



## یک مدل عاری از تکینگی برای پتانسیل بار نقطه‌ای در حضور یک برش تکانه در فضای اقلیدسی $D$ بعدی ( $D \geq 3$ )

سعید نبی‌پور و سید کامران مؤیدی\*

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک

پست الکترونیکی: s-moayedi@araku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۸/۲۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۱۰/۱۴)

### چکیده

در نظریه الکتروستاتیک ماکسول، پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به یک بار نقطه‌ای در مکان قرار گرفتن بار بی‌نهایت است. در این مقاله یک مدل فاقد تکینگی برای پتانسیل بار نقطه‌ای در حضور یک برش تکانه  $p_{\max}$  بر اساس یک دگرگونی تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز  $2D$  بعدی ارائه می‌شود. به ازای  $p_{\max} \rightarrow \infty$  نتایج به دست آمده در این مقاله به نتایج حاصل از الکتروستاتیک ماکسول معمولی برای یک بار نقطه‌ای تبدیل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: فضای فاز، جبر هایزنبرگ دگرگون شده، الکتروستاتیک ماکسول، برش تکانه، پتانسیل بار نقطه‌ای

### ۱. مقدمه

فرض کردند که فضا ابعاد اضافه‌ای دارد که این ابعاد اضافی به دلیل کوچکی بیش از حد مشاهده پذیر نیستند. بر طبق نظریه کالوزا-کلاین یک فضا-زمان  $D+1$  بعدی ساختاری به شکل  $K_{D+1} = M_{\varphi} \times K_n$  دارد که  $M_{\varphi}$  معرف فضا-زمان چهار بعدی بوده و  $K_n$  معرف یک فضای فشرده  $n$  بعدی است. در مدل‌های کالوزا-کلاین ارتباط میان تعداد کل ابعاد فضایی، یعنی  $D$  با تعداد ابعاد فضایی اضافی  $n$  به شکل  $D = n + 3$  است [۱ و ۲]. بر اساس مطالعات انجام گرفته در گرانش کوانتومی و نظریه ریسمان، فضای فشرده  $K_n$  می‌تواند به شکل یک کره  $n$

بر اساس تجارب روزمره به نظر می‌رسد، فضایی که ما در آن زیست می‌کنیم باید سه بعدی باشد. با این وجود گروهی از فیزیکدانان بر این باورند که شاید فضا ابعادی بیشتر از سه بعد داشته باشد [۱-۳]. در واقع ایده وجود ابعاد فضایی اضافی برای نخستین بار توسط تئودور کالوزا<sup>۱</sup> در سال ۱۹۲۱ میلادی و اسکار کلاین<sup>۲</sup> در سال ۱۹۲۶ میلادی مطرح شد [۱-۳]. این دو نفر

۱. Theodor Kaluza

۲. Oskar Klein

در رابطه (۲) به ازای  $D = 2$  به شکل زیر در می آید:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln r + const. \quad (3)$$

همان گونه که روابط (۲) و (۳) نشان می دهند مقدار پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi(\vec{x})$  در مکان قرار گرفتن بار نقطه ای  $q$  ( $r = 0$ ) به ازای  $D \geq 3$  به شکل توانی و به ازای  $D = 2$  به صورت لگاریتمی واگرا می شود. یکی دیگر از ایرادهای وارد بر نظریه الکترومغناطیس ماکسول مسئله نامتناهی شدن خود-انرژی مربوط به بارهای نقطه ای در این نظریه است. یکی از روش های ممکن برای دستیابی به یک فرمول بندی متناهی از نظریه الکترومغناطیس ماکسول که در آن مقدار خود-انرژی وابسته به بارهای نقطه گون نظیر الکترون مقداری متناهی به دست آید وارد کردن ایده وجود یک کمینه طول قابل اندازه گیری در اندازه گیری فواصل مکانی به درون ساختار این نظریه است [۹-۱۳]. به لحاظ تاریخی فرضیه وجود یک طول کمینه در اندازه گیری بازه های مکانی برای نخستین بار در مدل های گوناگون برای گرانش کوانتومی نظیر نظریه ریسمان مطرح شده است که در اینجا برای مطالعه شرح کاملی از این موضوع خواننده را به مقاله مروری [۹] ارجاع می دهیم. نکته ای که در اینجا توجه به آن ضروری به نظر می رسد آن است که در هنگام باز فرمول بندی<sup>۱</sup> نظریه های میدان همانند نظریه الکترودینامیک ماکسول در حضور یک کمینه طول قابل اندازه گیری، پارامتر کمینه طول به مانند یک تنظیم کننده عمل کرده و باعث حذف بسیاری از واگرایی ها در نظریه میدان باز فرمول بندی شده بر اساس فرض وجود یک طول کمینه در اندازه گیری بازه های مکانی می شود [۱۴-۱۷]. در سال ۲۰۱۶ میلادی فیزیکدان اوکراینی تکاچوک<sup>۲</sup> موفق به ارائه گسترش تک پارامتری از جبر هایزبرگ در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی شد که در ساختار این جبر وجود یک برش تکانه پیش بینی شده بود [۱۵]. در بخش ۲ این مقاله، مروری کوتاه بر ساختار جبر هایزبرگ دگرگون شده<sup>۳</sup> معرفی شده توسط

بعدی، یعنی  $S^n$  و یا یک چنبره  $n$  بعدی، یعنی  $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ times}}$  باشد [۱ و ۲]. امروزه فیزیکدانان معتقدند که بررسی قوانین فیزیک در یک فضای  $D$  بعدی، صرف نظر از جذابیت های ریاضی می تواند به درک عمیق تری از قوانین فیزیک در جهان واقعی لافل در مقیاس ماکروسکوپی که برای آن  $D = 3$  است منجر شود [۱-۳]. نظریه الکترومغناطیس ماکسول یکی از بنیادی ترین نظریه های علم فیزیک است که به بررسی قوانین مربوط به برهم کنش میان ذرات باردار در مقیاس ماکروسکوپی می پردازد [۴]. این نظریه می تواند پدیده هایی نظیر انتشار نور در محیط های ناهمگن که برای آن محیط ها، ضریب شکست تابعی از مکان در نظر گرفته می شود و هم چنین انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل موجرها را توصیف کند [۵-۷]. برای تعیین شکل پتانسیل کولن که همان پتانسیل وابسته به یک بار نقطه ای  $q$  در مبدأ یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی است لازم است تا معادله پواسون زیر حل شود

$$\nabla_D^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(D)}(\vec{x}), \quad (1)$$

که  $\delta^{(D)}(\vec{x}) = \delta(x^1) \delta(x^2) \dots \delta(x^D)$  تابع دلتای دیراک و  $\nabla_D^2 = \sum_{i=1}^D \partial_i \partial_i$  عملگر لاپلاس در فضای اقلیدسی  $D$  بعدی هستند. در مراجع [۱، ۲، ۸] معادله (۱) به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که این معادله پاسخ دقیقی به شکل زیر دارد:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0 (D-2) \Omega_{D-1}} \frac{1}{r^{D-2}}, \quad (2)$$

که  $r = \left( \sum_{i=1}^D (x^i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  بوده و  $\Omega_{D-1} = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$  مساحت

گوی واحد در فضای اقلیدسی  $D$  بعدی است. به ازای  $D = 3$  رابطه (۲) به رابطه  $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  تبدیل می شود که همان شکل آشنای پتانسیل کولنی در یک فضای اقلیدسی سه بعدی است [۴]. در مرجع [۸] نویسندگان با بهره گیری از روش منظم سازی ابعادی نشان داده اند که پتانسیل کولنی معرفی شده

۱. Reformulation

۲. Tkachuk

۳. Deformed Heisenberg algebra

تکچوک در مرجع [۱۵] خواهیم داشت. در بخش ۳ شکل صریح معادله پواسون در نظریه الکتروستاتیک ماکسول بر اساس ساختار جبری معرفی شده در بخش ۲ این مقاله، در حضور یک برش تکانه در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی، به دست آورده می‌شود. در بخش ۴ با حل معادله پواسون تعمیم یافته معرفی شده در بخش ۳، برای یک بار نقطه‌ای  $q$  واقع در مبدأ فضای اقلیدسی  $D$  بعدی به ازای  $D \geq 3$ ، شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای در چارچوب ساختار جبری معرفی شده در بخش ۲ به دست می‌آید. در بخش نتیجه‌گیری این مقاله نشان می‌دهیم که برای اندازه پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته وابسته به یک بار نقطه‌ای  $q$  در بخش ۴، برای نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای  $q$  ( $r \rightarrow 0$ ) برخلاف نظریه ماکسول معمولی مقداری متناهی به دست می‌آید. هم‌چنین در رژیم انرژی‌های پایین که جبر هایزنبرگ دگرگون شده معرفی شده در مرجع [۱۵] به جبر هایزنبرگ معمولی تبدیل می‌شود، پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته وابسته به یک بار نقطه‌ای در بخش ۴ به رابطه (۲)، یعنی همان پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به بار نقطه‌ای در نظریه ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی تبدیل می‌شود.

تکچوک در مرجع [۱۵] خواهیم داشت. در بخش ۳ شکل صریح معادله پواسون در نظریه الکتروستاتیک ماکسول بر اساس ساختار جبری معرفی شده در بخش ۲ این مقاله، در حضور یک برش تکانه در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی، به دست آورده می‌شود. در بخش ۴ با حل معادله پواسون تعمیم یافته معرفی شده در بخش ۳، برای یک بار نقطه‌ای  $q$  واقع در مبدأ فضای اقلیدسی  $D$  بعدی به ازای  $D \geq 3$ ، شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای در چارچوب ساختار جبری معرفی شده در بخش ۲ به دست می‌آید. در بخش نتیجه‌گیری این مقاله نشان می‌دهیم که برای اندازه پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته وابسته به یک بار نقطه‌ای  $q$  در بخش ۴، برای نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه‌ای  $q$  ( $r \rightarrow 0$ ) برخلاف نظریه ماکسول معمولی مقداری متناهی به دست می‌آید. هم‌چنین در رژیم انرژی‌های پایین که جبر هایزنبرگ دگرگون شده معرفی شده در مرجع [۱۵] به جبر هایزنبرگ معمولی تبدیل می‌شود، پتانسیل الکتروستاتیکی تعمیم یافته وابسته به یک بار نقطه‌ای در بخش ۴ به رابطه (۲)، یعنی همان پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به بار نقطه‌ای در نظریه ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی تبدیل می‌شود.

## ۲. جبر هایزنبرگ دگرگون شده در یک فضای فاز

### $2D$ بعدی

در سال ۲۰۱۶ میلادی تکچوک گسترش تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای فاز کوانتومی  $2D$  بعدی به شکل زیر ارائه داد [۱۵]:

$$[X^i, X^j] = 0, \quad (4)$$

$$[P^i, P^j] = 0, \quad (5)$$

$$[X^i, P^j] = i\hbar\sqrt{1+\beta P^2}(\delta^{ij} + \beta P^i P^j), \quad (6)$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, D\},$$

که  $\beta$  یک پارامتر ثابت نامنفی با بعد  $(momentum)^{-2}$  بوده و  $X^i = (X^1, X^2, \dots, X^D)$  و  $P^i = (P^1, P^2, \dots, P^D)$  به ترتیب مؤلفه‌های عملگر مکان و تکانه تعمیم یافته هستند. هم‌چنین

$$X^i = x^i, \quad (7)$$

$$P^i = \frac{p^i}{\sqrt{1-\beta p^2}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, D\}, \quad (8)$$

که  $p = (\sum_{i=1}^D (p^i)^2)^{\frac{1}{2}}$  طول بردار تکانه در فضای فاز غیر دگرگون شده  $(x^i, p^i)$  است. شرط حقیقی بودن  $P^i$  در رابطه (۸) مستلزم آن است که  $p$  نامساوی زیر را برآورده سازد

$$p \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \quad (9)$$

باید توجه داشت که در رابطه (۹) با وجود این که حالت تساوی منجر به مقدار بی‌نهایت برای تکانه می‌شود ولی این مقدار بی‌نهایت هنوز حقیقی باقی می‌ماند. با توجه به رابطه (۸) ارتباط میان  $P$  با  $p$  چنین است:

$$P = \frac{p}{\sqrt{1-\beta p^2}}. \quad (10)$$

بنا به رابطه (۱۰)، بازه  $0 \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  در فضای فاز  $(x^i, p^i)$  متناظر با بازه  $0 \leq P < +\infty$  در فضای فاز  $(X^i, P^i)$  است و این بدان معنا است که در جبر هایزنبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶)، مقدار بیشینه‌ای برابر با

$$P_{max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad (11)$$

دارد. رابطه (۱۱) نشان دهنده وجود یک برش تکانه روی اندازه  $p$  است. بنا به رابطه (۱۱) در جبر هایزنبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶) می‌توان یک طول کمینه به شکل

$$\ell_0 := \frac{\hbar}{P_{max}} = \hbar\sqrt{\beta}, \quad (12)$$

تعریف کرد. با توجه به تعریف  $\ell_0$  در رابطه (۱۲)، نمایش شبه مکانی برای عملگر  $P^i$  در رابطه (۸) را می‌توان چنین نوشت:

با توجه به روابط (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) و (۱۸) چگالی لاگرانژی وابسته به الکتروستاتیک ماکسول در چارچوب جبر هایزنبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, D_i \Phi) &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 (D_i \Phi(\vec{X})) (D_i \Phi(\vec{X})) - P(\vec{X}) \Phi(\vec{X}) \\ &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \ell_0^2 \nabla_D^2}} \partial_i \phi(\vec{x}) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \ell_0^2 \nabla_D^2}} \partial_i \phi(\vec{x}) \right) \\ &\quad - \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}). \end{aligned} \quad (19)$$

بعد از انجام اندکی محاسبات می توان نشان داد که رابطه (۱۹) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\partial_i \phi) (\partial_i \phi) - \rho \phi \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \ell_0^2 (\partial_i \partial_j \phi) (\partial_i \partial_j \phi) \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \ell_0^4 (\partial_i \nabla_D^2 \phi) (\partial_i \nabla_D^2 \phi) \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \partial_j \Gamma_j + O(\ell_0^6), \end{aligned} \quad (20)$$

که

$$\begin{aligned} \Gamma_j &:= -\ell_0^2 (\partial_i \phi) (\partial_i \partial_j \phi) \\ &\quad + \frac{3}{4} \ell_0^4 [(\partial_i \phi) (\partial_j \nabla_D^2 \partial_i \phi) - (\partial_i \partial_j \phi) (\partial_i \nabla_D^2 \phi)]. \end{aligned} \quad (21)$$

دو جمله نخست در سمت راست رابطه (۲۰) همان چگالی لاگرانژی توصیف کننده نظریه الکتروستاتیک ماکسول، یعنی رابطه (۱۶) است. سایر جملات ظاهر شده در سمت راست رابطه (۲۰)، اثرات ناشی از دگرگونی جبر هایزنبرگ را نشان می دهند. در رژیم انرژی های پایین که متناظر با حد  $\ell_0 \rightarrow 0$  است، مدل (۲۰) نظریه الکتروستاتیک ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی را بازتولید می کند. لازم به تذکر است که جمله  $\frac{1}{4} \varepsilon_0 \partial_j \Gamma_j$  در رابطه (۲۰) یک جمله مشتق کلی بوده و تأثیری در معادلات حرکت ندارد، بنابراین مدل (۲۰) را می توان به صورت مؤثر زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\partial_i \phi) (\partial_i \phi) + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \ell_0^2 (\partial_i \partial_j \phi) (\partial_i \partial_j \phi) \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \ell_0^4 (\partial_i \nabla_D^2 \phi) (\partial_i \nabla_D^2 \phi) - \rho \phi + O(\ell_0^6). \end{aligned} \quad (22)$$

اکنون معادله حرکت وابسته به رابطه (۲۲) را به دست می آوریم. در مرجع [۱۸] نشان داده شده است که اگر چگالی لاگرانژی

$$p^i = \frac{P^i}{\sqrt{1 - \frac{\ell_0^2}{\hbar^2} P^2}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, D\}. \quad (13)$$

همان گونه که روابط (۷) و (۱۳) نشان می دهند در حد  $\ell_0 \rightarrow 0$ ، عملگرهای مکان و تکانه تعمیم یافته  $X^i$  و  $P^i$  به عملگرهای مکان و تکانه متعارف  $x^i$  و  $p^i$  تبدیل می شوند. روابط (۷) و (۱۳) نشان می دهند که در هنگام باز فرمول بندی یک نظریه میدان از منظر جبر هایزنبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶) لازم است تا عملگرهای مکان و مشتق استاندارد، یعنی  $(x^i, \partial_i)$  بر طبق دستورالعمل زیر با عملگرهای مکان و مشتق تعمیم یافته  $(X^i, D_i)$  جایگزین شوند:

$$x^i \rightarrow X^i = x^i, \quad (14)$$

$$\partial_i \rightarrow D_i := \frac{1}{\sqrt{1 + \ell_0^2 \nabla_D^2}} \partial_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, D\}. \quad (15)$$

بدیهی است که در حد  $\ell_0 \rightarrow 0$ ، مشتق تعمیم یافته  $D_i$  در رابطه (۱۵) به مشتق معمولی  $\partial_i$  تبدیل می شود.

### ۳. باز فرمول بندی نظریه الکتروستاتیک ماکسول در فضای فاز $2D$ بعدی $(x^i, p^i)$ با فرض وجود یک

$$P_{max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ برش تکانه}$$

چگالی لاگرانژی برای پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi(\vec{x})$  در حضور چشمه خارجی  $\rho(\vec{x})$  در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی به صورت زیر است [۱۱]:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi) = \frac{1}{4} \varepsilon_0 (\partial_i \phi) (\partial_i \phi) - \rho \phi. \quad (16)$$

رابطه (۱۶) چگالی لاگرانژی توصیف کننده نظریه الکتروستاتیک ماکسول است. تحت اثر تبدیل مختصاتی به شکل رابطه (۱۴)، پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi(\vec{x})$  و چگالی بار الکتریکی  $\rho(\vec{x})$  به صورت زیر تبدیل پیدا می کنند:

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \Phi(\vec{X}) = \phi(\vec{x}), \quad (17)$$

$$\rho(\vec{x}) \rightarrow P(\vec{X}) = \rho(\vec{x}). \quad (18)$$

توصیف کننده میدان  $\phi$  به شکل زیر باشد

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_{i_1}\phi, \partial_{i_1}\partial_{i_2}\phi, \partial_{i_1}\partial_{i_2}\partial_{i_3}\phi, \dots), \quad (23)$$

معادله اویلر-لاگرانژ وابسته به میدان  $\phi$  چنین خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{i_1} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{i_1} \phi)} \right) + \partial_{i_1} \partial_{i_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \phi)} \right) - \dots \\ + (-1)^k \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} \phi)} \right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

اگر چگالی لاگرانژی (۲۲) را در معادله اویلر-لاگرانژ تعمیم یافته (۲۴) قرار دهیم، معادله حرکت زیر برای پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi(\vec{x})$  به دست می آید:

$$\nabla_D^2 \phi(\vec{x}) - \ell_0^2 \nabla_D^2 \nabla_D^2 \phi(\vec{x}) + \ell_0^4 \nabla_D^2 \nabla_D^2 \nabla_D^2 \phi(\vec{x}) + \dots = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (25)$$

لازم به ذکر است که در به دست آوردن معادله (۲۵) از تعریف زیر استفاده شده است [۱۸]

$$\frac{\partial \phi_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial \phi_{j_1 j_2 \dots j_k}} = \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \dots \delta_{i_k}^{j_k}, \quad (26)$$

که

$$\phi_{i_1 i_2 \dots i_k} := \partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} \phi. \quad (27)$$

معادله (۲۵) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\left[ 1 - (\ell_0^2 \nabla_D^2) + (\ell_0^4 \nabla_D^4) - \dots \right] \nabla_D^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (28)$$

عبارت داخل کروشه در سمت چپ معادله (۲۸) به عبارت

$$\frac{1}{1 + \ell_0^2 \nabla_D^2}$$

شکل بسته زیر نوشت:

$$\frac{\nabla_D^2}{1 + \ell_0^2 \nabla_D^2} \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad (29)$$

و یا

$$\frac{\nabla_D^2}{1 + \frac{\hbar^2}{p_{max}^2} \nabla_D^2} \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (30)$$

معادله (۳۰) همان معادله پواسون در حضور برش تکانه  $p_{max}$

(رابطه (۱۱)) است. در حد  $\ell_0 \rightarrow 0$  ( $p_{max} \rightarrow \infty$ ) معادله

پواسون تعمیم یافته (۲۹) و یا (۳۰) به همان معادله آشنای

پواسون در الکتروستاتیک ماکسول استاندارد، یعنی معادله

$$\nabla_D^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

تبدیل می شود.

#### ۴. تعیین شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط

به بار نقطه ای در چارچوب جبر هایزنبرگ دگرگون

شده

معادله پواسون تعمیم یافته (۲۹) برای یک بار نقطه ای  $q$  واقع

در مبدأ فضای اقلیدسی  $D$  بعدی به ازای  $D \geq 3$  به شکل

زیر است:

$$\frac{\nabla_D^2}{1 + \ell_0^2 \nabla_D^2} \phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(D)}(\vec{x}). \quad (31)$$

برای حل معادله (۳۱) از روش تبدیل فوریه استفاده می کنیم.

تابع دلتای دیراک  $\delta^{(D)}(\vec{x})$  و پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi(\vec{x})$

در حضور برش تکانه  $p_{max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  نمایش انتگرالی به

صورت زیر دارند:

$$\delta^{(D)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k \leq \frac{1}{\ell_0}} d^D k e^{ik \cdot \vec{r}}, \quad (32)$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k \leq \frac{1}{\ell_0}} d^D k e^{ik \cdot \vec{r}} G(\vec{k}). \quad (33)$$

در نوشتن روابط (۳۲) و (۳۳) از این واقعیت استفاده شده است

که ارتباط میان بردار تکانه  $\vec{p}$  و بردار موج  $\vec{k}$  به صورت

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

بوده، از این رو رابطه  $p_{max} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$  معادل با رابطه

$k_{max} = \frac{1}{\ell_0}$  خواهد شد ( $k = (\sum_{i=1}^D (k^i)^2)^{\frac{1}{2}}$ ). پس از

جایگذاری روابط (۳۲) و (۳۳) در معادله (۳۱)، شکل تابع

گرین  $G(\vec{k})$  در فضای موج  $D$  بعدی به صورت زیر به

دست می آید:

$$G(\vec{k}) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1 - \ell_0^2 k^2}{k^2}. \quad (34)$$

اگر رابطه (۳۴) را در رابطه (۳۳) قرار دهیم خواهیم داشت:

در رابطه (۴۰) به صورت زیر در می آید:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{D-2}{2}}} \int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk k^{\frac{D}{2}} \frac{1-\ell_0^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} J_{\frac{D-2}{2}}(kr). \quad (42)$$

با توجه به شکل تابع بسل رتبه  $p$  با شناسه  $x$  برای مقادیر نامنفی  $p$ ، یعنی [۲۰]

$$J_p(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s! \Gamma(s+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+p}, \quad p \geq 0, \quad (43)$$

رابطه (۴۲) را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{q}{(2\pi)^{\frac{D}{2}} \varepsilon_0} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{r^{2s}}{\frac{1}{2} \frac{D-2}{2} s! \Gamma\left(s + \frac{D}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk \left(k^{2s+D-2} - \ell_0^{\frac{1}{2}} k^{2s+D-1}\right)} \\ &= \frac{q}{\frac{D}{2} \pi^{\frac{D}{2}} \varepsilon_0 \ell_0^{D-2}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s! \left(s + \frac{D}{2} - 1\right) \Gamma\left(s + \frac{D}{2} + 1\right)} \\ &\quad \left(\frac{r}{\ell_0}\right)^{2s}. \end{aligned} \quad (44)$$

همان گونه که رابطه (۴۴) نشان می دهد برای نقاط بسیار نزدیک به بار نقطه ای  $q$  ( $r \rightarrow 0$ )، برای پتانسیل وابسته به بار نقطه ای در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی مقدار متناهی زیر به دست می آید:

$$\phi\left(\begin{matrix} 0, \dots, 0 \\ D \text{ times} \end{matrix}\right) = \frac{q}{\frac{D}{2} \pi^{\frac{D}{2}} (D-2) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \varepsilon_0 \ell_0^{D-2}}. \quad (45)$$

عبارت به دست آمده در رابطه (۴۵) نشان دهنده این واقعیت است که طول کمینه معرفی شده در رابطه (۱۲)، یعنی  $\ell_0$  همانند یک تنظیم کننده عمل کرده و مانع از واگرایی پتانسیل بار نقطه ای در مکان بار می شود.

## ۵. نتیجه گیری

در سال ۲۰۱۶ میلادی تکاچوک موفق به ارائه گسترش تک

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{k \leq \frac{1}{\ell_0}} d^D k \frac{1-\ell_0^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (35)$$

برای محاسبه انتگرال معرفی شده در رابطه (۳۵)، از مختصات فوق کروی<sup>۱</sup> در فضای موج  $D$  بعدی استفاده می کنیم که در آن عنصر حجم  $d^D k$  به شکل زیر است [۱۹]:

$$d^D k = k^{D-1} dk \prod_{i=1}^{D-1} \sin^{D-1-i} \theta_i d\theta_i, \quad (36)$$

که

$$0 \leq k \leq \frac{1}{\ell_0}, \quad (37)$$

$$0 \leq \theta_{D-1} \leq 2\pi, \quad (38)$$

$$0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq D-2. \quad (39)$$

اگر رابطه (۳۶) را در رابطه (۳۵) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk k^{D-1} \frac{1-\ell_0^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\theta_{D-1} \int_0^{\pi} \sin \theta_{D-2} d\theta_{D-2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta_{D-3} d\theta_{D-3} \\ &\quad \dots \int_0^{\pi} \sin^{D-2} \theta_2 d\theta_2 \int_0^{\pi} \sin^{D-2} \theta_1 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\theta_1 \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{\Omega_{D-2}}{(2\pi)^D} \int_0^{\frac{1}{\ell_0}} dk k^{D-1} \frac{1-\ell_0^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \int_0^{\pi} \sin^{D-2} \theta_1 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\theta_1, \end{aligned} \quad (40)$$

که  $\Omega_{D-2} = \frac{2\pi^{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}$  مساحت گوی واحد در فضای

اقلیدسی  $D-1$  بعدی است. در نوشتن رابطه (۴۰) فرض کرده ایم که بردار مکان  $\vec{r}$  با راستای بردار موج  $\vec{k}$  زاویه  $\theta_1$  بسازد. برای محاسبه انتگرال  $\int_0^{\pi} \sin^{D-2} \theta_1 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\theta_1$  از انتگرال زیر استفاده می کنیم [۱۹]

$$\int_0^{\pi} e^{i\beta \cos x} \sin^{2\nu} x dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{\nu}{\beta}\right)^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_{\nu}(\beta), \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad (41)$$

که  $J_{\nu}(\beta)$  معرف تابع بسل از رتبه  $\nu$  با شناسه  $\beta$  است. با استفاده از انتگرال معرفی شده در رابطه (۴۱)، پتانسیل  $\phi(\vec{x})$

۱. Hyperspherical coordinates

$$\int_0^\infty t^\mu J_\nu(t) dt = \frac{\nu^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}, \quad (52)$$

$$Re(\mu+\nu) > -1, \quad Re \mu < \frac{1}{2},$$

و  $\nu = \frac{D-2}{2}$  و  $\mu = \frac{D-2}{2} - 1$ ، رابطه (۵۱) به شکل زیر خواهد شد:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0 (D-2) \Omega_{D-1}} \frac{1}{r^{D-2}}. \quad (53)$$

رابطه (۵۳) همان پتانسیل بار نقطه‌ای در نظریه الکتروستاتیک ماکسول معمولی، یعنی رابطه (۲) است. به منظور بررسی رفتار پتانسیل بار نقطه‌ای برای نقاط بسیار نزدیک به مکان قرار گرفتن بار در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی از منظر جبر هاینبرگ دگرگون شده (۴) تا (۶) کافی است تا در رابطه (۳۵)،  $x^1 = x^2 = \dots = x^D = 0$  قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\phi \left( \begin{matrix} 0, \dots, 0 \\ D \text{ times} \end{matrix} \right) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(\pi)^D} \int_{k \leq \frac{1}{\ell_0}} d^D k \frac{1 - \ell_0^2 k^2}{k^2}$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(\pi)^D} \Omega_{D-1} \int_0^{\ell_0} k^{D-1} \frac{1 - \ell_0^2 k^2}{k^2} dk$$

$$= \frac{q}{\pi^{\frac{D}{2}} (D-2) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \epsilon_0 \ell_0^{D-2}}. \quad (54)$$

رابطه (۵۴) قبلاً با شیوه‌ای متفاوت در بخش ۴ این مقاله به دست آمده است (رابطه (۴۵) را ببینید). رابطه (۵۴) نشان می‌دهد که وجود پارامتر تنظیم کننده  $\ell_0$  مانع از واگرا شدن پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود.

پارامتری از جبر هاینبرگ در یک فضای فاز  $2D$  بعدی با پارامتر دگرگونش  $\beta$  شد (روابط (۴) تا (۶)). همان‌گونه که روابط (۴) تا (۶) نشان می‌دهند در حد  $\beta \rightarrow 0$ ، جبر هاینبرگ دگرگون شده معرفی شده در این روابط به جبر استاندارد هاینبرگ، یعنی روابط

$$[X^i, X^j] = 0, \quad (46)$$

$$[P^i, P^j] = 0, \quad (47)$$

$$[X^i, P^j] = i \hbar \delta^{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, D\}, \quad (48)$$

تبدیل می‌شوند. از طرفی بنا به روابط (۱۱) و (۱۲)، حد  $\beta \rightarrow 0$  متناظر با حدود  $p_{max} \rightarrow \infty$  و  $\ell_0 \rightarrow 0$  است. بر این اساس ما انتظار داریم که در حد  $\ell_0 \rightarrow 0$ ، رابطه (۴۲) که معرف پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک ماکسول تعمیم یافته است به رابطه (۲)، یعنی پتانسیل بار نقطه‌ای در نظریه الکتروستاتیک ماکسول معمولی در یک فضای اقلیدسی  $D$  بعدی تبدیل شود. به منظور بررسی صحت ادعای مطرح شده، در جملات بالا حد  $\ell_0 \rightarrow 0$  رابطه (۴۲) را در نظر می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \phi(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{D-2}{2}}} \int_0^\infty dk k^{\frac{D-2}{2}-1} J_{\frac{D-2}{2}}(kr). \quad (49)$$

با انجام تغییر متغیری به شکل

$$t = kr, \quad (50)$$

رابطه (۴۹) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{D-2}{2}}} \int_0^\infty dt t^{\frac{D-2}{2}-1} J_{\frac{D-2}{2}}(t). \quad (51)$$

با استفاده از انتگرال زیر [۲۰]

## مراجع

1. B Zwiebach, "A First Course in String Theory", Cambridge University Press, Second Edition (2009).
2. H Nastase, "String Theory Methods for Condensed Matter Physics", Cambridge University Press (2017).
3. K Andrew and J Supplee, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 1177.
4. J D Jackson, "Classical Electrodynamics", John Wiley & Sons, Inc. Third Edition (1999).
5. A Rostami and S K Moayedi, *Indian J. Phys.* **75B** (2001) 357.
6. S K Moayedi and A Rostami, *Eur. Phys. J. B* **36** (2003) 359.
7. A Rostami and S K Moayedi, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5** (2003) 380.

8. M Stone and P Goldbart, “*Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*”, Cambridge University Press, (2009).
9. S Hossenfelder, *Living Rev. Relativity* **16** (2013) 2.
10. S K Moayedi, M R Setare, and B Khosropour, *Advances in High Energy Physics* **2013** (2013) 657870.
11. S K Moayedi, M R Setare, and H Moayeri, *EPL* **98** (2012) 50001.
12. S K Moayedi, M R Setare, and B Khosropour, *International Journal of Modern Physics A* **28** (2013) 1350142.
13. A V Silva, E M C Abreu, and M J Neves, *International Journal of Modern Physics A* **31** (2016) 1650096.
14. A M Frydryszak and V M Tkachuk, *Czechoslovak Journal of Physics* **53** (2003) 1035.
15. V M Tkachuk, *Found. Phys.* **46** (2016) 1666.
16. A Izadi and S K Moayedi, *Annals of Physics* **411** (2019) 167956.
17. M Ranaiy and S K Moayedi, *Modern Physics Letters A* **35** (2020) 2050038.
18. N Moeller and B Zwiebach, *JHEP* **10** (2002) 034.
19. A Accioly, J H Neto, G Correia, G Brito, J de Almeida, and W Herdy, *Physical Review D* **93** (2016) 105042.
20. M Abramowitz and I A Stegun, “*Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (AMS-55)*”, Washington, DC: National Bureau of Standards (1972).