

## تراکم بوز اینشتین گازها در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ

محمد ابراهیم زمردیان و رمضانعلی سبیلی

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی مشهد، کد پستی ۹۱۷۷۵-۱۴۳۶

(دریافت مقاله: ۸۳/۲/۲۵ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۳/۹/۳۰)

### چکیده

در این مقاله یک تحلیل از تراکم بوز اینشتین برای دستگاهی از ذرات با اسپین صفر را که با یکدیگر برهمکنش ندارند در یک پتانسیل نوسانگر ارائه می‌دهیم. نشان خواهیم داد که یک دستگاه مقید چه از نظر کمی و چه از نظر کیفی با یک دستگاه نامقید از گازها (دستگاه بوزون آزاد) تفاوت دارد. یک تفاوت بسیار مهم آن است که برخلاف دستگاهی از بوزونهای آزاد، در دستگاهی از بوزونهای مقید یک دمای بحرانی وجود ندارد. موضوع تراکم بوز اینشتین در این پتانسیل نوسانگر هماهنگ را چه از نظر عددی و چه از نظر تحلیلی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تراکم بوز اینشتین، گاز بوزون، گذار فاز

### ۱. مقدمه

یکی از خواص جالب دستگاههای بوزونی آن است که تحت شرایط خاص، این امکان وجود دارد تا گذار فازی در یک دمای بحرانی داشته باشند به طوری که همه بوزونها در حالت پایه متراکم شوند. این پدیده را تراکم بوز - اینشتین (BEC) می‌نامند. اینشتین بعد از مرور مقاله دانشمند هندی به نام بوز در خصوص آمار فوتونها و توزیع پلانک این نظریه را در مقاله‌ای در سال ۱۹۲۴ مطرح نمود [۱]. اما هفتاد سال طول کشید تا کرنل و ویمن در سال ۱۹۹۵ توانستند BEC را در آزمایشگاه ایجاد کنند.

توسعه مهمی که در سالهای اخیر صورت گرفته است مشاهده BEC در گازهای بسیار سرد روییدیوم [۲]، لیتیوم [۳]، و سدیم [۴] است. این گازها بسیار رقیق هستند و با تقریب مرتبه اول می‌توان انتظار داشت که با یک مدل گاز بوزونی ساده

با هیچگونه برهمکنشی بین آنها قابل توصیف باشند. آنها در یک پتانسیل مغناطیسی مقید هستند و می‌توان این پتانسیل را با پتانسیلهای نوسانگر هماهنگ مدل سازی کرد. مطالعات زیادی از BEC در پتانسیلهای نوسانگر هماهنگ مقید صورت گرفته است [۵-۶]. در این مقاله تراکم بوزونها در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ با روشی مورد بررسی قرار می‌گیرد که از تقریب چگالی حالتها آن گونه که در مراجع [۵-۶] انجام شده است استفاده نگردیده است. در بررسیهای انجام شده به این نتیجه جالب می‌رسیم که برخلاف گازهای بوزونی آزاد، در این حالت یک دمای بحرانی که انتقال فاز را تأیید کند وجود ندارد. با دو روش تحلیلی و عددی دمایی را به دست می‌آوریم که در آن دما گرمای ویژه بیشینه است. این دما را می‌توان به عنوان دمایی تعریف نمود که BEC در آن رخ می‌دهد.

برای بوزونها در فضای آزاد رخ می‌دهد نمی‌تواند برای بوزونهای محبوس در نوسانگر هماهنگ رخ دهد. در مورد گاز بوزونی در فضای آزاد بدون هیچ پتانسیل محدودکننده، ضمن آنکه دما پایین می‌آید پتانسیل شیمیایی از مقادیر منفی به مقدار صفر صعود می‌کند و این با نتیجه عمومی  $\mu = E_0$  که در بالا ذکر گردید سازگار است (پایینترین تراز انرژی برای گاز بوزونی آزاد صفر است). مقدار دما که در آن دما  $\mu = 0$  است را دمای بحرانی  $T_c$  تعریف می‌کنیم. این دما برحسب دانسیته ذرات تعیین می‌شود. برای گاز بوزون آزاد در دمای پایین تراز  $\mu, T_c$  در مقدار صفر باقی می‌ماند و چون تعداد ذرات در حالت‌های برانگیخته محدود است، بنا بر این هر گاه تعداد ذرات از حد بیشینه حالت‌های برانگیخته تجاوز کند تنها امکان برای ذرات اضافی آن است که در حالت پایه قرار گیرند. این امر به BEC منجر می‌شود و جزئیات کامل آن در کتابهای درسی آمده است [۷-۸].

منشاء رفتار متفاوت بین گاز بوزونی آزاد و گاز بوزونی مقید می‌تواند به وضوح با بررسی تعداد ذرات حالت پایه با انرژی  $\frac{3}{4}\hbar\omega$  مشاهده شود. علاوه بر کمیت بدون بعد  $x$  کمیت حد پتانسیل شیمیایی است که به مقدار بحرانی می‌رسد. تعداد ذرات در حالت پایه بر حسب  $x$  و  $\mathcal{E}$  عبارت است از:

$$\left( N_{\text{پایه}} = \frac{1}{e^{\mathcal{E}x} - 1} \right). \quad (5)$$

به ازای  $\mathcal{E} \rightarrow 0$  داریم  $N_{\text{پایه}} \rightarrow \infty$ . به ازای یک مقدار معین  $x$  و  $N$  تعداد کل ذرات در حالت پایه و حالت برانگیخته، از رابطه (۵) واضح است که  $\mathcal{E} > \left( \frac{1}{x} \right) \ln \left[ \frac{(N+1)}{N} \right]$  و آنکه  $\mathcal{E}$  تنها در صورتی صفر می‌شود که داشته باشیم  $T \rightarrow 0$  یا  $N \rightarrow \infty$ . با این همه همان گونه که از رابطه (۵) پیداست به ازای یک  $N$  ثابت به محض آنکه  $\mathcal{E}$  به اندازه کافی کوچک باشد، لزوماً تنها حالت پایه است که اشغال می‌شود. دمایی که در آن دما، حالت پایه شروع به افزایش قابل ملاحظه‌ای در تعداد ذرات می‌کند از اهمیت

## ۲. پتانسیل نوسانگر هماهنگ

فرض می‌کنیم که دستگاه را بتوان توسط یک آنسامبل ماکروکانونی توصیف کرد. این آنسامبل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q = - \sum_N \text{Ln}(1 - z \exp(-\beta E_N)), \quad (1)$$

که در آن  $\beta = (kT)^{-1}$  و  $E_N$  انرژی ترازها می‌باشد.  $z = e^{\beta\mu}$  به عنوان ناپایایی (fugacity) دستگاه تعریف می‌شود که عاملی برحسب پتانسیل شیمیایی  $\mu$  است. با بسط لگاریتم در رابطه (۱) می‌توان رابطه زیر را به دست آورد

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_N \exp(-n\beta E_N). \quad (2)$$

برای یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد با فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  ترازهای انرژی با رابطه  $E_{n_1, n_2, n_3} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{4})$  داده می‌شوند که اگر قرار دهیم  $n_1 + n_2 + n_3 = K$  و  $(K \in N)$  در این صورت ترازهای انرژی به صورت  $E_K = \left( K + \frac{3}{4} \right) \hbar\omega$  با چندگانگی  $\frac{(K+1)(K+2)}{2}$  مرتب می‌شوند. با انجام جمع‌بندی بر روی رابطه (۲) به رابطه زیر می‌رسیم،

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\beta(\mu - \frac{3}{4}\hbar\omega)}}{n(1 - e^{-nx})^2}. \quad (3)$$

در این رابطه متغیر بدون بعد  $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$  را وارد کرده‌ایم. تعداد ذرات از فرمول  $N = \beta^{-1} \left( \frac{\partial q}{\partial \mu} \right)_{T, \omega}$  به دست می‌آید که با استفاده از رابطه (۳) داریم:

$$N = \sum \frac{e^{n\beta(\mu - \frac{3}{4}\hbar\omega)}}{(1 - e^{-nx})^2} \quad (4)$$

به منظور آنکه تعداد ذرات مثبت و محدود بماند لازم است داشته باشیم  $\mu \leq \frac{3}{4}\hbar\omega$ . عموماً مورد نیاز است؛  $\mu \leq E_0$  که در آن  $E_0$  پایینترین تراز انرژی است.

معمولاً دمای بحرانی برای BEC دمایی است که در آن  $\mu = E_0 = \frac{3}{4}\hbar\omega$  باشد. برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد  $\mu = \frac{3}{4}\hbar\omega$  است. اکنون آسان است تا نشان دهیم BEC به همان شیوه‌ای که

آزاد،  $\varepsilon$  در دمای غیر صفر که به دمای بحرانی معروف است صفر می‌شود. از پایه  $N$  برای نوسانگر هماهنگ می‌توان مشاهده کرد که سقوط ناگهانی  $\varepsilon$  به یک افزایش ناگهانی عدد اشغال حالت پایه وابسته است و از این رو این پدیده به تراکم بوز اینشتین منجر می‌شود. اگرچه پتانسیل شیمیایی دارای یک تغییر ناگهانی است، اما این تغییر کاملاً به طور هموار رخ می‌دهد. بدین ترتیب تشخیص یک دمای بحرانی خاص در این مورد امکان پذیر نیست. یک تقریب که در دستگاه با حجم متناهی بکار می‌رود محاسبهٔ بیشینهٔ گرمای ویژه است. دمایی را که این بیشینه در آنجا رخ می‌دهد دمای بحرانی می‌نامند. در نمودار ۲ منحنی پر رنگ نتیجه محاسبات گرمای ویژه را با استفاده از مجموعه‌های نوسانگر هماهنگ دقیق نشان می‌دهد. همان گونه که از نمودار پیداست یک گرمای ویژه بیشینه در  $x_m \approx 0.921$  مشاهده می‌شود، که مطابق است با  $T \approx 3/127 \times 10^{-8} K$ . در شکل فوق نیز گذار فازی مشاهده نمی‌شود.

به منظور مقایسه نتایج بالا با نتایج حاصل از تحقیقات مختلف دیگری که در این زمینه صورت گرفته است، شکل ۳ تغییرات گرمای ویژه را بر حسب دما که از مرجع [۱۰] اقتباس شده است در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ نشان می‌دهد. همان گونه که از شکل پیداست گرمای ویژه به ازای مقادیر مختلف ذرات،  $N$ ، هیچگونه گذاری را از خود نشان نمی‌دهد. به عبارت دیگر مانند نمودار ۲ تشخیص یک دمای بحرانی خاص در این مورد نیز امکان پذیر نیست. در شکل ۴ تغییرات گرمای ویژه بر حسب دما برای تعداد متفاوتی از ذرات به همراه نتایج عددی دقیق آمده است [۱۱]. بر خلاف شکل‌های ۲ و ۳، نمودار فوق یک گذار فاز را در نقطه  $F = T_0$  از خود نشان می‌دهد. همچنین محاسبات انجام شده توسط یک تقریب نیمه کلاسیکی و با استفاده از یک نوسانگر هماهنگ غیر همگن سه بعدی، بار دیگر یک گذار فاز واقعی را به دست می‌دهد [۱۲]. با این همه در مرجع [۱۱] ادعا شده است که هرگاه تصحیحاتی بر روی محاسبات انجام شود، این ناپیوستگی در منحنی گرمای ویژه که منجر به گذار فاز واقعی می‌شود از بین خواهد رفت. بدین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که در

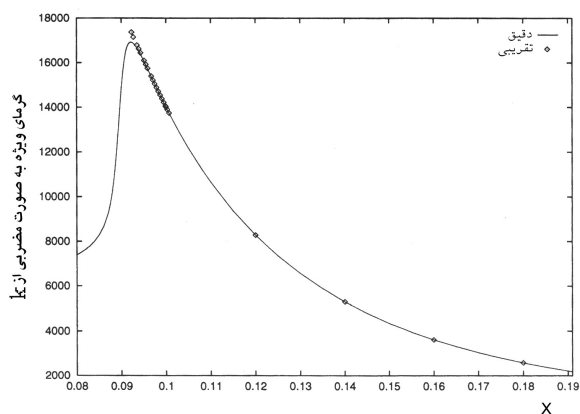
بسیار بالایی برخوردار است. این افزایش قابل ملاحظه با تغییرات آرام دما صورت می‌گیرد به گونه‌ای که بر خلاف رفتار بوزونهای آزاد گذار فازی مشاهده نمی‌شود. به عبارت دیگر هر چند کمیات، به طور سریع تغییر می‌کنند، اما هر تحولی به آرامی صورت می‌گیرد، و هیچگونه ناپیوستگی رخ نمی‌دهد. گرمای ویژه در حد دماهای بالا، یعنی  $x = \frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$  عبارت است از:

$$\frac{C}{k} = \frac{12\zeta_R(4)}{x^3} + \frac{9\zeta_R(3)}{x^2} + \frac{2\zeta_R(2)}{x} - \frac{12\varepsilon\zeta_R(3)}{x^2} - \frac{18\varepsilon^2\zeta_R(2)\zeta_R(3)}{x^3} - \frac{9\varepsilon^2\zeta_R(3)^2}{x^2} + \frac{9\varepsilon^4\zeta_R(2)\zeta_R(3)^2}{x^6} + O(\ln x, \frac{\varepsilon}{x}) \quad (6)$$

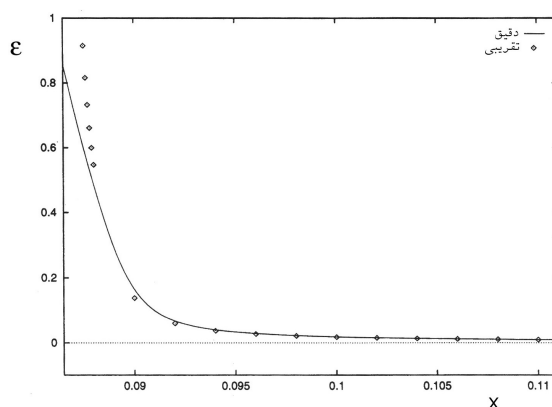
همچنین در این حد مجانبی با استفاده از رابطه (۴) می‌توان نشان داد،

$$N = N_{\text{پایه}} + \frac{\zeta_R(3)}{x^3} + \frac{\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)\zeta_R(2)}{x^2} + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad (7)$$

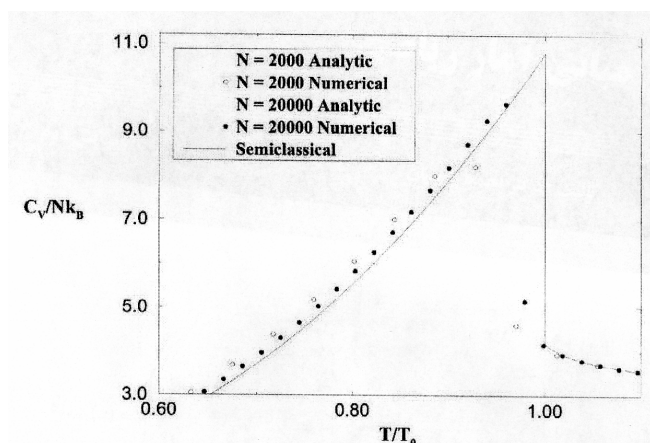
نتایج بالا یک توصیف کلی را بر روی کل گستره دمای مورد توجه، برای آزمایشهایی که در این زمینه انجام شده است ارائه می‌دهند. به عنوان مثال، پارامترهایی را که برای اتم رویدیم به کار رفته است انتخاب می‌کنیم. در این مورد داریم  $\frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$ ،  $N = 3000$  [۹]. هدف آن است که پتانسیل شیمیایی را که توسط  $\varepsilon$  داده می‌شود محاسبه کنیم (یادآوری می‌کنیم:  $\mu = \hbar\omega\left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)$ )، این را می‌توان با حل رابطه (۴) برای  $\varepsilon$  به صورت تابعی از  $x$  انجام داد (شایان ذکر است که  $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$ ، عبارت است از عکس دما در واحدهای بدون بعد مناسب) نتیجه عددی این محاسبه به صورت خطوط پر رنگ در نمودار ۱ آمده است. همان گونه که از نمودار پیداست  $\varepsilon$  از مقادیر مرتبهٔ واحد به مقادیری از مرتبه  $10^{-2}$  بر روی گستره بسیار کوچکی از  $x$  سریعاً نزول می‌کند. بعد از این کاهش سریع،  $\varepsilon$  با افزایش  $x$  (یا کاهش  $T$ ) به طور مجانبی به صفر کاهش می‌یابد. این نتیجه با یک گذار فاز واقعی مانند آنچه که در گاز بوزون آزاد روی می‌دهد مغایر است، زیرا در گاز بوزون



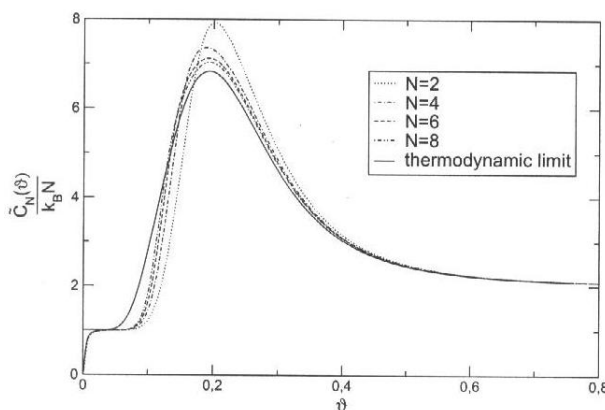
نمودار ۲. تغییرات  $C_V$  برحسب  $X$  برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد.



نمودار ۱. تغییرات  $E$  به صورت تابعی از  $X$  برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد.



نمودار ۴. تغییرات  $C_V$  برحسب دما برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد [۱۱].



نمودار ۳. تغییرات  $C_V$  برحسب دما برای نوسانگر هماهنگ همسانگرد [۱۰].

اگر  $f$  را به صورت کسری از ذرات در حالت پایه تعریف کنیم،

$$N \text{ پایه} = fN, \tag{۸}$$

در این صورت با توجه به رابطه (۵) داریم:

$$\varepsilon x = \ln\left(1 + \frac{1}{fN}\right), \tag{۹}$$

$$(1-f)N \approx \zeta_R(3)x^{-3} + \left(\frac{3}{2} - \varepsilon\right)\zeta_R(2)x^{-2}. \tag{۱۰}$$

$\varepsilon$  را می توان با استفاده از روابط (۹) و (۱۰) حذف نمود. این منجر به یک معادله درجه سه می شود که از روی آن می توان  $x$  را برای یک  $N$  و  $f$  مفروض تعیین کرد. پس از تعیین  $x$ ،  $\varepsilon$  را می توان توسط رابطه (۹) به دست آورد. نتیجه این محاسبات

دستگاههای با تعداد محدودی از ذرات، گذار فاز واقعی وجود ندارد. از طرف دیگر در این نوع دستگاهها یک ناحیه شبه تراکمی موجود است که در آن ناحیه بخش عمده ای از ذرات در دمایی که مقدار آن به  $N$  بستگی دارد، به پایینترین تراز سقوط می کنند. آزمایشات حقیقی این گونه شبه گذارهایی را از خود نشان می دهند [۱۳، ۱۴].

اکنون به محاسبه تحلیلی موضوع می پردازیم. چون در تقریبهای به کار گرفته شده فرض بر این است که  $x$  و  $\varepsilon$  هر دو باید بسیار کوچک باشند، نتایج به ازای  $x \leq x_m \approx 0.0921$  با مشکل مواجه می شوند، زیرا نمودار ۱ نشان می دهد که  $\varepsilon$  به ازای این مقدار  $x$  کاملاً بزرگ است.

است مقایسه می‌نماییم. اگر چه بر خلاف آنچه که در مورد گاز بوزون آزاد مشاهده می‌شود هیچ گونه گذار فازی وجود ندارد، اما با ملاحظه بیشینه گرمای ویژه امکان دارد دمایی را مشخص کنیم که در آن دما BEC رخ می‌دهد. مشاهده می‌شود که این دما به طور تقریبی با دمایی که در آن دما عدد اشغال حالت پایه شروع به افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌کند یکسان است.

شایان ذکر است این نوع گذار فاز، با گذار فاز واقعی که در یک گاز ایده آل رخ می‌دهد، متفاوت است، زیرا به منظور دستیابی به یک گذار واقعی، تعداد ذرات و همچنین حجم اشغال شده توسط آنها باید بسیار بزرگ باشد، ضمن آنکه چگالی ذرات نیز باید ثابت نگاه داشته شود. روشن است که هیچ گونه دستگاه واقعی قادر نیست از این خصوصیات برخوردار باشد. با این همه در بسیاری از دستگاه‌های ماکروسکوپیکی همگن، حد ترمودینامیکی که در آن مرزها یک نقش غیر مهم را ایفا می‌کنند، تقریب خوبی برای این وضعیت تجربی است. از طرف دیگر در پتانسیل نوسانگر هماهنگی که تراکم بوز اینشتین مورد بررسی قرار می‌گیرد نه تنها تعداد ذرات در مقایسه با دستگاه‌های متداول بسیار محدود است، بلکه مرزی که توسط چاه پتانسیل تعریف می‌شود عملاً در کل دستگاه گسترده است. به منظور برآورده نمودن حد ترمودینامیکی در این گونه دستگاه‌ها لازم است پتانسیل را تضعیف کرد به طوری که با افزایش تعداد ذرات، میانگین چگالی ثابت بماند. در این حالت می‌توان ترازهای انرژی در یک نوسانگر هماهنگ را مانند یک دستگاه ماکروسکوپیکی پیوسته تلقی کرد و همانند یک گاز ایده‌آل به گذار واقعی دست یافت [۱۴، ۱۳].

تقریبی  $\mathcal{E}$  به صورت لوزی‌هایی در نمودار ۱ آمده است. همان گونه که انتظار می‌رود به محض آنکه  $x$  به کمتر از  $x_m \approx 0.921$  کاهش می‌یابد، سازگاری بین نتیجه تقریبی و نتیجه دقیق نقض می‌شود. با این همه در ناحیه‌ای که در آنجا بیشینه گرمای ویژه رخ می‌دهد، دو نتیجه با یکدیگر کاملاً سازگارند. با افزایش  $x$  (به طوری که دما کمتر از دمای بحرانی می‌شود) سازگاری بین مقدار تقریبی برای  $\mathcal{E}$  و مقدار واقعی بهتر می‌شود. افزایش مقدار  $x$  متناظر با افزایش کسر ذرات در حالت پایه است.

اکنون به بررسی گرمای ویژه با جزئیات بیشتر می‌پردازیم. در شکل ۲ لوزیها گرمای ویژه تقریبی را در حد مجانبی  $1 < x < \mathcal{E}$  با روشی شبیه به روش انجام شده در نمودار اول نشان می‌دهند. منحنی پر رنگ نیز نتایج دقیق را به ما می‌دهد. همان گونه که از شکل پیداست، دو نتیجه در ناحیه  $x \geq x_m$  با یکدیگر سازگاری کامل دارند. با این همه به ازای مقادیر  $x < x_m$ ، این سازگاری نقض می‌شود، زیرا در این ناحیه بار دیگر  $\mathcal{E}$  به ازای مقادیر  $x$ ، به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ است، حال آنکه محاسبات ما بر مبنای  $\mathcal{E}$  های کوچک انجام شده است. در نمودار فوق بیشینه گرمای ویژه متناظر است با  $x_m \approx 0.921$ . این بیشینه گرمای ویژه که مطابق با دمایی است که در آن دما حالت پایه به طور قابل ملاحظه‌ای انباشته می‌شود، را می‌توان به عنوان دمای گذار در نظر گرفت.

### ۳. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک تحلیل از چندین متغیر دینامیکی را برای یک دستگاه از ذرات غیر برهمکنش با اسپین صفر در یک پتانسیل نوسانگر هماهنگ انجام می‌دهیم و نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده از تحقیقات مختلفی که در این زمینه صورت گرفته

### مراجع

1. A Einstein, *S B Preus. Akad. Wiss.* **22** (1924) 261.
2. M H Anderson et al., *Science* **269** (1995) 198.
3. C C Bradley et al., *Phys. ReV. Lett.* **75** (1995) 1687.
4. K B Davis et al., *Phys. ReV. Lett.* **75** (1995) 3969.
5. V Bagnato et al., *Phys. ReV.* **A35** (1987) 4354.
6. S Grossmann and M Holthaus, *Phys. Lett.* **A208** (1995) 188.
7. K Huang, *Statistical Mechanics*, (Wiley, New York, 1987).
8. R K Pathria, *Statistical Mechanics* (Pergampon, oxford, 1972).
9. L D Landau and E M Lifshits, *Statistical Physics*, (Pergamon, London, 1969).
10. H J Schmidt and J Batke, *arXiv:cond-mat/0310588 v1 24 Oct (2003)*.

13. W J Mullin, *arXiv:cond-mat/9610005 v1 01 Oct (1996)*.
14. S Grossmann and M Holthaus, *Z. Phys. B* **97** (1995) 319.
11. H Haugerud et al., *arXiv:cond-mat/9605100 v1 16 May (1996)*.
12. H Haugerud and F Ravndal, *arXiv: cond-mat/9509041 v1 7 Sep (1995)*.