مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۳، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۹۲

مسئله لانداؤ در جهان شوارتشیلد ایستا

ابوالفضل جعفري

گروه فيزيك، دانشكدة علوم پايه، دانشگاه شهركرد، شهركرد

پست الكترونيكي: jafari-ab@sci.sku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۱/۶/۲۷ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۱/۹/۷)

چكيده

مي‌خواهيم مسئله لانداؤ ، شامل معادلة تحول ذره باردار در يك فضا زمان مشخص ايستا را بررسي كنيم و اثرات انحراف فضا زمان از متريك مينكوفسكي را بر سطوح انرژي پيدا كنيم. اساس اين كار بر روش وبر در بازنويسي معادلة تحول در حضور گرانش استوار است و براي دستيابي به آن مسئله را به ناحيه‌اي كه شرايط دستيابي به فضاي مماس را برآورده مي‌كند محدود مي‌كنيم. همچنين در يك مسير منطقي مسئله را در حالت غير نسبيتي و براي سرعت‌هاي كوچك در نظر مي‌گيريم. ما نشان خواهيم داد كه با فرض‌هاي بيان شده، همچنان ناحية معتبري دسترس‌پذير خواهد بود. فرض اساسي ديگر ما، كار در فضاي مماس بر جهان ايستاي شوارتشيلد و استفاده از دستگاه مختصات ريمان است.

واژه‌هاي كليدي: مسئلة لانداؤ ، متريك شوارتشيلد، روش وبر، فضاي مماس، مختصات ريماني

۱. مقدمه

حضور میدان گرانشی و برهم‌کنش اجسام فیزیکی با آن در سطح مکانیک کوانتومی به طور سیستماتیک مشخص نیست و به همین دلیل برای بررسی آن دسته از مسائلی که به برهم‌کنش بین ماده و پس زمینهٔ گرانشی در حوزهٔ مکانیک کوانتومی می‌پردازند، دو روش پیشنهاد شده است. در روش اول یا روش دوویت[۱] سعی می‌شود که مکانیک کوانتومی در یک فضا زمان عمومی باز نویسی شود. انحراف فضا زمان از متریک مینکوفسکی می‌تواند ناشی از زمینهٔ گرانشی باشد و البته در این مسائل بررسی تحول عوامل گرانش منظور مسئله نیست. از جهت نقش هندسی گرانش، نتیجهٔ اعمال انحراف هندسهٔ فضا زمان در حد غیر نسبیتی، رسیدن به یک مسئلهٔ اختلالی است که می‌بایست از طریق نظریهٔ اختلال وابسته یا مستقل از زمان حل شوند. روش وبر[۲] روش دومی است که در آن تأثیر انحراف فضا زمان از متریک مینکوفسکی در معادلات دینامیک ذرات، پاسخ کلاسیکی است و با پذیرش آن، معادلهٔ ژئودزیک تقریبی به دست می‌آید که در این رهیافت (رهیافت وبر) به دنبال آغازی نو برای معادلهٔ تقریب شده هستیم. البته این دو روش هم‌ارز نیستند و نمی‌توان نتایج حاصل از به کار بردن روش اول یا روش دوم را از روش دیگر به دست آورد چرا که از نگرش متفاوتی برخوردارند [۱ و ۲]. در حال حاضر هر دو روش مطلوب فیزیکدانان است و دانشمندان پرکاری در این زمینه فعالیت می‌کنند. اتم هیدروژن یک مورد مشترک و شناخته شده از معادلهٔ اسپینوری دیراک است که در همهٔ سطوح و با هر دو

۱. De Witt

۲. Weber

روش مورد مطالعه قرار گرفته است [۳، ۴]. هرچند در محاسبهٔ تأثیر انحراف از فضا زمان مینکوفسکی در بررسی مسائل پایه‌ای فیزیک مانند اتم هیدروژن و نوسانگر هماهنگ به هر دو روش مطالعاتی انجام شده است اما برای مسائل دیگر به ویژه مسئلهٔ لانداؤ به روش وبر، کار چندانی صورت نگرفته است.

نکتهٔ مشترک برای هر دو روش، فضای مماس بر جهان پایه و پارامتر بسط متریک و ضرایب کریستوفل[۱] است. منظور از جهان پایه خمینهٔ[۲] شبه ریمانی اصلی است که از حل معادلهٔ گرانش نسبیت عام حاصل می‌شود. پارامتر بسط نقش تعیین کننده‌ای در این زمینه دارد. به طور مشخص و بر اساس اصول نسبیت عام، فضای مماس بر یک خمینهٔ شبه ریمانی تا مرتبهٔ اول از تانسور خمش ریمان، یک فضای تخت همانند فضا زمان مینکوفسکی[۳]خواهد بود. فضای مماس (پارامتر بسط) گفته شده به دو حالت متفاوت ایستا یا دینامیک قابل تفکیک است و هر مورد، مسیر و ابزار متفاوتی را برای مطالعه می‌طلبد. مستقل از زمان یا وابسته به زمان بودن یک فضای مماس نیز به مستقل از زمان یا وابسته به زمان بودن تانسور خمش ریمان (پارامتر بسط) در آن نقطه از فضا زمان پایه است. فضای مماس که بر یک نقطه از فضا زمان پایه بنا می‌شود در حقیقت دارای پارامتر تعیین کننده‌ای است که ماهیت فضای مماس را نیز مشخص می‌کند. این پارامتر مقدار مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان در همان نقطه از فضا زمان پایه است و ممکن است نقطه به نقطه از فضا زمان پایه تغییر کند. مطالعهٔ مسائل اختلالی در فضای مماس وابسته به زمان، ناگزیر از بررسی احتمال و دامنهٔ گذار همراه با مسئله تابش است در حالی که در فضای مماس مستقل از زمان، تغییرات سطوح انرژی همواره مورد بررسی قرار می‌گیرند. یکی از زیباترین مثال‌های دستهٔ اول فضا زمان شوارتشیلد ایستای متقارن است که دارای ویژگی‌های منحصر بفردی است و در این مقاله به مطالعهٔ دینامیک ذرهٔ باردار در فضای مماس بنا شده بر جهان پایهٔ شوارتشیلد ایستای متقارن

۱. Christoffel

۲. Manifold

۳. Minkowski

خواهیم پرداخت. فضا زمان انباشته از تأثیرات حضور امواج گرانشی خطی[۴] که فقط تابع زمان هستند و در یک جهت مشخص مانند $\hat{k}$ منتشر می‌شوند نیز مثالی برای دستهٔ دوم هستند. این امواج در بعضی از پیمانه‌ها با قطبیدگی خاصی معرفی و ارائه می‌شوند و شالودهٔ نظریهٔ آن، جفت شدگی کوچک بین بعضی مختصات فضایی در ماتریس متریک است [۱-۶].

چنانچه گفته شد بر اساس اصول نسبیت عام، در هر نقطه از فضا زمان پایه، یک چارچوب لخت می‌توان بنا نمود و آن فضا را پارامتربندی کرد. راه دستیابی به این ناحیه آزمایشگاه‌های در حال سقوط آزاد است. در این حالت تانسور متریک و ضرایب کریستوفل در فضای مماس متکی بر نقطهٔ انتخابی از فضا زمان پایه، قابل بسط هستند. اگر پارامتر بسط در آن نقطه از فضا زمان پایهٔ مؤلفه‌های تانسور ریمان باشند، مختصات پیشنهاد شده در فضای مماس را مختصات ریمانی می‌نامند و هرگاه این مختصات در راستای ژئودزیک‌های فضا زمان پایه انتخاب شوند آنها را مختصات عادی ریمان می‌نامند. ساختار تعیین مختصات عادی ریمان دشوار است و بر پایهٔ جهان خط و ژئودزیک سامانه می‌باشد. بنابراین دست کم تا مرتبهٔ اول، متریک فضا زمان مماس به دست آمده متریک مینکوفسکی خواهد بود [۴-۶]. یادآوری می‌شود که دستگاه مختصات فرمی دستگاه لخت دیگری است که پارامتر بسط در آن مقیاس طول در راستای ژئودزیک است و ساختار تعیین آنها بسیار دشوار است [۷-۱۱]. در دستگاه مختصات ریمانی و بر حسب پارامتر ریمان، بسط متریک و ضرایب کریستوفل[۵] به صورت زیر داده می‌شوند [۳]

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1 - R_{i0j} x^i x^j, \\
g_{0i} &= g^{0i} = -\frac{2}{3} R_{0ilm} x^l x^m, \\
g_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{iljm} x^l x^m, \qquad (1) \\
g^{00} &= -1 + R_{l0m} x^l x^m, \\
g^{ij} &= \delta^{ij} + \frac{1}{3} R^i{}_l{}^j{}_m x^l x^m,
\end{aligned}
$$

۴. Linear gravitational waves

۵. Affine connections

و بسط ضرایب کریستوفل

$$\begin{aligned} &\Gamma^{0}_{00} = 0, \\ &\Gamma^{0}_{0i} = R_{0i0j}x^{j}, \\ &\Gamma^{0}_{ij} = \frac{1}{3}(R_{0ijm} + R_{0jim})x^{m}, \\ &\Gamma^{i}_{00} = R_{0i0j}x^{j}, \\ &\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{3}(R_{jikm} + R_{kijm})x^{m}, \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن مختصات ظاهر شده x^j مختصات ریمانی بنا شده در فضا زمان مماس بر پایهٔ نقطهٔ ρ در فضا زمان پایه خواهند بود و مؤلفه‌های تانسور ریمان ارائه شده در روابط بسط در حقیقت به صورت تابعی از نقطهٔ ρ ($R_{\mu\alpha\nu\beta}(\rho)$) می‌باشند. از این پس برای سادگی نقطهٔ فضا زمان پایه را از تابعیت مؤلفه‌های تانسور ریمان حذف خواهیم کرد، چرا که جز اندازهٔ این مؤلفه‌ها، چیز دیگری را تعیین نمی‌کنند. در مورد فضا زمان پایهٔ شوارتشیلد ایستای متقارن با متریک

$$\begin{aligned} ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 \\ + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right), \end{aligned} \tag{3}$$

برخی از مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان از روابط زیر تعیین می‌شوند

$$\begin{aligned} &R_{0101} = \frac{2GM(2GM-rc^2)}{c^4 r^4}, \\ &R_{0202} = R_{0303} = \frac{GM(-GM+rc^2)}{c^4 r^4}, \end{aligned} \tag{4}$$

یادآوری می‌کنیم که فضای مماس تا حد مرتبهٔ اول پارامتر بسط (تانسور ریمان) یک فضای تخت و همانند فضای مینکوفسکی می‌باشد بنابراین همهٔ اندیس‌ها تا حد مرتبهٔ اول از پارامتر بسط با متریک $\eta^{\mu\nu} = diag(-1,+1,+1,+1)$ تغییر خواهند کرد.

۲. معادلهٔ حرکت ذرهٔ باردار در روش وبر

هرگاه بتوان یک سامانهٔ فیزیکی که مطالعهٔ آن در یک اندازهٔ کوچک (آزمایشگاه کوچک) ممکن باشد را به اندازهٔ کافی به یک جسم سنگین متقارن مانند سیاه‌چاله نزدیک کرد به گونه‌ای که در آن ناحیه و در بسط متریک و ضرایب کریستوفل فقط مرتبهٔ اول تانسور خمش ریمان ارزشمند باشد، می‌توان از روش وبر، معادلهٔ حرکت ذره در آن ناحیه از فضا را تقریب زد. در مورد متریک شوارتشیلد، مؤلفه‌های تانسور ریمان ذکر شده در این ناحیهٔ دسترس‌پذیر و بر اساس موقعیت ناحیه به مقادیر ثابت زیر تحویل خواهند شد

$$\begin{aligned} &R_{0101} = -\frac{2GM}{c^2 R^3}, \\ &R_{0202} = R_{0303} = \frac{GM}{c^2 R^3}, \end{aligned} \tag{5}$$

در آزمایشگاه در حال سقوط آزاد و در فاصلهٔ مناسب از جسم سنگین متقارن می‌توان این ناحیه را جستجو کرد. به این ترتیب فضا زمانی که توسط یک منبع گرانشی تحت تأثیر قرار گرفته است، اثرات ناشی از گرانش را در متریک و با شاخص‌هایی نظیر ثابت خمش و غیره آشکار می‌سازد. در روش وبر که فقط در ناحیهٔ مذکور و در حد آزمایشگاه کوچک معتبر است، ویژگی‌های نهفته در متریک با تحمیل نیرویی جدید در معادلهٔ ژئودزیک ذرات که از نسبیت عام می‌آید، نمود پیدا می‌کنند. یعنی جمله‌های برهم‌کنشی جدید تا حد اولین توان از تانسور ریمان یا ضرایب کریستوفل در معادلهٔ حرکت ذره ظاهر می‌گردند. معادلهٔ تقریب شدهٔ ژئودزیک بر اساس روش وبر به صورت زیر خواهد بود [۵]

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i\left(\vec{x}\right) - mc^2\Gamma^i_{00} - mc\Gamma^i_{j0}\dot{x}^j - m\Gamma^i_{jk}, \tag{6}$$

در آن x مختصه مکانی ذره، m جرم ذره، $f_i\left(\vec{x}\right)$ همه نیروهای وارد شده به ذره و $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ ها، ضرایب کریستوفل هستند که بر اساس رابطهٔ (۲) به مؤلفه‌های غیر صفر تانسور ریمان فضا زمان پایه مربوط می‌گردند. نکتهٔ مهم این است که این معادله در فضا زمان مماس اعتبار دارد و تنها ناظری که می‌تواند نتایج حاصل از آن را درست تعبیر نماید ناظری است که در فضای مماس قرار دارد. در متریک شوارتشیلد متقارن $\Gamma^i_{0\beta}$ها غایب هستند (این مؤلفه‌ها به دلیل تقارن کروی و ایستایی متریک صفر هستند) بنابراین محل ظهور سرعت‌ها در رابطهٔ بالا در جملهٔ $\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$ خواهد بود که بر اساس رابطهٔ (۲) متناسب با $R_{jikm}x^m\dot{x}^j\dot{x}^k$ است. از آنجا که مسئلهٔ کوانتومی غیرنسبیتی را برای سرعت‌های کوچک در نظر گرفته‌ایم، در یک محدودهٔ مناسب از سرعت‌ها می‌توانیم از

جملهٔ مورد نظر صرفنظر کنیم و این تقریب نیز بر هموردا نبودن ناظر فضای مماس و محدودهٔ اعتبار اختلال تاکید دارد. این تقریب با همراهی تانسور ریمان رسمی‌تر می‌شود. برای ذرات غیر نسبیتی که تحت تأثیر نیروهای وابسته به سرعت نیستند لاگرانژی معادله حرکت (۶) چنین می‌باشد

$$L_{NR}=\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}^i-V(\mathrm{x})-\frac{1}{2}mR_{i0k0}x^ix^k, \qquad (7)$$

در رابطهٔ (۷) مقادیر مؤلفه‌های تانسور ریمان با رابطهٔ (۵) داده می‌شوند. اکنون می‌توان هامیلتونی رابطهٔ (۷) را برای وقتی که ذره دارای بار الکتریکی q بوده و در یک میدان مغناطیسی خالص نیز حرکت می‌کند به شکل زیر ارائه داد

$$H=\frac{1}{2m}(\mathrm{p}-\frac{q}{c}\mathrm{A})^2+V(\mathrm{x})+\frac{1}{2}mR_{i0k0}x^ix^k, \qquad (8)$$

رابطهٔ (۸) برای زمانی که مؤلفه‌های تانسور خمش ریمان تعریف شده در فضا زمان پایه، تابع زمان باشد تغییری نمی‌کند و به همین صورت قابل استفاده می‌باشد. تنها نکته‌ای که باید دقت کرد این است که اگر فضا زمان پایه از یک تقارن خوب برخوردار باشد مانند امواج گرانشی، با توجه به رابطهٔ (۲) و بدون محدودیت روی سرعت‌ها دست کم در رابطهٔ (۶) جملات تداخلی سرعت شرکت نمی‌کنند و این تقارن، مسیر مطالعهٔ مسئله را تا حد زیادی و بدون تقریب ساده خواهد کرد.

۳. مسئلهٔ لانداؤ و تغییرات انرژی ناشی از تصحیح انحراف از متریک مینکوفسکی

مسئلهٔ لانداؤ، تحقیق دینامیک یک ذرهٔ باردار در سطح مکانیک کوانتومی و در برهم‌کنش با میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی، بدون حضور میدان الکتریکی می‌باشد. اصل مسئله بررسی یک سامانهٔ کوانتومی در حد نسبیتی است که خیلی سیستماتیک نیست و به همین دلیل بررسی مسئلهٔ لانداؤ در فضا زمان مماس با روش وبر یعنی بررسی یک سامانهٔ کوانتومی در حد غیر نسبیتی است. این مسئله در غیبت اثرات گرانش با رابطهٔ (۷) و به ازای $R_{\alpha\beta\mu\nu}=0$ توصیف می‌شود. در حضور گرانش نیز رابطهٔ کامل (۸) آنرا توصیف خواهد نمود. جملهٔ تصحیح انحراف از متریک مینکوفسکی در رابطهٔ (۸) تغییراتی در سطوح انرژی ایجاد خواهد نمود که به طور یقین تا مرتبهٔ اول تانسور ریمان ارزشمند هستند. میدان مغناطیسی در مسئلهٔ استاندارد لانداؤ، به صورت $\mathrm{B}=B_0\hat{k}$ داده می‌شود. همچنین پیمانهٔ $\mathrm{A}=\frac{B_0}{2}(-y,x,0)$ انتخاب مناسبی برای این مسئله می‌باشد و این عبارت‌ها اینجا نیز به همین شکل استفاده خواهند شد. بنابراین هامیلتونی فوق با انتخاب پیمانهٔ لورنتس گفته شده به عبارت زیر تحویل می‌گردد

$$H=\frac{1}{2m}(\mathrm{p}^2+\frac{q^2B_0^2}{4c^2}(y^2+x^2)+\frac{qB_0}{c}L_z)+\frac{1}{2}mR_{i0k0}x^ix^k, \quad (9)$$

که با قرار دادن مقادیر مشخص مؤلفه‌های تانسور ریمان خواهیم داشت

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2m}(\mathrm{p}^2+\frac{q^2B_0^2}{4c^2}(y^2+x^2)+\frac{qB_0}{c}L_z)\\&+\frac{GMm}{2c^2R^3}(y^2+z^2-2x^2),\end{aligned} \qquad (10)$$

برای بررسی اعتبار اختلالی مسئله و حذف جملات تداخلی سرعت، ناحیهٔ معتبر را جستجو می‌کنیم. این کار را با مقایسهٔ نسبت جملات تصحیح گرانشی آغاز می‌کنیم. می‌توان دید که پذیرفتن شرط عددی $v^2/c^2\leq 10^{-4}$ دلیل محکمی برای چشم پوشی از جملات تداخلی سرعت به دست می‌دهد. برای مرتبه نگری می‌توان پروتونی را در حوالی جرمی مانند خورشید در نظر گرفت. آزمایشگاه را در فاصلهٔ $R\approx 10^9m$ فرض می‌کنیم. با این حساب برای یک میدان متعارف مغناطیسی $qB_0\approx 10^{-20}CT$ مرتبه‌های زیر حاصل می‌شود $q^2B_0^2/8m_pc^2\approx 10^{-32}$ و $GM_sm_p/R^3\approx 10^{-35}$ و سرعت غیر نسبیتی پروتون‌ها در محدودهٔ کوچک‌تر از $10^{-2}c$ خواهد بود.

برای این که هامیلتونی (۱۰) به درستی مانند هامیلتونی‌های مختل شده گردد، بدون اینکه تغییری در هامیلتونی ایجاد شود، جملهٔ $+\frac{GMm}{2c^2R^3}x^2-\frac{GMm}{2c^2R^3}x^2$ را به آن اضافه می‌کنیم و بعد از دسته بندی به معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2m}\mathrm{p}^2+\frac{1}{2}m\omega^2(y^2+x^2)\\&+\frac{qB_0}{2mc}L_z+\frac{GMm}{2c^2R^3}z^2-\frac{3GMm}{2c^2R^3}x^2,\end{aligned} \qquad (11)$$

به طوری که در آن $\omega^2=\frac{q^2B_0^2}{4m^2c^2}+\frac{GM}{c^2R^3}$ و تقریب مرتبهٔ اول

آن نیز برابر $\omega \approx \frac{qB_0}{2mc} + \frac{GMm}{cR^3 qB_0}$ است. حال با توجه به روابط جابجاگری و مرتبهٔ جملات موجود در هامیلتونی، می‌توان عبارت زیر را پیشنهاد داد

$$H = H_{os} + \frac{qB_0}{2mc}L_z + H_{\text{perturbation}} \ , \qquad (۱۲)$$

که در آن جمله اختلالی نهایی به صورت $H_{\text{perturbation}} = -\frac{3GMm}{2c^2R^3}x^2$ باقی مانده است. به دلیل اینکه جملهٔ $\frac{qB_0}{2mc}L_z$ دارای مقدار قابل مقایسه با هامیلتونی H_{os} است و همچنین به دلیل جابجاگر این جمله با هامیلتونی H_{os} ($[H_{os}, \frac{qB_0}{2mc}L_z]=0$)، این جمله، از هامیلتونی اختلال و هامیلتونی H_{os} جدا نوشته شده است و می‌توان آن را در بررسی تحلیلی دقیق به همراه هامیلتونی H_{os} به عنوان هامیلتونی پایه برای مسئله در نظر گرفت. به این ترتیب ویژه بردارها و ویژه انرژی‌های هامیلتونی پایه $H_0 = H_{os} + \frac{qB_0}{2mc}L_z$ طبق روابط زیر داده می‌شوند

$$\begin{cases} |\psi\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle \\ E_{n_x,n_y,n_z} \approx \hbar\left(\frac{qB_0}{2mc} + \frac{GMm}{cR^3 qB_0}\right)\left(n_x + n_y + 1\right) \\ \qquad + \hbar\frac{GM}{c^2R^3}(n_z + \frac{1}{2}) + \hbar\frac{qB_0}{2mc}\kappa \end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در آن منظور ما از $|\psi\rangle = |n_x, n_y, n_z\rangle$ بردار حالت نوسانگر سه بعدی در فضای عملگر اشغال است و κ مقدار اولیهٔ بدون بعد اندازهٔ حرکت زاویه‌ای در راستای محور $\hat{z}$ هاست که به دلیل جابجاگر ارائه شده، ثابت حرکت می‌باشد. برای محاسبهٔ مقادیر اختلال در سطوح انرژی باید دقت کرد که هامیلتونی $H_{os} + \frac{qB_0}{2mc}L_z$ به غیر از حالت پایه در زیرفضای x و y تبهگنی دارد. با نوشتن انرژی به صورت $E = E_{x,y} + E_z$ مطالعهٔ تصحیح سطوح انرژی را به بررسی تغییرات $E_{x,y}$ محدود می‌کنیم. بنابراین تصحیح مرتبهٔ اول حالت پایه چنین خواهد بود

$$\Delta E_{0,0} = \frac{-3\hbar GM}{2c^2R^3\left(\frac{q^2B_0^2}{4m^2c^2} + \frac{GM}{c^2R^3}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{-3\hbar GMm}{qB_0cR^3} \qquad (۱۴)$$

و تصحیح مرتبهٔ اول اولین حالت برانگیخته در زیرفضای x و y که دارای تبهگنی مرتبهٔ دو است به صورت زیر، سطوح انرژی و بردارهای حالت این فضا را تغییر خواهد داد

$$\begin{cases} \Delta E_{\pm} = -3\frac{\pm 3\hbar GMm}{qB_0cR^3} \\ |\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle), \end{cases} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\langle\psi_{\pm}|$ آرایش جدید از بردارهای اولین حالت برانگیختهٔ زیرفضای x و y تبهگن در فضای عملگر اشغال است که با قطری سازی هامیلتونی اختلال در آن به دست آمده است. تصحیح دیگر حالتها نیز به همین صورت خواهد بود. برای برآورد تصحیح به دست آمده می‌توان بر اساس مدل پیشنهاد شده اقدام کرد. بر اساس آن مقدار تصحیح انرژی بر جرم چنین خواهد بود

$$\frac{\Delta E}{m} \sim \frac{\hbar GM}{qB_0cR^3} \propto 1.7\times 10^{-29}\ \text{Joule} = 10^{-10}\ \text{eV} \qquad (۱۶)$$

در حالی که این مقدار برای آزمایشگاه در فاصلهٔ ده هزار کیلومتری خورشید، یک میلیون برابر بیشتر خواهد شد ولی مدت زمان کمتری شرط تثبیت ناظر لخت برقرار خواهد بود.

۴. نتیجه‌گیری

در این رهیافت ابتدا دینامیک ذرهٔ باردار در فضای مماس بر جهان شوارتشیلد ایستای متقارن را به عنوان یک مسئلهٔ غیر نسبیتی قابل مطالعه در آزمایشگاه کوچک و لخت مطرح کردیم آنگاه به روش وبر، هامیلتونی لانداؤ را در دستگاه مختصات ریمانی و بر پایهٔ مؤلفه‌های تانسور ریمان بازنویسی کردیم. در نوشتن هامیلتونی مسئله، با برآوردی از مرتبهٔ جملات شامل سرعت‌ها، محدودهٔ سرعت‌های غیر نسبیتی را تعیین کردیم که ناحیهٔ معتبر برای مطالعه شناسایی شد. می‌بایست یادآور شد که بردار پتانسیل مغناطیسی ظاهر شده در معادلهٔ (۸) باید با توجه به رابطهٔ تصحیح پارکر[1] [۳] تصحیح و به صورت $A_k = A_k^0 + A_k^1 + o(R_{\mu\alpha\nu\beta})^2$ ارائه می‌گردید. که در آن منظور از جملات بسط، تصحیح و اصلاح بردار پتانسیل به روش خودسازگار برحسب پارامتر فضای مماس است. اما می‌توان

۱. Leonard Parker

نشان داد که برای فضا زمان پایهٔ انتخاب شده، ایـن بـسط فقـط شامل جملهٔ تقریب صفر است و معادلهٔ (۸) به صورت درسـت بیان می‌شود. پس از آن‌که هامیلتونی را استخراج و بـه صـورت ترکیبی از یک هامیلتونی پایه با قابلیت حـل دقیـق و هـامیلتونی اختلالی مستقل از زمان بازنویسی کردیم، اعتبار بررسی اختلالی مسئله را نشان دادیم. در ادامه تصحیح مرتبهٔ اول حالـت پایـه و اولین حالت برانگیختهٔ تبهگن را بر حسب تانسور خمش ریمان محاسبه و انحراف سطوح انرژی را پیدا کردیم.

مراجع

1. A D Speliotopoulos, *Phys. Rev*. D **51** (1995) 1701.
2. A Saha, S Gangopadhyay, and S Saha, *Phys. Rev*. D **83** (2011) 025004.
3. L Parker, *Phys. Rev*. D **22** (1980) 1922, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1559.
4. F Pinto, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3839.
5. C W Misner, K S Thorne, and J A Wheeler "*Gravitation*", Freeman Publishing Company, San Francisco (1970); J Weber, "*General Relativity and Gravitational waves*", Dover Publications, Inc., New York (1961); R D'Inverno, "*Introducing Einstein's Relativity*", Oxford University Press Inc., New York, (1992); and H C Ohanian, "*Gravitation and Spacetime*", W W Norton and Company (1976).
6. A Hatzinikitas, arXiv: hep-th/0001078.
7. A I Nesterov, *Class. Quant. Grav*. **16** (1999) 465.
8. P Delva and M C Angonin, *Gen. Rel. Grav*. **44** (2012) 1.
9. M S Underwood and K P Marzlin, *Int. J. Mod. Phys*. A **25** (2010) 1147.
10. D Klein and P Collas, *J. Math. Phys*. **51** (2010) 022501.
11. K P Marzlin, *Gen. Rel. Grav*. **26** (1994) 619; *Phys. Rev*. D **50** (1994) 888.