  صرف‌نظر می‌شود [۴]، ولی در ویگلر واقعی همه مؤلفه‌ها را وارد کرده تا به شکل واقعی لیزر نزدیک شویم. میدان مغناطیسی ویگلر ماریچی واقعی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود [۴ و ۵]:

$$(۱)$$

$$\vec{B}_W = \nu B_W \left[ I_1(\lambda) \cos \chi \hat{e}_r - \frac{1}{\lambda} I_1(\lambda) \sin \chi \hat{e}_\theta + I_1(\lambda) \sin \chi \hat{e}_z \right]$$

که  $B_W$  دامنه میدان ویگلر،  $i=1,2,\dots$  تابع بسل،  $\lambda = k_w r$ ،  $I'(\lambda) = \frac{dI(\lambda)}{d\lambda}$  و  $\chi = \theta - k_w z$  است.

میدان الکترواستاتیکی ناشی از کانال یونی را می‌توان به صورت [۲]:

$$\vec{E}_i = \nu \pi n_i (x \hat{e}_x + y \hat{e}_y) \quad (۲)$$

نوشت که  $n_i$  چگالی یونهای مثبت و  $e$  قدرمطلق بار الکترونهاست. در حضور این میدانها معادله حرکت [۴]:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -e \left[ \vec{E}_i + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_W \right] \quad (۳)$$

است که  $\vec{v}$  سرعت برداری الکترون و  $c$  سرعت نور می‌باشد. حل معادلات حرکت به‌منظور بررسی مسیره‌های الکترون در مختصات دکارتی مشکل است، به همین دلیل از مختصات ویگلر استفاده می‌شود [۵]. میدان مغناطیسی ویگلر ماریچی واقعی در این دستگاه مختصات به شکل زیر است [۴]:

$$\vec{B}_W = \nu B_W \left[ \hat{e}_r \frac{1}{\nu} (I_1(\lambda) + I_1(\lambda) \cos 2\chi) + \hat{e}_\theta \frac{1}{\nu} I_1(\lambda) \sin 2\chi + \hat{e}_z I_1 \sin \chi \right] \quad (۴)$$

با جایگذاری معادلات (۲) و (۴) در معادله (۳)، مؤلفه‌های معادله حرکت به صورت زیر خواهند بود،

$$\ddot{x}_1 = -(\omega_i^2 \pm \nu I_1(\lambda) k_w \dot{x}_r \Omega_W - k_W^2 \dot{x}_r^2) x_1 + (\nu k_w \dot{x}_r \mp \nu I_1(\lambda) \Omega_W) \dot{x}_1 + k_w \dot{v}_z x_1 \quad (۵)$$

$$\ddot{x}_r = -(\omega_i^2 \pm \nu I_1(\lambda) k_w \dot{x}_r \Omega_W - k_W^2 \dot{x}_r^2) x_r + (-\nu k_w \dot{x}_r \pm \nu I_1(\lambda) \Omega_W) \dot{x}_1 - k_w x_1 \dot{x}_r - \frac{\nu I_1(\lambda)}{\lambda} \Omega_W \dot{x}_r \quad (۶)$$

$$\ddot{x}_z = \Omega_W x_1 k_w v_z + \Omega_W \dot{x}_z \quad (۷)$$

$$\dot{\lambda} = k_w (\dot{x}_1 \cos \chi + \dot{x}_r \sin \chi) \quad (۸)$$

$$\dot{\chi} = \frac{k_w}{\lambda} (\dot{x}_1 \cos \chi - \dot{x}_r \sin \chi - \lambda \dot{x}_r) \quad (۹)$$

که  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ،  $\Omega_W = \frac{eB_W}{\gamma mc}$ ،  $\omega_i^2 = \frac{\nu \pi e^2 n_i}{\gamma m}$  عامل

نسبیتی و  $m$  جرم در حال سکون الکترون است. حل معادلات (۵) تا (۹) در حالت پایا،

$$v_1 \equiv \dot{x}_1 = -\frac{\Omega_W \dot{x}_r k_w \nu I_1(\lambda)}{(\omega_i^2 \pm \nu I_1(\lambda) k_w \dot{x}_r \Omega_W - k_W^2 \dot{x}_r^2)} \equiv v_w \quad (۱۰)$$

$$v_r \equiv \dot{x}_r = 0 \quad (۱۱)$$

$$v_{||} \equiv \dot{x}_z = \text{const} \tan \theta \quad (۱۲)$$

$$\chi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (۱۳)$$

$$\lambda = \lambda_c = \frac{v_w}{v_{||}} \quad (۱۴)$$

اگر  $\lambda \rightarrow 0$  یا  $v_w$  (سرعت عرضی) به سمت صفر میل کند، نتایج حالت ایده‌آل حاصل می‌شود [۱].

از رابطه (۱۰) مشاهده می‌شود هنگامی که شرط،

$$\omega_i^2 = k_w^2 v_{||}^2 \mp \nu k_w v_{||} I_1(\lambda) \Omega_W \quad (۱۵)$$

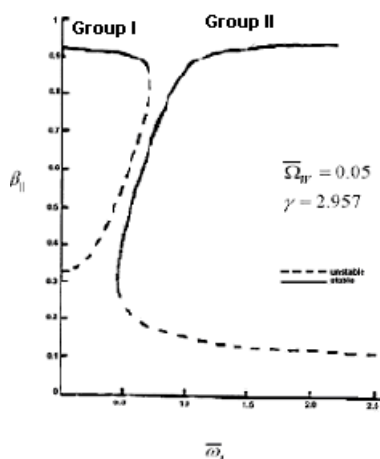
برقرار باشد سرعت عرضی،  $v_w$ ، به شدت افزایش می‌یابد، به عبارت دیگر تشدید وجود دارد که باعث ایجاد دو گروه مداری به شکل زیر می‌شود:

گروه ۱ مداری:  $\omega_i^2 > k_w^2 v_{||}^2 \mp \nu k_w v_{||} I_1(\lambda) \Omega_W$

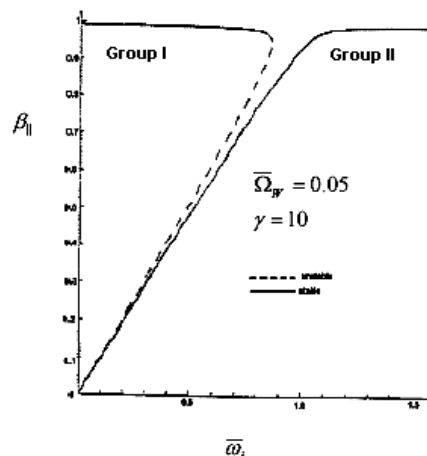
گروه ۲ مداری:  $\omega_i^2 < k_w^2 v_{||}^2 \mp \nu k_w v_{||} I_1(\lambda) \Omega_W$

**۳. پایداری مسیره‌ها**

پایداری مسیره‌های پایا را با وارد کردن اختلالهای  $x_1 = \delta x_1$ ،  $\dot{x}_1 = \delta \dot{x}_1$ ،  $x_r = x_r + \delta x_r$ ،  $\dot{x}_r = \delta \dot{x}_r$ ،  $x_z = x_z + \delta x_z$  و  $v_{||} = v_{||} + \delta v_{||}$  حول حالت پایا،  $\lambda = \lambda_c + \delta \lambda$  و  $\chi = \pm \frac{\pi}{2} + \delta \chi$



شکل ۲. نمودار  $\beta_{\parallel}$  برحسب  $\bar{\omega}_i$  در ویگلر واقعی.



شکل ۱. نمودار  $\beta_{\parallel}$  برحسب  $\bar{\omega}_i$  در ویگلر ایده‌ال.

$$R = \omega_i^\gamma - \omega_w^\gamma \beta_r \left( \beta_r + \frac{\gamma I_1(\lambda) \Omega_W}{c \lambda} x_r + \frac{\gamma I_1(\lambda) \Omega_W}{\omega_w} \right) + \frac{\gamma I_1(\lambda)^2}{\lambda^2} \Omega_W$$

(۲۳)

$$S = \gamma \omega_w \left( \beta_r + \frac{I_1(\lambda) \Omega_W}{\omega_w} \right)$$

(۲۴)

$$T = \omega_w \Omega_W \beta_r \frac{\gamma I_1(\lambda)}{\lambda} \left( \gamma \omega_w^\gamma \beta_r \frac{x_r}{c} - \frac{\gamma I_1(\lambda)}{\lambda} \Omega_W \right)$$

(۲۵)

و

$$x_r = - \frac{\Omega_W v_{\parallel} k_w \gamma I_1(\lambda)}{(\omega_i^\gamma \pm \gamma I_1(\lambda) k_w v_{\parallel} \Omega_W - k_w^\gamma v_{\parallel}^2) \lambda}$$

(۲۶)

که در آن  $\omega_w = k_w c$  و  $\beta_r = \frac{v_{\parallel}}{c}$  است. با در نظر گرفتن جابه‌جایی به صورت نوسانی،

$$x_j = A_j e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2$$

(۲۷)

که  $A_j$  دامنه جابه‌جایی و  $\omega$  فرکانس آن است، در نهایت روابط (۱۹) و (۲۰) به شکل زیر در می‌آیند:

$$(i\omega^\gamma - i\omega P) A_1 - Q \omega^\gamma A_r = 0$$

(۲۸)

$$(S \omega^\gamma + T) A_1 + (i\omega^\gamma - i\omega R) A_r = 0$$

(۲۹)

معادله بالا بر حسب  $\alpha = \omega^\gamma$ ، معادله درجه دو است و شرط پایداری،

مقادیر ثابتی هستند) در معادلات (۵) تا (۸) به دست می‌آوریم:

$$\delta \ddot{x}_1 = -(\omega_i^\gamma \pm \gamma I_1(\lambda) k_w v_{\parallel} \Omega_W - k_w^\gamma v_{\parallel}^2) \delta x_1 + (\gamma k_w v_{\parallel} \mp \gamma I_1(\lambda) \Omega_W) \delta x_r + k_w x_r \cdot \delta \dot{x}_r$$

(۱۶)

$$\delta \ddot{x}_r = -(\omega_i^\gamma \pm \gamma I_1(\lambda) k_w v_{\parallel} \Omega_W - k_w^\gamma v_{\parallel}^2) \delta x_r + (-\gamma k_w v_{\parallel} \pm \gamma I_1(\lambda) \Omega_W) \delta x_1 - \left( -\gamma k_w^\gamma v_{\parallel} x_r + \frac{\gamma I_1(\lambda)}{\lambda} \Omega_W \right) \delta \dot{x}_r$$

(۱۷)

$$\delta \ddot{x}_r = \frac{\gamma I_1(\lambda)}{\lambda} \Omega_W (\delta \dot{x}_r + k_w v_{\parallel}) \delta x_1$$

(۱۸)

با مشتق‌گیری از معادلات (۱۶) و (۱۷) نسبت به زمان و جایگذاری معادله (۱۸)، دو معادله به هم کوپل شده،

$$\delta \ddot{x}_1 = -P \delta \dot{x}_1 - Q \delta \ddot{x}_r$$

(۱۹)

$$\delta \ddot{x}_r = -R \delta \dot{x}_r - S \delta \dot{x}_1 + T \delta x_1$$

(۲۰)

حاصل می‌شود که،

$$P = \omega_i^\gamma - \omega_w^\gamma \beta_r \left( \mp \frac{\gamma I_1(\lambda)}{\omega_w} \Omega_W + \beta_r^\gamma + x_r \cdot \Omega_W \frac{\gamma I_1(\lambda)}{c \lambda} \right)$$

(۲۱)

$$Q = \omega_w \left( \gamma \beta_r + \gamma I_1(\lambda) \frac{\Omega_W}{\omega_w} + x_r \cdot \frac{\Omega_W}{c} \right)$$

(۲۲)

تئوری و تجربی، که در ویگلر ایده‌ال وجود دارد [۴] کاهش یابد.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسیرهای پایای الکترون در لیزر الکترون آزاد با میدان مغناطیسی ویگلر مارپیچی واقعی و کانال یونی راهنما با استفاده از معادله نسبیتی حرکت بررسی و با حالت ایده‌ال مقایسه شد. در ویگلر مارپیچی واقعی بر خلاف ویگلر ایده‌ال، گروه ۲ مداری دارای مسیرهای ناپایدار است. مسیرهای ناپایدار نسبت به ویگلر ایده‌ال افزایش یافته و ناحیه تشدید کاهش می‌یابد. بنابراین انتظار می‌رود که اختلاف در نتایج تئوری و تجربی بازده لیزری، که در حالت ایده‌ال مشاهده شده بود، نیز کاهش یابد.

$$(P+QS+R)^2 - 4(PR-QT) > 0. \quad (30)$$

خواهد بود. با استناد به شرط (۳۰)، معادله (۲۷) نوسانی است. نمودارهای سرعت محوری الکترون،  $\beta_{\parallel}$ ، بر حسب ایده‌ال (برای مسیرهای پایدار به صورت خط پیوسته و مسیرهای ناپایدار با خط چین) در شکل ۱ [۲] و در میدان ویگلر واقعی در شکل ۲، با  $\frac{\Omega_W}{\omega_w} = 0.05$  نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که در گروه ۲ مداری، بر خلاف ویگلر ایده‌ال، ناپایداری وجود دارد. همچنین حالت تشدید کاهش یافته موجب افت بهره می‌شود. انتظار می‌رود که با افت بهره ناشی از مسیرهای ناپایدار در ویگلر واقعی، اختلاف در نتایج

#### مراجع

1. P Jha and P Kumar, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **24**(1996) 1359.
2. H Mehdian, M Esmailzadeh and J E Willet, *Phys. Plasmas* **8**(2001) 3776.
3. M Esmailzadeh, H Mehdian and J E Willet, *Phys. Plasmas* **9**(2002), 670.
4. H P Freund and L M Antonsen. Jr, *Chapman and Hall, London* (1996).
5. H P Freund, and A K Ganguly, *IEEE J Quantum Electron*, QE-21 (1985)1073.