

## محاسبه گشتاور وارد بر تیغه نازک بلور مایع نماتیک در میدان مغناطیسی قوی

محمد علی شاهزادگان و مجید غفاری

گروه فیزیک - دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۲/۵/۲۵ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۹/۱۴)

**چکیده:** در این مقاله معادلات هیدرودینامیک برای یک تیغه نازک بلور مایع نماتیک که به صورت یک نوسانگر پیچشی است برای میدانهای مغناطیسی قوی نوشته شده و مؤلفه‌های سرعت مایع تا تقریب مرتبه اول و سپس گشتاور وارد بر تیغه محاسبه شده است. تغییرات بسامد تشدید نوسانگر در حضور بلور مایع نماتیک و پهنای خط آن ضمن آنکه گذار فردریکز را تأیید می‌کند خود راهی برای به دست آوردن برخی از کمیت‌های فیزیکی مایع است.

**واژه‌های کلیدی:** بلور مایع نماتیک، گذار فاز، شرط مرزی سطحی، خواص مادی و مغناطیسی

### ۱. مقدمه

برای بلورهای مایع نماتیک، معمولاً دو لایه مرزی معروف به لایه مرزی هومیوتروپیک<sup>۱</sup> و مسطح<sup>۲</sup> مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در مورد لایه مرزی هومیوتروپیک جهت آسان عمود بر صفحه سطح بلور مایع و در مورد لایه مرزی مسطح جهت آسان منطبق بر صفحه سطح بلور مایع می‌باشد. یک جهت مرجع که محور طولی مولکولها در هر ناحیه کوچکی از بلور مایع در امتداد آن صف‌بندی می‌کنند را برداری که جهت‌نمای  $\vec{n}$  نامیده و آن جهت‌هایی از  $\vec{n}$  که انرژی سطحی را کمینه می‌کند جهت‌های آسان گویند، که این جهت‌ها بستگی به طبیعت محیط خارجی بلور مایع دارند [۱و۲].

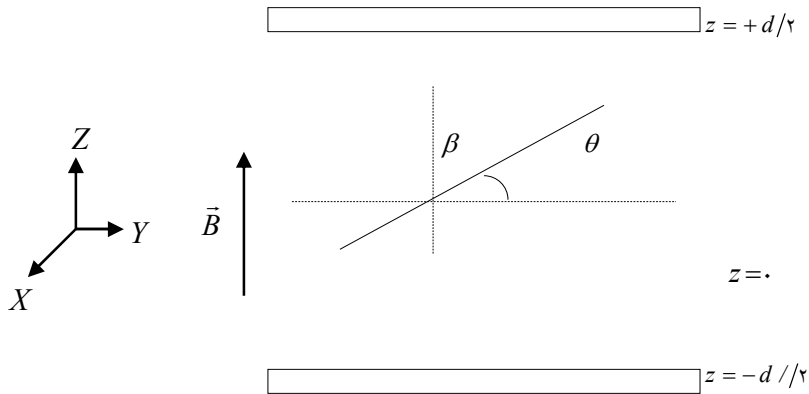
یک تیغه نازک بلور مایع نماتیک را که، به صورت یک نوسانگر پیچشی در آمده است در نظر می‌گیریم. اگر میدان مغناطیسی اعمال شده به تیغه ( $B$ ) از یک مقدار آستانه  $B_C$

تجاوز نماید، بردار جهت‌نما و به تبع آن، آرایش‌بندی مولکولها از مکانی به مکان دیگر تغییر و شدت تغییر آن تابع  $B$  می‌باشد [۳]. نوسانگر پیچشی که تیغه‌های آن حاوی بلور مایع نماتیک است، یک جستجوگر برای تعیین گذار فردریکز<sup>۳</sup> در بلورهای مایع می‌باشد. این نوسانگر تغییرات بسامد تشدید آن را نسبت به میدان مغناطیسی (یا الکتریکی) با دقت بسیار خوبی تعیین می‌کند. مسئله در میدانهای مغناطیسی نزدیک میدان بحرانی  $B_C$  نیز مورد مطالعه قرار گرفته که نتایج آن در جای دیگری به چاپ خواهد رسید [۳].

مسئله در تمام میدانهای مغناطیسی نیاز به محاسبات عددی پیچیده‌ای دارد که در دست انجام است.

این مسئله برای تعیین برخی از کمیت‌های بلور مایع توسط دجو<sup>۴</sup> [۲] در یک استوانه دوار که حاوی بلور مایع می‌باشد مورد مطالعه قرار گرفته است. البته در این مطالعه بافت در بلور

۱. Homeotropic  
۲. Planar  
۳. Frederiks



شکل ۱. تیغه نازک بلور مایع نماتیک در میدان مغناطیسی.

چگالی انرژی آزاد تیغه را می توان به صورت زیر نوشت [۱]:

$$f = f_0 + \frac{1}{2} [K_1 (\text{div} \vec{n})^2 + K_2 (\vec{n} \cdot \text{curl} \vec{n})^2 + K_3 (\vec{n} \times \text{curl} \vec{n})^2] - \frac{1}{2} \frac{\chi_a}{\mu} (\vec{n} \cdot \vec{B})^2, \tag{2}$$

که در آن  $f_0$ ، چگالی انرژی آزاد راستای یکنواخت (بدون بافت) است، جملات داخل کروشه، چگالی انرژی آزاد بافت و جمله آخر مربوط به اثر میدان مغناطیسی می باشد.  $K_1$ ،  $K_2$  و  $K_3$  نیز ثابتهای کشسانی هستند. با جایگذاری رابطه (۱) در معادله (۲) چگالی انرژی آزاد به صورت زیر خواهد شد [۱]:

$$f = f_0 + \frac{1}{2} \left[ (K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta) \left( \frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\chi_a}{\mu} B^2 \sin^2 \theta \right]. \tag{3}$$

با استفاده از معادله اویلر - لاگرانژ برای کمینه کردن چگالی انرژی آزاد و با توجه به شرایط مرزی که در  $z = 0$ ، مقدار بیشینه  $\theta_{\max}$  مطابق با بیشترین واپیچش و در  $z = \pm d/2$ ،  $\theta$  کمترین مقدار  $\theta_{\min}$  را دارد، خواهیم داشت:

$$\left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 = \frac{\mu \cdot K_1 + (K_2 - K_1) \sin^2 \theta}{B^2 \chi_a (\sin^2 \theta_{\max} - \sin^2 \theta)}. \tag{4}$$

برای میدانهای نزدیک میدان بحرانی و در تقریب زوایای کوچک ( $\sin \theta \cong \theta$ ,  $\sin \theta_{\max} \cong \theta_{\max}$ ) و با

مایع در نظر گرفته نشده و مؤلفه های سرعت شاره با توجه به تقریبهای به کار برده شده به آسانی به دست آمده اند. انجام کارهای تجربی در این مورد و نوسانگر پیچشی مورد بحث می تواند در آینده کارایی این وسایل را تأیید کند.

روش ما در این مقاله به این صورت می باشد که، در بخش دوم لایه مرزی مسطح و روش وردشی مورد مطالعه قرار گرفته به طوری که، در آن زاویه بافت نسبت به مکان تعیین شده و سپس معادلات ناویر- استوکس که تعیین کننده مؤلفه های سرعت  $u_x$ ،  $u_y$  و  $u_z$  هستند به دست آمده اند، آن گاه تا تقریب مرتبه اول این سرعتها بر حسب مکان حساب شده اند. در بخش سوم گشتاور وارد بر تیغه محاسبه شده و سرانجام در بخش چهارم بحث و نتیجه گیری صورت گرفته است.

### ۲. لایه مرزی مسطح و روش وردشی

یک تیغه نازک بلور مایع نماتیک به ضخامت  $d$  به صورت یک نوسانگر پیچشی در یک میدان مغناطیسی  $\vec{B}$  عمود بر تیغه های آن در نظر می گیریم (شکل ۱).

اگر میدان مغناطیسی را در راستای محور  $Z$  و زاویه بین سمت گیری موضعی جهت نما و صفحه  $XOY$  برابر  $\theta(z)$  باشد داریم:

$$\vec{n} = (\cos \theta(z), \sin \theta(z)). \tag{1}$$

$$\frac{dz}{d\beta} = \pm \frac{B_C d}{B\pi} \text{Ln}\beta + C_{\pm}, \quad (10)$$

که  $C_{\pm}$  ثابت انتگرال بوده و برای محاسبه آن از این شرط که در  $z=0$ ،  $\beta$  کمترین مقدار را دارد ( $\beta_{\min} = \beta$ )، استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$C_{\pm} = \mp \frac{B_C d}{B\pi} \text{Ln}\beta, \quad (11)$$

در نتیجه داریم:

$$\beta = \begin{cases} \beta e^{+az} & z \geq 0 \\ \beta e^{-az} & z \leq 0 \end{cases}, \quad (12)$$

که در آن  $a$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a = \frac{B\pi}{B_C d}. \quad (13)$$

اکنون مؤلفه‌های میدان سرعت شاره را برای تیغه نازک بلور مایع که به صورت یک نوسانگر پیچشی در آمده است به دست می‌آوریم. برای تحقق این امر از معادلات پایستگی جرم و قانون دوم نیوتن استفاده کرده و فرض می‌کنیم که چگالی شارش در طی حرکت نوسانی ثابت بماند. بنابراین از پایستگی جرم نتیجه می‌شود که

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

معادله حرکت نیوتنی را در نظر می‌گیریم. برای حجم کوچکی از شاره داریم:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}. \quad (15)$$

با استفاده از مشتق جزئی و کامل خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}, \quad (16)$$

بنابراین

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{f}. \quad (17)$$

نیروی کل  $\vec{f}$  که بر شاره وارد می‌شود شامل قسمتهای زیر می‌باشد:

الف) نیروهای هیدرودینامیکی که شامل نیروی ناشی از فشار،  $-\vec{\nabla} p$  و نیروهای چسبندگی،  $\vec{f}_{visc}$  است.

ب) نیروی مغناطیسی

اعمال تقریب یک ثابتی  $K_1 = K_2 = K_3 = K$  داریم:

$$\left(\frac{dz}{d\theta}\right) = \frac{1}{B} \left[ \frac{\mu}{\chi_a} \frac{K}{\theta_m^2 - \theta^2} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق و اعمال شرایط مرزی میدان بحرانی  $B_C$  به دست می‌آید

$$B_C = \frac{\pi}{d} \left( \frac{\mu K}{\chi_a} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

بنابراین برای میدانهای مغناطیسی کوچکتر از میدان بحرانی  $B_C$  در بلور مایع بافت نداریم. این گذار را به نام فردریکز که اولین بار آن را کشف کرد نامیده اند.

برای مورد حدی دیگر یعنی، میدانهای خارجی خیلی بزرگتر از میدان بحرانی  $B_C$  که مورد علاقه و بررسی ما در این مقاله است، به علت آن که  $\theta(z)$  مقدار بزرگی می‌باشد، از کمیت دیگری به نام  $\beta(z)$  استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta(z) = \frac{\pi}{\gamma} - \theta(z). \quad (7)$$

بنابراین در این مورد،  $\beta$  در مرکز تیغه کمترین مقدار و در مرزها بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت و در کل،  $\beta$  مقدار کوچکی خواهد بود.

از رابطه های (۴)، (۶) و (۷) خواهیم داشت:

$$\frac{dz}{d\beta} = \pm \frac{B_C d}{B\pi \sqrt{K_1}} \left[ \frac{K_1 + (K_3 - K_1) \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta_{\min} - \cos^2 \beta} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

در رابطه (۸)، علامت مثبت برای  $z$  های بزرگتر از صفر و علامت منفی برای  $z$  های کوچکتر از صفر می‌باشد. اکنون با توجه به کوچک بودن  $\beta$ ، از تقریب  $\cos^2 \beta \cong 1 - \beta^2$  استفاده کرده و می‌دانیم که برای میدانهای بزرگ داریم:  $\cos^2 \beta_{\min} \rightarrow 1$ . بنابراین

$$\frac{dz}{d\beta} = \pm \frac{B_C d}{B\pi \sqrt{K_1}} \left[ \frac{K_1 + (K_1 - K_3) \beta^2}{\beta^2} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

اکنون از جمله  $(K_1 - K_3) \beta^2$  در مقابل جمله  $K_1$  به علت کوچک بودن صرف نظر کرده و خواهیم داشت:

برای شماره تراکم ناپذیر با استفاده از معادله (۱۴) و رابطه (۲۵) داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \alpha \equiv x, y, z, \quad (26)$$

در نتیجه میدان سرعت شماره چنین می‌شود:

$$\vec{v} = [v_x(y, z)\hat{i} + v_y(x, z)\hat{j} + v_z(x)\hat{k}]e^{i\omega t}. \quad (27)$$

اکنون با توجه به این که  $\vec{n} \equiv (\sin \beta(z), \cos \beta(z))$  و با قرار دادن رابطه (۲۷) و عناصر رابطه (۲۰) در معادله (۱۹)، معادلات زیر را برای بافت مسطح خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \rho i \omega v_x + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_\tau + (\alpha_\tau + \alpha_\delta) \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha_\tau + (\alpha_\tau + \alpha_\delta) \cos^2 \beta) \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha_\tau + \alpha_\delta) \sin^2 \beta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} + \frac{1}{4}(\alpha_\delta - \alpha_\tau) \sin^2 \beta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \cos^2 \beta}{\partial z} [(\alpha_\tau + \alpha_\delta) \frac{\partial v_x}{\partial z} + (\alpha_\delta - \alpha_\tau) \frac{\partial v_z}{\partial x}] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \sin^2 \beta}{\partial z} [(\alpha_\delta + \alpha_\tau) \frac{\partial v_x}{\partial y} + (\alpha_\delta - \alpha_\tau) \frac{\partial v_y}{\partial x}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho i \omega v_y + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\ & \frac{1}{2}(\alpha_\tau + (\alpha_\tau + \alpha_\delta) \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha_\tau + \alpha_\tau + \alpha_\delta + \frac{\alpha_\tau}{2} \sin^2 \beta) \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (29) \\ &+ \frac{1}{4}(\alpha_\tau + \alpha_\delta) \sin^2 \beta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\alpha_\tau}{4} \frac{\partial(\sin^2 \beta)}{\partial z} \frac{\partial v_y}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho i \omega v_z + \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = \\ & \frac{1}{4}(\alpha_\tau + (\alpha_\tau + \alpha_\delta) \cos^2 \beta) \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{1}{4}(\alpha_\tau + \alpha_\delta) \sin^2 \beta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (30) \\ &+ \frac{[(\alpha_\tau \cos^2 \beta + \alpha_\delta) \sin^2 \beta]}{2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial[(\alpha_\tau \cos^2 \beta + \alpha_\delta) \sin^2 \beta]}{\partial z} \frac{\partial v_y}{\partial z}. \end{aligned}$$

ج) نیروهای گرانشی

همچنین چون دامنه نوسانات نوسانگر کوچک می‌باشد، از شرط هیدروستاتیکی روی فشار استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر در گذار فردریکز بین نیروهای مغناطیسی و نیروهای پیچشی یک رقابت وجود دارد و ما می‌توانیم تقریباً فشار را ثابت در نظر بگیریم [۱]. بنابراین از معادله (۱۷) داریم:

$$\rho \left[ \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \vec{f}_{visco}. \quad (18)$$

چنانچه در معادله بالا نیروی چسبندگی را بر حسب تانسور تنش<sup>۱</sup> بنویسیم، داریم:

$$\rho \left[ \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right] = \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta}. \quad (19)$$

عناصر این تانسور برای نماتیک تراکم ناپذیر، در حالت عام به صورت زیر می‌باشد [۲].

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta} &= \alpha_\tau A_{\alpha\beta} + \alpha_\tau n_\alpha n_\beta n_\mu n_\rho A_{\mu\rho} + \alpha_\tau n_\alpha N_\beta \\ &+ \alpha_\tau n_\beta N_\alpha + \alpha_\delta n_\alpha n_\mu A_{\mu\beta} + \alpha_\tau n_\beta n_\mu A_{\mu\alpha}, \quad (20) \end{aligned}$$

که در رابطه فوق  $\alpha_i (i=1,2,3,\dots,6)$  به ثابتهای لسل<sup>۲</sup> معروفند و نیز داریم:

$$\alpha_\tau = \alpha_\tau + \alpha_\tau + \alpha_\delta, \quad (21)$$

$$N_\alpha = \frac{dn_\alpha}{dt} - W_{\alpha\beta} n_\beta, \quad (22)$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right), \quad (23)$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right). \quad (24)$$

برای حل معادلات هیدرودینامیک بافت مسطح، میدان سرعت شماره را به صورت زیر فرض می‌کنیم [۴]

$$\vec{v} = [v_x(y, z)\hat{i} + v_y(x, z)\hat{j} + v_z(x, z)\hat{k}]e^{i\omega t}. \quad (25)$$

۱. Stress

۲. Leslie

$$\begin{aligned}
 \rho i \omega \cdot \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx} \beta \cdot^n &= \\
 \frac{1}{\gamma} (\alpha_{\gamma} + (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \beta^{\gamma}) \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y^{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx} \beta \cdot^n &+ \\
 + \frac{1}{\gamma} [(\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) &- \\
 - (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \beta^{\gamma}] \frac{\partial^{\gamma}}{\partial z^{\gamma}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx} \beta \cdot^n &+ \\
 + \frac{1}{\gamma} (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \beta \frac{\partial^{\gamma}}{\partial y \partial z} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx} \beta \cdot^n & \quad (36) \\
 - \frac{1}{\gamma} (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \frac{\partial \beta^{\gamma}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx} \beta \cdot^n &+ \\
 + (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx} \beta \cdot^n &.
 \end{aligned}$$

الف) تقریب مرتبه صفرم

معادله مربوط به تقریب مرتبه صفرم معادله (۳۶)، به صورت زیر می‌باشد.

$$\rho i \omega \cdot v_x = \frac{\alpha_{\gamma}}{\gamma} \frac{\partial^{\gamma} v_x}{\partial y^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \frac{\partial^{\gamma} v_x}{\partial z^{\gamma}} \quad (37)$$

( $z \geq 0$  و  $z \leq 0$ ).

برای حل معادله (۳۷) فرض می‌کنیم،

$$f \cdot (y) \cdot v_x(y, z) = f \cdot (y) \cdot g \cdot (z)$$

برابر  $y$  می‌باشد. (شرط مرزی این است که در  $z = \pm d/2$ ،

سرعت شاره برابر است با:  $r \omega \hat{\phi} = -\omega y \hat{i} + \omega x \hat{j}$ ) بنابراین

$$\frac{d^{\gamma} g \cdot (z)}{dz^{\gamma}} - \gamma^{\gamma} g \cdot (z) = 0, \quad (38)$$

که در معادله (۳۸)،  $\gamma^{\gamma}$  برابر است با:

$$\gamma^{\gamma} = \frac{\gamma \rho i \omega}{\alpha_{\gamma} + \alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}} \quad (39)$$

جواب معادله (۳۸) برابر است با:

$$g \cdot (z) = A \sinh(\gamma z) + B \cosh(\gamma z), \quad (40)$$

برای حل سه معادله فوق با توجه به ساختار میدانی سرعت شاره (۲۷)، تقارن مسئله و ارائه راه حل‌های مختلف و رفع تناقضهای بوجود آمده در پاسخها به این نتیجه رسیدیم که مؤلفه  $y$  سرعت،  $v_y(x, z)$ ، را برابر صفر فرض کنیم. بنابراین دو معادله (۲۹) و (۳۰) را دوباره بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{\gamma} (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \sin^{\gamma} \beta \frac{\partial^{\gamma} v_z}{\partial x^{\gamma}} = 0, \quad (31)$$

$$\rho i \omega \cdot v_z + \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = \quad (32)$$

$$\frac{1}{\gamma} (\alpha_{\gamma} + (\alpha_{\gamma} + \alpha_{\delta}) \cos^{\gamma} \beta) \frac{\partial^{\gamma} v_z}{\partial x^{\gamma}}.$$

از معادله (۳۱) چنین نتیجه می‌شود که،  $v_z(x)$  حداکثر می‌تواند تابع درجه اولی از متغیر  $x$  باشد. با توجه به این نتیجه، معادله (۳۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$i \omega \cdot v_z(x) = -v_x(y, z). \quad (33)$$

طرف چپ معادله (۳۳) تابعی است از  $x$  در صورتی که طرف راست همین معادله تابعی است از  $y$  و  $z$ . برای رفع این تناقض می‌بایست  $v_z$  دارای مقدار ثابتی باشد. فرض می‌کنیم که این مقدار ثابت برابر  $C$  باشد، با جای گذاری  $v_z = C$  در معادله (۳۲) داریم:

$$v_z(x) = C = 0 \quad \text{یا} \quad \rho i \omega \cdot C = 0. \quad (34)$$

همان طور که قبلاً بیان شد، شکلبندی مسئله به صورتی است که بلور مایع نماتیک در قالب دو تیغه موازی به ضخامت  $d$ ، در حال نوسان پیچشی است. بر مبنای این فرضیه و تقارن مسئله، مؤلفه  $v_x(y, z)$  میدان سرعت را می‌توان چنین بسط داد:

$$v_x(y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} v_{nx}(y, z) \beta \cdot^n \quad (35)$$

اکنون با توجه به این که  $\beta$  کوچک می‌باشد، برای زوایای کوچک، رابطه (۳۵) را در معادله (۲۸) جایگذاری نموده و تا تقریب مرتبه اول  $\beta$  معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

جواب کلی دو معادله (۴۵) و (۴۶) به صورت زیر می‌باشند:

$$v_{1x}(y, z) = C_1 e^{-\gamma z} + C_2 e^{\gamma z} - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega \operatorname{sech}(\gamma d / 2) [\gamma (a^\gamma - \gamma^\gamma) - \gamma a \gamma \sinh(\gamma z)] e^{-az}}{a (a^\gamma - \gamma^\gamma) (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)}, \quad z \geq 0. \quad (47)$$

$$v_{1x}(y, z) = C_3 e^{-\gamma z} + C_4 e^{\gamma z} - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega \operatorname{sech}(\gamma d / 2) [\gamma (a^\gamma - \gamma^\gamma) + \gamma a \gamma \sinh(\gamma z)] e^{-az}}{a (a^\gamma - \gamma^\gamma) (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)}, \quad z \leq 0. \quad (48)$$

جواب حدی دو معادله (۴۷) و (۴۸) به صورت زیر می‌باشد  
(. برای بلور مایع نماتیک MBBA،  $d\gamma \cong 10^{-3}$  و  $z\gamma \cong 10^{-3}$ ، بنابراین  $d \cong 10^{-6}$ ،  $z \cong 10^{-6}$ ).

$$v_{1x}(y, z) = C_{1,\gamma} - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega (\gamma a^\gamma - \gamma a \gamma^\gamma z) e^{-az}}{a^\gamma (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)}, \quad z \geq 0. \quad (49)$$

$$v_{1x}(y, z) = C_{3,\gamma} - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega (\gamma a^\gamma + \gamma a \gamma^\gamma z) e^{-az}}{a^\gamma (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)}, \quad z \leq 0. \quad (50)$$

در معادلات فوق  $C_{1,\gamma} = C_1 + C_3$  و  $C_{3,\gamma} = C_2 + C_4$ ، که با توجه به شرط مرزی به دست می‌آیند. بنابراین

$$v_{1x}(y, z) = -\omega y - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega}{a^\gamma (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)} [(\gamma a^\gamma - \gamma a \gamma^\gamma z) e^{-az} + (-\gamma a^\gamma + \gamma a d \gamma^\gamma / 2) e^{ad/2}], \quad z \geq 0. \quad (51)$$

$$v_{1x}(y, z) = -\omega y - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega}{a^\gamma (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)} [(\gamma a^\gamma + \gamma a \gamma^\gamma z) e^{-az} + (-\gamma a^\gamma + \gamma a d \gamma^\gamma / 2) e^{ad/2}], \quad z \leq 0. \quad (52)$$

با توجه به نیازی که به این مولفه‌های سرعت برای محاسبه گشتاور خواهیم داشت، در این جا این سه مؤلفه را به طور مجزا بازنویسی می‌کنیم.

$$v_x(y, z) = -\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d / 2)} \cosh(\gamma z) - \omega y \beta - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega}{a^\gamma (\alpha_\gamma + \alpha_\delta)} [(\gamma a^\gamma - \gamma a \gamma^\gamma z) e^{-az} + (-\gamma a^\gamma + \gamma a d \gamma^\gamma / 2) e^{ad/2}] \beta, \quad z \geq 0. \quad (53)$$

که در آن  $A$  و  $B$  ثابت‌هایی هستند که با در نظر گرفتن شرط مرزی تعیین می‌شوند و برابرند با:

$$A = 0 \quad \text{و} \quad B = -\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d / 2)} \quad (41)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_{1x}(y, z) = f(y)g(z) = -\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d / 2)} \cosh(\gamma z). \quad (42)$$

(ب) تقریب مرتبه اول

معادلات مربوط به تقریب مرتبه اول معادله (۳۶) به صورت زیر می‌باشند.

$$\rho i \omega v_{1x} = \frac{\alpha_\gamma}{2} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} (\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} (\alpha_\gamma + \alpha_\delta) e^{-az} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial y \partial z} + a (\alpha_\gamma + \alpha_\delta) e^{-az} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y}, \quad (43)$$

( $z \geq 0$ )

$$\rho i \omega v_{1x} = \frac{\alpha_\gamma}{2} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} (\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} (\alpha_\gamma + \alpha_\delta) e^{-az} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial y \partial z} - a (\alpha_\gamma + \alpha_\delta) e^{-az} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y}. \quad (44)$$

( $z \leq 0$ )

اکنون رابطه (۴۲) را در معادله‌های (۴۳) و (۴۴) جایگذاری کرده و با توجه به این که مؤلفه  $v_{1x}(y, z)$  حداکثر می‌تواند تابع درجه اولی از متغیر  $y$  باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 v_{1x}}{dz^2} - \gamma^2 v_{1x} - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega}{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \cosh(\gamma d / 2)} [\gamma \sinh(\gamma z) + \gamma a \cosh(\gamma z)] e^{-az} = 0, \quad z \geq 0. \quad (45)$$

$z \geq 0$ .

$$\frac{d^2 v_{1x}}{dz^2} - \gamma^2 v_{1x} - \frac{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \omega}{(\alpha_\gamma + \alpha_\delta) \cosh(\gamma d / 2)} [\gamma \sinh(\gamma z) - \gamma a \cosh(\gamma z)] e^{-az} = 0, \quad z \leq 0. \quad (46)$$

و

$$\Delta\Gamma_z = \frac{\rho\pi da^{\frac{3}{2}}}{4} \frac{d\omega}{dt} \beta. \quad (62)$$

را می توان بر حسب کمیت های بدون بعد  $\Delta f_1$  و  $\Delta f_2$  به صورت زیر نوشت [۵]:

$$\Delta\Gamma_z = \rho\pi da^{\frac{3}{2}} \frac{d\omega}{dt} [\Delta f_1 + i\Delta f_2]. \quad (63)$$

از مقایسه دو رابطه (۶۲) و (۶۳) مشاهده می شود که،

$$\Delta f_1 = \frac{\beta}{4} \quad \text{و} \quad \Delta f_2 = 0.$$

#### ۴. بحث و نتیجه گیری

ما در این مقاله معادلات هیدرودینامیک حاکم بر بلور مایع نماتیکی محبوس در یک تیغه به ضخامت  $d$ ، در میدان مغناطیسی عمود بر صفحات آن را برای نمونه بافت دار مسطح حل نموده و سپس مؤلفه های میدان سرعت را تا تقریب مرتبه اول  $\beta$  به دست آوریم.

آن گاه گشتاور یا  $\Delta f_1$  و  $\Delta f_2$  را برای بلور مایع نماتیکی  $MBBA$  به دست آورده و مشاهده شد که  $\Delta f_1$ ، متناسب با تغییر بسامد تشدید و  $\Delta f_2$ ، متناسب با پهنای باند تشدید دارای مقادیر زیر هستند.

$$\Delta f_1 = \frac{\beta}{4}, \quad \Delta f_2 = 0. \quad (64)$$

بنابراین بسامد تشدید نوسانگر حاوی بلور مایع نماتیکی توسط رابطه زیر داده می شود.

$$\nu_R = \nu - \frac{\pi\nu \cdot \rho a^{\frac{3}{2}} d}{4I} \left(\frac{\beta}{4}\right), \quad (65)$$

که در آن  $\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{C}{I}\right)^{1/2}$ ، بسامد تشدید تیغه خالی و  $I$  ممان اینرسی نوسان گر خالی و  $C$  ثابت پیچش می باشند.

همان طور که مشاهده می شود در میدان های مغناطیسی قوی تغییرات پهنای خط صفر و تغییرات بسامد تشدید نسبت به بلور بدون بافت کوچک است. این نتیجه می تواند علاوه بر تعیین مقدار  $\beta$  توسط اندازه گیری تغییرات بسامد تشدید و تابعیت آن نسبت به میدان مغناطیسی، در حل عددی مسئله در تمام میدان ها نیز کمک شایانی را انجام دهد. همچنین با معلوم

$$v_x(y, z) = -\frac{\omega y}{\cosh(\gamma d/2)} \cosh(\gamma z) - \omega y \beta - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)\omega}{a^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} [(2a^2 + 3a\gamma^2 z)e^{-az} + (-2a^2 + 3ad\gamma^2/2)e^{ad/2}] \beta, \quad z \leq 0. \quad (54)$$

$$v_y(x, z) = 0 \quad z \geq 0 \quad \text{و} \quad z \leq 0. \quad (55)$$

$$v_z(x) = 0 \quad z \geq 0 \quad \text{و} \quad z \leq 0. \quad (56)$$

همان طور که مشاهده می شود در این نوسانگر پیچشی، جریان های شعاعی به درون و برون مرکز تیغه و مماسی (حلقوی) به ازای هر مقدار  $z$  وجود دارند. این جریانها کاملاً در صفحه هایی به موازات صفحه نوسانگر پیچشی بوده و تابعی از کمیت های خارجی  $B$ ،  $d$  و  $\omega$  می باشند. مشخصات بلور مایع در کمیت های  $\beta$ ،  $B_C$  و  $\alpha_i$  خود را نشان می دهند.

#### ۳. محاسبه گشتاور وارد بر تیغه

گشتاور وارد بر تیغه نازک بلور مایع که به صورت نوسانگر پیچشی در آمده است در میدان مغناطیسی عمود بر صفحات آن از رابطه زیر تبعیت می کند

$$\Gamma_z = \rho \frac{d}{dt} \int (xv_y - yv_x) d^2x. \quad (57)$$

تغییرات گشتاور اعمال شده در دو مورد  $B > B_C$ ،  $B \leq B_C$  و  $(\Gamma_z(\beta))$ ،  $(\Gamma_z(\pi/2))$  را با  $\Delta\Gamma_z$  نشان داده و برابر است با:

$$\Delta\Gamma_z(\beta) = \Gamma_z(\beta) - \Gamma_z(\pi/2), \quad (58)$$

که در آن برای میدان های  $B \leq B_C$ ،  $\Delta\Gamma_z = 0$  می باشد.

با توجه به رابطه های (۵۳) تا (۵۸) داریم:

$$\Gamma_{1z} = \frac{\rho\pi a^{\frac{3}{2}}}{4} \frac{d\omega}{dt} \left[ \frac{\tanh(\gamma d/2)}{\gamma} + (d/2)\beta \right], \quad z \geq 0. \quad (59)$$

$$\Gamma_{2z} = \frac{\rho\pi a^{\frac{3}{2}}}{4} \frac{d\omega}{dt} \left[ \frac{\tanh(\gamma d/2)}{\gamma} + (d/2)\beta \right], \quad z \leq 0. \quad (60)$$

در نتیجه،

$$\Gamma_z = \Gamma_{1z} + \Gamma_{2z} = \frac{\rho\pi a^{\frac{3}{2}}}{4} \frac{d\omega}{dt} \left[ \frac{2 \tanh(\gamma d/2)}{\gamma} + d\beta \right], \quad (61)$$

بستگی به  $\theta$  و  $\theta_m$  پیدا می‌کند. با تلفیق این دو نتیجه می‌توان علاوه بر تأیید نظریه مربوط به خطوط  $NMR$ ، برخی از کمیات بلور مایع را به صورت نظری محاسبه کرد.

بودن  $\beta$  می‌توان از رابطه (۱۲) مقادیر  $\beta$  و یا  $\theta(z)$  را بر حسب میدان مغناطیسی یا ضخامت تیغه تعیین کرد.

تعیین شکل خطوط  $NMR$  بلور مایع محبوس در تیغه [۶] و پهنای خط آن نیاز به تابع توزیع چگالی دارد، که آن هم

### مراجع

1. P G De Gennes and J Prost The Physics of Liquid Crystals, 2nd ed, (Oxford University Press, 1993).
2. W H de Jeu, Physical Properties of Liquid Crystalline Materials (Gordon and Breach, 1980).
3. M A Shahzamanian and M Ghafari, To be appeared in *J. Molecular Crystals and Liquid Crystals*, (2004) 414.
4. M A Shahzamanian, *J. Phys: Condens. Matter* (1995) 6833.
5. J R Hook, *Phys Rev Lett* 37 (1988) 954.
6. M A Shahzamanian and Babaei, *MSM 99 B*, (World Scientific 1999).