مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۰، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۳۹۹
DOI: 10.47176/ijpr.20.3.51063

جواب‌های اینستنتونی در مدلی از تناظر AdS_4/CFT_3

محمد نقدی

گروه فیزیک، دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه ایلام، ایلام

پست الکترونیکی: m.naghdi@ilam.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۰۹ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۹/۰۵/۰۴)

چکیده

از خمش (پاد)غشاءهای-M ابرگرانش ۱۱- بعدی با هندسهٔ $AdS_4 \times CP^3 \times S^1 / Z_k$ روی فضای داخلی همراه با جواب آزمایشی برای ۴- فرم قدرت- میدان، از حل معادلات و اتحادهای مربوطه، معادلات دیفرانسیل اسکالر را در فضای پاددوسیتهٔ ۴- بعدی اقلیدسی به دست می‌آوریم. البته توجه داریم که جواب و سازوکار حجمی مربوطه، تمام ابرتقارن، پاریته و ناوردایی مقیاس را می‌شکنند و پتانسیل (شبه) اسکالر منتجه که هیگز گونه است با دو خلأ نسبتاً تبهگن، گذار فاز مرتبهٔ اول و تونل زنی از خلأ کاذب به صحیح را نیز مجاز می‌دارد. در اینجا با تمرکز به سه مد (شبه) اسکالر $m^2 = -2,4,10$ که قابل تحقق در زمینهٔ غشاءهای- $M2$ ویک- چرخیده و یا تغییر جهت داده، هستند، از روش‌های تقریبی و به ویژه روش تجزیهٔ آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم غیر خطی منتجه که در حد کاوشی معتبرند، با شرط مرزی دیریکله یا دادهٔ اولیه از یک جواب پایهٔ دقیق، جواب‌های تقریبی را به صورت بسط سری در نزدیک مرز، در مراتب مختلف بسط اختلالی به دست می‌آوریم. سپس، با استفاده از اصول و قواعد تناظر AdS_4/CFT_3، پس از تبادل سه نمایش بنیادی $SO(8) \to SU(4)\times U(1)$ برای گراویتینو، عملگرهای تکتایهٔ دوگان $\Delta_+ = 2,4,5$ را از میدان‌های (اسکالر، فرمیون و پیمانه‌ای) در مدلی از نظریهٔ میدان پیمانه‌ای $SU(N)$ چرن- سایمون- مادهٔ مرزی ۳- بعدی که روی پادغشاءهای- $M2$ حاصل زندگی می‌کند، می‌سازیم. سپس با تغییر کنش‌های مرزی متناظر با عملگرها، جواب‌های $SO(4)$ ناوردایی با کنش متناهی غیر صفر را به دست می‌آوریم که در واقع اینستنتون‌های کوچک واقع در مرکز یک ۳-کره در بینهایت می‌باشند که سبب ناپایداری و واسطه واپاشی خلأ کاذب می‌شوند. به عبارتی دیگر، پتانسیل‌های مرزی نامقید از زیر، دوگان رمبش حباب‌های خلأ (دیوار نازک) حجمی و تکینگی‌های نابودی بزرگ هستند.

واژه‌های کلیدی: تناظر AdS_4/CFT_3، معادلات (شبه) اسکالر، روش تجزیهٔ آدومیان، عملگرهای دوگان، جواب‌های اینستنتونی

۱. مقدمه

یکی از موفقیت‌های برجستهٔ نظریهٔ ریسمان، دوگانی بین فضای پاددوسیته (AdS) و نظریهٔ میدان همدیس (CFT) است؛ به ویژه به این علت که در ناحیهٔ با ثابت جفت‌شدگی قوی نظریهٔ میدان که بسط اختلالی شکست می‌خورد و نظریه خوب فهمیده نشده است، دوگان به یا معادل با نظریهٔ گرانشی با ثابت جفت‌شدگی ضعیف ساده‌تر برای حل است. لذا این تناظر کاربردهای قابل توجهی برای فهم پدیده‌های فیزیکی مختلف در مقیاس جفت‌شدگی قوی از مادهٔ چگال (برای نمونه توصیفاتی از

دستگاه‌های همبستهٔ قوی، گذارهای فاز کوانتومی، ابرشاره‌ها، ابررسانایی، سطوح فرمی، اثر کوانتوی هال و آنتروپی درهم تنیدگی هولوگرافیک[1])، هسته‌ای (برای نمونه در ساختار هسته‌ای، نیروهای هسته‌ای و ستارهٔ نوترونی) تا ذرات بنیادی (برای نمونه کرومودینامیک کوانتومی در انرژی‌های پایین، پلاسمای کوارک و گلئونی، مزون‌های سبک، شکست تقارن تکدست) داشته و دارد. البته، این تناظر، نمونه‌ای مهم از اصل هولوگرافی است؛ بدان معنا که تمام اطلاعات یک نظریه گرانش کوانتومی شامل در یک حجم مفروض را می‌توان در یک نظریهٔ مؤثر در سطح مرزی این حجم تصویر یا رمزنگاری کرد. نظریهٔ گرانش کوانتومی که در تناظر AdS_{d+1}/CFT_d شامل است، روی یک خمینه به شکل $AdS\times X$ تعریف می‌شود که در آن X فضای فشرده داخلی است و نظریهٔ میدان کوانتومی روی مرز همدیس این فضای پاددوسیته تعریف می‌شود. به عبارتی، اطلاعات نظریهٔ $d+1$ بعدی (حجمی) که معمولاً از تقلیل کالوزا- کلاین نظریهٔ ریسمان ۱۰ یا ۱۱ بعدی روی فضای داخلی ۶ یا ۷ بعدی به دست می‌آید، به یک نظریهٔ d بعدی که روی مرز همدیس فضا-زمان حجمی قرار دارد، تصویر می‌شود.

اولین و شناخته شده ترین دوگانی از این نوع، تناظر AdS_5/CFT_4 است [۱و۲]. در همان راستا، بیش از یک دهه است که مدلی استاندارد برای تناظر AdS_4/CFT_3 توسط عده‌ای از پیشگامان در این زمینه، آهارونی، برگمن، جفریز و مالداسنا[2] (ABJM)، نیز ارائه شده است [۳]. در واقع، کنش ABJM ، جهان- حجم N غشای-M۲ متقاطع[3] در نوک مخروط C^4/Z_k، که حد نزدیک افق آنها $AdS_4\times S^7/Z_k$ است، همراه با $N'=k\ N$ واحد از شار ۴-فرم روی ۷- کره داخلی را توصیف می‌کند، مولد Z_k روی چهار مختصهٔ مختلط به صورت $Y_A\to exp(2\pi i/k)Y_A$ با $A=1,2,3,4$ عمل می کند. در حد توفت N بزرگ و $\lambda=N/k$ ثابت، زیرگروه $SU(4)\times U(1)\equiv H$ از گروه اصلی $SO(8)\equiv G$ باقی می‌ماند. در این صورت نظریهٔ مرزی ۳- بعدی $U(N)_k\times U(N)_{-k}\equiv\mathcal{G}$ از نوع چرن- سایمون[4] (CS)- ماده با ابرتقارن $\mathcal{N}=6$ با میدان‌ها در نمایش دو- بنیادی[5] هستند. در ضمن، برای $k=1,2$ ابرتقارن به $\mathcal{N}=8$ و تقارن به گروه اصلی G ارتقاء می یابد. در حد k بزرگ نیز یک توصیف بهتر برحسب نظریهٔ ابرگرانش نوع IIA روی $AdS_4\times CP^3$ با ۷- کره به صورت یک کلاف تاری[6] S^1 روی CP^3، در دسترس است.

از طرفی، برای مدل اخیر و گونه‌های مختلف آن- با خمینه‌های داخلی مختلف و به ویژه ۷-کره که به عنوان استاندارد در این مدل و طیف ناشی از تقلیل کالوزا-کلاین روی آنها به خوبی شناخته شده است- یافتن خلأها یا جواب‌های مختلف در نظریه‌های در دو طرف تناظر موضوع، تحقیقی مهمی بوده است. در سال‌های اخیر، ما جواب‌های جایگزیده‌ای به صورت تک قطبی، دیوار حوزه[7] و به ویژه اینستنتون[8] را در قالب آن تناظر با مدل‌های مشابه یافته‌ایم. برای نمونه [۴] ، [۵] و [۶] را ببینید.

به ویژه اینستنتون‌ها، به عنوان جواب‌هایی به معادلات حرکت در فضای اقلیدسی با کنش‌های متناهی غیرصفر، در انتگرال مسیر به صورت تصحیحات کوانتومی عمده به رفتار کلاسیکی دستگاه ظاهر می‌شوند. به عبارتی، اینستنتون‌ها دلالت بر این دارند که یک خلأ اختلالی معمولی، یک خلأ واقعی نیست؛ زیرا دستگاه می تواند به بیرون آن تونل بزند و این ایجاب می‌کند که انتگرال مسیر را با یک جملهٔ توپولوژیکی جدید بازنویسی کنیم تا این اثر به حساب آید. در واقع، اینستنتون‌ها به علت مشخصه غیراختلالیشان، علاوه بر این که سبب تصحیحات برای کنش‌های زمینه می‌شوند، برای فهم چگالش خلأ کرومودینامیک کوانتومی، محاسبه احتمال گذار کوانتومی یک ذره از چاه و به ویژه در کیهانشناسی جهان اولیه و مدل‌های مرتبط به خلق جهان از طریق تونل‌زنی بین خلأهای

۱. Holographic entanglement entropy
۲. Aharony, Bergman, Jafferis and Maldacena
۳. Intersecting M2-branes

۴. Chern-Simons
۵. Bifundamental
۶. Fiber bundle
۷. Domain wall
۸. Instanton

مختلف و گذار فاز مرتبهٔ اول و همچنین، برای آزمایش تناظر گرانش- نظریهٔ پیمانه‌ای کاربرد دارند (برای مطالعهٔ بیشتر در مورد اینستنتون‌ها و کاربردهای فیزیکی آنها، مرجع [۷] و مراجع در آن را ببینید).

نکتهٔ اصلی این است که ما در دو طرف این دوگانی، چنین جواب‌های (اینستنتونی) با معانی فیزیکی جالب توجه را به دست می‌آوریم و سپس از قواعد تناظر گرانش/پیمانه، آنها را به هم مرتبط می‌کنیم. در واقع در مرز فضای پاددوسیتهٔ ۴- بعدی اقلیدسی ($\mathrm{E}AdS_4$) و روی جهان-حجم (پاد)غشاءهای-M۲، نظریهٔ میدان همدیس ۳- بعدی اقلیدسی ($\mathrm{E}CFT_3$) در فضای تخت را داریم. رفتار جواب‌های حجمی در آن مرز، طبق قواعد تناظر حالت-عملگر با جواب‌ها در نظریهٔ مرزی (با خواص تقارنی یکسان) با تنظیم پارامترها منطبق می‌شوند؛ و در این راه تأیید ساختاری تناظر را نیز داریم.

در این راستا و در کارهای اخیر [۸و۹] از نظریهٔ ابرگرانش ۱۱- بعدی روی فضای $AdS_4 \times S^7 / Z_k$ و تغییر شار ۴- فرم زمینه، که به صورت اضافه کردن (پاد)غشاءهای-M به (پاد)غشاءهای-M۲ زمینه نیزقابل تفسیر است، شروع می‌شود. از حل معادلات و اتحادهای مربوطه، معادلات حرکت (شبه)اسکالر را در (حجم) فضای $\mathrm{E}AdS_4$ به دست آوردیم. از طرفی دیگر، ما به دنبال یافتن موجودات توپولوژیکی بوده‌ایم که هندسهٔ زمینه را نیز تغییر ندهند. در نتیجه، از حل همزمان معادلات اخیر با معادلات حاصل از صفر قراردادن مولفه‌های داخلی و خارجی تانسورهای انرژی- تکانه در طرف راست معادلات اینشتین، جواب‌های اینستنتونی را یافته ایم. آن جوابها نیز به نوبهٔ خود، اغلب مربوط به (شبه) اسکالر های جفت شده همدیس(..) و بی‌جرم در حجم، متناظر با تغییر شکل‌های مربوطه و حاشیه ای از نظریه های مرزی هستند. برای جواب- های مشابه با کاربردهای جالب توجه در کیهان شناسی، مراجع [۱۰و۱۱] را برای نمونه ببینید.

در اینجا، مشابه با [۱۲]، به حد کاوشی[۱] مسئله، یعنی به معادلهٔ اصلی در حجم با چشمپوشی از پس‌کنش[۲]، تمرکز می‌کنیم و جواب‌های جدیدی را به معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبهٔ دوم جزئی برای چند حالت ویژهٔ حجمی، $m^2 = -2, +4, +10$ ، از روش‌های اختلالی و به ویژه روش تجزیه آدومیان[۳] (ADM) خواهیم نوشت. البته، نکتهٔ جالب توجه این است که (شبه) اسکالرهای جرم‌دار حجمی، هیگز- گونه هستند؛ از این حیث که پتانسیل مربوطه از نوع چاه پتانسیل دوگانه همگن و شکست خود به خود تقارن نیز امکان‌پذیر است.

از طرفی دیگر، جواب‌های حجمی ما تمام ابرتقارن‌ها و همچنین پاریته را می‌شکنند؛ چراکه منتسب به غشاءها یا پادغشاءهای-M پیچیده شده حول جهت‌های ترکیبی در فضای داخلی هستند و نظریهٔ حاصل نیز مربوط به پادغشاءهای-M۲ می‌شود. علاوه بر این، درحالی که گروه ایزومتری فضای داخلی به صورت H بدون تغییر باقی می‌ماند، به علت شکستن ناوردایی مقیاس، جواب‌های حجمی تنها بخش $SO(4)$ از ایزومتری یا تقارن همدیس فضای خارجی اقلیدسی را نگه می‌دارند. برای برآوردن این لازمه‌ها، از بخش تکتایهٔ گروه پیمانه‌ای $U(N)$ (یا $O(N)$) CS - ماده (فرمیون‌ها و اسکالرها)، با تبادل میان سه نمایش بنیادی گروه $G \to H$ برای گراویتینو، در نظریهٔ مرزی برای ساختن عملگرهای H- تکتایه متناظر با مدهای حجمی استفاده می‌کنیم. سپس با تغییر لاگرانژین مربوطه مرزی با عملگرهای ساخته شده، جواب‌های اینستنتونی را به دست می‌آوریم.

ساختار این مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲، زمینهٔ ابرگرانشی و معادلات حرکت (شبه)اسکالر منتجه در حجم فضای خارجی $\mathrm{E}AdS_4$ را ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، روند کلی حل معادله دیفرانسیل حجمی را مورد بحث قرار می‌دهیم و به ویژه در زیربخش ۳.۱. مختصری از صورتمندی مورد استفاده برای اعمال روش تجزیه آدومیان را می‌آوریم. سپس در زیربخش‌های ۳.۲. تا ۳.۴. جواب‌های به دست آمده با این روش، برای مدهای مورد بحث در این نوشته را نشان می‌دهیم. در بخش ۴، تقارن‌های جواب‌های حجمی و دلالت‌های آنها

۱. Probe approximation

۲. Backreaction

۳. Adomian decomposition method

برای جواب‌های مرزی را، با اشاره به قواعد تناظر AdS_4/CFT_3 و تأکید بر مدهای هنجارش پذیر و شرط مرزی دیریکله، مطرح می‌کنیم. در بخش ۵، با ارائه کنش مرزی $ECFT_3$، در زیربخش‌های ۱.۵. تا ۳.۵. ، به ترتیب عملگرهای تغییرشکل $\Delta_+ = 2,4,5$ و جواب‌های مرزی دوگان مختلفی را برای حالت‌های حجمی ارائه می‌کنیم. در بخش ۶ نیز نکاتی پایانی، با تأکید بر تعبیر فیزیکی جواب‌ها، ارائه می‌شود.

۲. زمینهٔ ابرگرانشی ۱۱- بعدی و معادلات حرکت حاصل از تقلیل به ۴- بعد

برای زمینهٔ هندسی ابرگرانش ۱۱- بعدی، متریک به صورت زیر را به کار می‌بریم:

$$
\begin{aligned}
ds^2_{11D} &= R^2_{AdS}\, ds^2_{EAdS_4} + R^2_7\, ds^2_{S^7/Z_k}, \\
ds^2_{S^7/Z_k} &= ds^2_{CP^3} + e^2_7,
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

که $e_7 = \left(d\varphi' + \omega\right)$ ویلبین هفتم[۱] فضای داخلی، $\varphi' = \varphi/k$ مختصهٔ فیبری، $J\left(= d\omega\right)$ ۲- فرم کیلر[۲] روی CP^3 و $R = R_7 = 2R_{AdS}$ شعاع انحنای فضای پاددوسیته است. برای ۴- فرم قدرت- میدان از جواب آزمایشی زیر استفاده می‌کنیم:

$$
G_4 = R f_1\, G_4^{(0)} - 2\, R^4\, df_2 \wedge J \wedge e_7 + 8\, R^4\, f_3\, J^2, \qquad (۲)
$$

که در آن $G_4^{(0)} = (3/8) R^3 \mathcal{E}_4 = N \mathcal{E}_4$ در واقع میدان زمینهٔ ABJM نیز هست با $\mathcal{E}_4$ به عنوان ۴- فرم حجمی واحد؛ و f_1, f_2, f_3 توابع اسکالر در فضای خارجی هستند. اکنون، از قرار دادن جواب آزمایشی (۲) در معادلهٔ حرکت و اتحاد بیانکی در ابرگرانش ۱۱- بعدی، یعنی:

$$
\begin{aligned}
& d * G_4 - \frac{i}{2} G_4 \wedge G_4 = 0, \\
& dG_4 = 0,
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

که در آن عمل ستاره (*) در ۱۱- بعد است، عبارت‌های زیر را به دست می‌آوریم([۸ و ۹] را نیز ببینید):

$$
\begin{aligned}
f_1 &= i\, 32 R f_3^2 \pm i\, c_3, \\
f_3 &= -\frac{1}{4} f_2 \pm c_2,
\end{aligned}
\qquad (۴)
$$

$$
\begin{aligned}
& \Box_4 f_3 - \bar{m}^2 f_3 - \bar{\lambda}_4 f_3^3 = 0, \\
& \bar{m}^2 R^2_{AdS} = (1 \pm 3\, C_3), \quad \bar{\lambda}_4 = 384,
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

که در آن $C_j = R\, c_j$ ها (با $j = 1,2,3$) ثابت‌های حقیقی و $\Box_4$ لاپلاسین $EAdS_4$ است، علامت بالایی و پایینی ($\pm$) در پشت جملاتی شامل C_3 به ترتیب نسخه ویک- چرخیده[۳] (WR) و تغییر جهت دادهٔ[۴] (SW) زمینه را نشان می‌دهند، به طوری که در عبارت اخیر با $C_3 = 1$ در واقع روی زمینهٔ ABJM خواهیم بود. به طور مشابه علامت بالایی در پشت جملاتی شامل C_2 مشخص می‌کند که خلأ واقعی[۵] (با انرژی پایین‌تر) در طرف راست خلأ کاذب[۶] (با انرژی بالاتر) قرار می‌گیرد و بلعکس برای علامت پایین آن؛ البته از حالا به بعد ما علامت بالایی را در نظر می‌گیریم. اگرچه از معادلهٔ (۵) می‌توانیم جرم‌های مربعی مختلف برای (شبه)اسکالرها را محقق کنیم، با این وجود، نوشتن معادله برای $f_2 \equiv f$ جالب‌تر است که یک راه حصول آن را در [۹] و [۱۲] ارائه کردیم. همچنین می‌توانیم جملهٔ شامل $J^3 \wedge e_7$ در معادلهٔ حرکت (۳) را در نظر بگیریم و آن را با کمک عبارت طرف راست در (۴) به صورت $f_1 = +i\, 2R(f^2 - 8 c_2 f \pm c_1)$ بازنویسی کنیم. سپس از جمله شامل J^2 در معادلهٔ حرکت به دست می‌آوریم:

$$
\Box_4 f - m^2 f + \delta f^2 - \lambda_4 f^3 = 0, \qquad (۶)
$$

$$
m^2 R^2_{AdS} = 192\, C_2^2, \quad \delta R_{AdS} = 144\, C_2, \quad \lambda_4 = 24, \qquad (\text{الف .۶})
$$

که در آن از $C_1 = \mp 1/3$ استفاده کرده‌ایم؛ و نیز توجه داریم که در این مورد تنها جرم‌های مربعی مثبت ($m^2 \geq 0$) محقق می‌شوند. البته، قابل ذکر است که با $\delta = 6\sqrt{3}\, m$، این معادل همان روندی است که در [۱۲] برای همگن ساختن معادله و رسیدن به (شبه)اسکالر های هیگز- گونه مورد استفاده قرار دادیم. با این توجه که با $c_2 = \sqrt{-\bar{m}^2/\bar{\lambda}_4}$ - برای خلأهای همگن در زمینهٔ SW در طرف راست (۴)، f به عنوان افت‌و‌خیز حول آنها عمل می‌کند. به علاوه، خوب است تأکید کنیم

۱. The seventh vielbein

۲. Kähler

۳. Wick-rotated

۴. Skew-whiffed

۵. True vacuum

۶. False vacuum

که پتانسیل اسکالر در این مورد، که از معادلهٔ (۶) مشخص است، یعنی

$$V(f)=-3+\frac{m^2}{2}f^2-2\sqrt{3}\,m\,f^3+\frac{\lambda_4}{4}f^4, \qquad (\text{۶. ب})$$

با جملهٔ اول به عنوان ثابت کیهان‌شناسی در AdS_4، از نوع چاه دوگانه تقریباً همگن است. این نوع چاه در نظریه‌های تشکیل جهان اولیه از طریق تونل‌زنی به واسطهٔ (اسکالر) اینفلیتون[۱] و به ویژه در قالب جواب‌های جستان[۲] یا اینستنتون‌–گونه، پس از کار اولیهٔ کولمن‌– دی لوچیا [۳] (CdL) [۱۳]، به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. در اینجا نیز می‌توان تحلیل‌های جالب توجهی را در قالب تناظر AdS_4/CFT_3 در آن زمینه ارائه کرد که در فرصت مناسب به آن برخواهیم گشت.

۳. جواب‌های معادلات (شبه) اسکالر در فضای EAdS_4

همان گونه که ملاحظه می‌شود معادلات دیفرانسیل (۵) و (۶) که در تقریب کاوشی معتبرند، مرتبهٔ دوم غیر خطی با مشتقات جزئی از نوع بیضوی هستند. لذا به نظر می‌رسد یافتن جواب دقیق غیر بدیهی برای آنها ممکن نباشد؛ به جز برای (شبه) اسکالر cc که می‌توان با استفاده از تختی همدیس فضای پاددوسیته، جوابی دقیق برای آن نوشت. در زیربخش بعدی به این موضوع و جواب‌های دیگرش می‌پردازیم. بنابراین، یافتن جواب‌های تقریبی یا اختلالی با استفاده از روش‌های مختلف معادلات دیفرانسیل، برای تحلیل‌های نزدیک مرز، مطلوب است. بدین منظور، در این بخش، ابتدا مختصری از یک روند کلی برای ساخت جواب‌های تقریبی معادله دیفرانسیل مورد نظر را ارائه می‌دهیم. سپس در زیر بخش‌ها، بر روش تجزیهٔ آدومیان متمرکز می‌شویم و جواب‌هایی جدیدی را با این روش برای (شبه) اسکالر غیر مینیمال جفت شده (به گرانش) $m^2R^2_{AdS}=10$، علاوه بر $m^2R^2_{AdS}=4$ و مد تاکیونی $m^2R^2_{AdS}=-2$ (cc)، ارائه می‌کنیم.

۱. Inflaton

۲. Bounce solutions

۳. Coleman-de Luccia

در این راه، معادلهٔ اصلی (۶) را به صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$(\partial_i\partial_i+\partial_u\partial_u)\,g-\frac{(2+m^2)}{u^2}\,g+\frac{\delta}{u}\,g^2-\lambda_4\,g^3=0, \qquad (\text{۷})$$

که در آن از تغییر تابع $f=(u/R_{AdS})\,g$، متریک حجمی (در مختصات نیم‌صفحهٔ بالایی پوانکاره) و لاپلاسین به ترتیب به صورت

$$ds^2_{EAdS_4}=\frac{1}{u^2}\left(du^2+dx_idx_i\right), \qquad (\text{۸})$$

$$*_4d\left(*_4df\right)=\frac{1}{\sqrt{g_4}}\partial_{\mu'}\left(\sqrt{g_4}\;\;g^{\mu'\nu'}\,\partial_{\nu'}f\right)\Rightarrow$$
$$\Box_4 f=\frac{u^2}{R^2_{AdS}}\left(\partial_i\partial_i+\partial_u\partial_u-\frac{2}{u}\partial_u\right)f, \qquad (\text{۹})$$

با توجه به خاصیت پخشی عمل ستاره به علت قطری بودن متریک (۱)، استفاده شده است. به علاوه، توجه شود که $\mu',\nu'=1,...,4$ برای شاخص‌های ۴- بعدی حجمی و $i,j=1,2,3$ برای شاخص‌های ۳- بعدی مرزی هستند.

همچنین، قابل توجه است که می‌توانیم به حل معادلهٔ (۶) با نوشتن لاپلاسین ۳- بعدی در (۹) بر حسب مختصات کروی با $r=|\vec{u}|=\sqrt{x_i\,x_i}$، $\vec{u}=(x,y,z)$ و کنار گذاشتن قسمت زاویه‌ای آن برای سادگی، بپردازیم. در واقع، ابتدا با روش جداسازی متغیرها می‌توانیم جواب مرتبه- صفر یا پایه‌ای را برای قسمت خطی‌اش بنویسیم (مثلا $f_0=\hat{f}_0(r)\breve{f}_0(u)$) که به وضوح بر حسب توابع هایپربولیک برای بخش r و توابع بسل برای بخش u است. سپس یک جواب مرتبه- اول (f_1) را با قرار دادن جواب پایه به جای تابع در جملات غیر خطی و حل معادلهٔ حاصل به دست آوریم و همینطور در مراتب بالاتر؛ و سپس جواب منتجهٔ اختلالی در مرتبهٔ n ام بسط را به صورت $f^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}f_i$ بنویسیم(مرجع [۱۴] را نیز ببینید). در این روش، یک جواب ساده برای قسمت فضایی را می‌توان به صورت $\hat{f}(r)\sim e^{-r}/r$ نوشت و برای قسمت u نیز توابع بسلی از نوع اول و دوم به دست آورد [۱۲]، به گونه‌ای که رفتار کلی (شبه) اسکالرها در نزدیک مرز به صورت زیر باز تولید می‌شود:

$$f(u\to 0,\vec{u})\to\alpha(\vec{u})\,u^{\Delta_-}+\beta(\vec{u})\,u^{\Delta_+}, \qquad (\text{۱۰})$$

که $\Delta_{\mp}=(3/2)\mp\nu$ با $2\nu=\sqrt{9+4m^2}$، ریشه‌های کوچک‌تر و بزرگ‌تر معادلهٔ $m^2=\Delta(\Delta-3)$ در فضای AdS_4 هستند.

علاوه بر این، از روش تقلیل خود- همانند[1] و دیدگاه گروه- لی، با نگه داشتن تنها جملات هنجارش‌پذیر متناظر با شرط مرزی دیریکله در بسط سری، جوابی را که برای تحلیل‌های مرزی در اینجا نیز مفید است، به صورت زیر به دست می‌آوریم [۹ و ۱۲]:

$$f^{(1)}(u,r)\approx\hat{C}_{\Delta_+}\left(\frac{u}{r}\right)^{\Delta_+}\equiv\hat{\beta}\,u^{\Delta_+}. \qquad (11)$$

۱.۳. دو شکل کلی نوشتن معادلات برای استفاده از روش تجزیهٔ آدومیان

روش تجزیهٔ آدومیان، به عنوان یک روش تقریبی نیمه‌تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مشتقات عادی یا جزئی به کار می‌رود [۱۲] و [۱۵] را نیز ببینید. برای بهره‌برداری از این روش، با توجه به این که معادلات (۵) و (۶) از مرتبهٔ دوم هستند و مطلوب ما یک بسط یا جواب نزدیک مرز ($u=0$) است، با نوشتن $f_0(0,r)=f(0,r)+u\,f_u(0,r)$ و استفاده از دادهٔ اولیه‌ای که در اینجا می‌توان آنرا درحالت کلی شرط مرزی نیومن، دیریکله یا ترکیبی در تناظر AdS/CFT بگیریم، قادر خواهیم بود که برای مدهای خاص حجمی، جواب‌هایی را به صورت بسط سری نزدیک مرز به دست آوریم. همچنین می‌توان روش آدومیان را بر پایهٔ جوابی صریح مورد استفاده قرار داد. در اینجا آن را جواب معادله جرم‌دار آزاد یا قسمت خطی (۵) و (۶) به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۶]:

$$\Box_4 f_0-m^2 f_0=0\Rightarrow f_0(u,\vec{u})=\bar{C}_{\Delta_+}\left[\frac{u}{u^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}\right]^{\Delta_+}, \qquad (12)$$
$$\bar{C}_{\Delta_+}=\frac{\Gamma(\Delta_+)}{\pi^{3/2}\,\Gamma(\nu)};$$

با رفتار نزدیک مرز

$$f_0(u\to 0,r)=\bar{C}_{\Delta_+}\left(\frac{u}{r^2}\right)^{\Delta_+}\approx f(r)\,u^{\Delta_+}, \qquad (13)$$

که به عنوان دادهٔ اولیه آدومیان، متناظر با شرط مرزی دیریکله، در معادلهٔ تکرار زیر به کار می‌رود:

$$\Box_4 f_{i+1}-m^2 f_{i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}A_i, \qquad (14)$$

با چند جمله‌ای‌های آدومیان، در نقش جملات اختلالی، به صورت

$$A_0=\lambda_4 f_0^3-\delta f_0^2,$$
$$A_1=3\lambda_4 f_0^2 f_1-2\delta f_0^2 f_1,\ldots, \qquad (۱۴.\text{الف})$$

برای معادلهٔ (۶) و یا با کنارگذاشتن جملهٔ شامل δ و قرار دادن ثابت جفت‌شدگی و جرم مربوطه برای معادلهٔ (۵).

به همین ترتیب و به عنوان شیوهٔ دیگر استفاده از روش آدومیان، معادلهٔ (۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left(\partial_i\partial_i+\partial_u\partial_u\right)g_0-\lambda_4 g_0^3=0, \qquad (15)$$

$$\left(\partial_i\partial_i+\partial_u\partial_u\right)g_{i+1}-\lambda_4 g_{i+1}^3=\sum_{i=0}^{\infty}A_i, \qquad (16)$$

که در آن چندجمله‌ای‌های آدومیان به صورت زیرند:

$$A_0=\frac{(2+m^2)}{u^2}g_0-\frac{\delta}{u}g_0^2,$$
$$A_1=\frac{(2+m^2)}{u^2}g_1-\frac{2\delta}{u}g_0\,g_1,\ldots. \qquad (۱۶.\text{الف})$$

۲.۳. جواب‌هایی برای معادلات (شبه)اسکالر $m^2=-2$ با روش آدومیان

ابتدا توجه می‌کنیم که مد $\bar{m}^2=m^2=-2$ را می‌توان از نسخهٔ SW (۵) با $C_3=1$ محقق کرد. همچنین اگر معادلهٔ f را از قراردادن مستقیم عبارت سمت راست (۴) در (۵) بنویسیم، چنین مدی را می‌توان با $C_3=1$ و $C_2=0$ در آن محقق کرد [۹]. معادلهٔ حاصل آن با توجه به (۷)، همان (۱۵) است و جوابی دقیق برای آن (از حالا به بعد $R_{AdS}=1$) نیز می‌شود[2] [۱۸ و ۱۹]:

$$g_0(u,\vec{u})=\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda_4}}\frac{b_0}{-b_0^2+(u+a_0)^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}, \qquad (17)$$

۱. Self-similar reduction

۲. چند جواب خاص برای چنین حالتی در [۱۷] نیز ارائه شده اند.

که در آن $\vec{u}_0 = (b_1, b_2, b_3)$ با a_0 و b_j ها، مدول‌های جواب و به ترتیب نشان دهندهٔ اندازه و مکان اینستنتون روی مرزند. از طرفی دیگر، همین مد را می‌توان همچنین از (۴) و نسخهٔ SW (۵)، با $C_1 = 13/12$ [1] و $\delta = 144 C_2 = 3\sqrt{2}$، با معادلهٔ زیر محقق کرد:

$$\Box_4 f + 2f + 3\sqrt{2} f^2 - 24 f^3 = F, \tag{18}$$

با مقدار غیرهمگنی $F = 13/(72\sqrt{2})$ که آن را کنار می‌گذاریم چون سهمی به دینامیک ندارد و تنها یک ثابت به جواب نهایی اضافه می‌کند؛ و در اینجا، جواب‌هایی غیر از آنچه در [۹] ارائه کردیم، را برای معادلهٔ اخیر نیز به دست می‌آوریم.

می‌توانیم از جواب دقیق (۱۷) به عنوان پایه‌ای برای ساختن جواب‌های تقریبی معادله (۷) برای مدهای جرم‌دار مختلف و معادلهٔ (۱۸) برای همین مد cc نیز استفاده کنیم. برای این منظور، از روش تجزیهٔ آدومیان با بسط تیلور جواب بسته (۱۷) نزدیک مرز که به صورت

$$g_0(u \to 0, r) \equiv \tilde{g}_0(u,r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b_0}{\left(a_0^2 - b_0^2 + r^2\right)} \left(1 - \frac{2 a_0}{\left(a_0^2 - b_0^2 + r^2\right)} u\right), \tag{19}$$

است، به عنوان دادهٔ اولیه در (۱۶) استفاده می‌کنیم، با این توجه که $r = |\vec{u} - \vec{u}_0|$ را در نظر گرفته‌ایم.

در واقع، برای معادلهٔ (۱۸) و بر پایهٔ جواب یا دادهٔ اولیه (۱۹)، با استفاده از فرایند تکرار در (۱۶) با $m^2 = -2$ و $\delta = 3\sqrt{2}$ در (۱۶. الف)، جواب سری زیر را تا مرتبهٔ دوم بسط اختلالی در نزدیک مرز به دست می‌آوریم:

$$f^{(2)}(u,r) = \tilde{g}_0(u,r) u + \frac{\sqrt{2}\, b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2 + r^2)^2} \left[1 - \ln(u)\right] u^2 + O(u^3). \tag{20}$$

به طور مشابه، با شرط یا جواب اولیه از (۱۳) برای این مد ($\Delta_+ = 2$) و با استفاده از چند جمله‌ای‌های آدومیان (۱۴. الف)، جواب زیر در مرتبهٔ دوم فرایند تکرار در (۱۴) را نیز می‌توان نوشت:

$$f^{(2)}(u,r) \approx \left(\frac{3}{\pi^2 r^4} + \frac{15\sqrt{2}}{4\pi^4 r^6}\left[1 - \ln(r)\right] + O\left(\frac{1}{r^8}\right)\right) u^2 + O(u^3). \tag{21}$$

در حالت کلی‌تر، برای چنین حالتی، با استفاده از دادهٔ اولیه یا شرط مرزی کلی یا ترکیبی $g_0(u,r) = f_1(r) + f_2(r)\, u$، برای بخش همگن (۱۸) با چند جمله‌ای‌های آدومیان (۱۴. الف)، جواب سری زیر را نیز می‌توان در مرتبهٔ دوم بسط اختلالی به دست آورد:

$$f^{(2)}(u,r) = f_1(r) u + \left(f_2(r) + 3\sqrt{2} f_1(r)^2 \left[1 - \ln(u)\right] + 6 \frac{f_1(r)^4}{f_2(r)}\right) u^2 + O(u^3); \tag{22}$$

البته می‌توان آن را برای شرط مرزی دیریکله ($f_1(r) = 0$) و به ویژه جواب (۱۳) با $\Delta_+ = 2$، یعنی $f_2(r) = f(r) = 1/(\pi r^2)^2$، برای به دست آوردن جوابی صریح‌تر نیز بازنویسی کرد.

۳.۳. جواب‌هایی برای معادلات (شبه)اسکالر m^2=۴ با روش آدومیان

برای مد جرم‌دار m^2=۴، که با C_1=۱ در نسخهٔ WR (۵) و با $\delta = 12\sqrt{3}$ در (۶) نیز محقق می‌شود، اخیراً جواب‌هایی را در [۱۲] ارائه کردیم که با شرط اولیه از (۱۳) با $\Delta_+ = 4$، یک جواب تقریبی به صورت سری اختلالی آن در نزدیک مرز به صورت زیر بود:

$$f^{(2)}(u,r) = f(r)\left[1 - 6\ln(u) - \ldots\right] u^4 + O(u^6),$$
$$f(r) = \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{u}{r^2}\right)^4. \tag{23}$$

از طرفی دیگر، با استفاده از جواب پایهٔ (۱۷) و رفتار نزدیک مرز آن در (۱۹)، می‌توان به طریق آدومیان در (۱۶) با چند جمله‌ای‌های (۱۶. الف) برای معادلهٔ (۶) با این مد جرم‌دار، جواب تقریبی زیر را در مرتبه اول بسط اختلالی نوشت:

---

۱. دلیل اصلی برای در نظرگرفتن این اندازه، از استدلال‌های در [۲۰] که در اینجا نیز معتبرند می‌آید. همچنین، با تعریف $\xi \mathcal{R}_4 \equiv \left(1 - 3C_3\right)$ و ثابت جفت‌شدگی غیر مینیمال $\xi = 3/16$ و $\mathcal{R}_4 = -12$ برای $\mathrm{E}AdS_4$، مقدار $C_1 = 13/12$ محقق می‌شود.

$$f^{(1)}(u,r) \cong -\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{a_0 b_0 \left(a_0^2 + 2a_0 b_0 + 5b_0^2 - r^2\right)}{(a_0^2 - b_0^2 + r^2)^4} u^4. \quad (24)$$

۴.۳. جواب‌هایی برای معادلات (شبه) اسکالر $m^2 = 10$ به روش آدومیان

مد (شبه)اسکالر m²=۱۰ را می‌توان در نسخهٔ WR معادلهٔ (۵) با $C_3 = 3$ و یا در معادلهٔ (۶) با $C_2 = \sqrt{5}/(4\sqrt{6})$، به ترتیب به صورت زیر محقق کرد:

$$\Box_4 f_3 - 10 f_3 - 384 f_3^3 = 0, \quad (25)$$

$$\Box_4 f - 10 f + 6\sqrt{30} f^2 - 24 f^3 = 0. \quad (26)$$

با استفاده از جواب یا دادهٔ اولیه (۱۳) با $\Delta_+ = 5$ متناظر با شرایط مرزی دیریکله و استفاده از معادلات تکرار (۱۴) با چند جمله‌ای‌های آدومیان (۱۴. الف) با ضرایب مربوطه، به ترتیب جواب‌های سری زیر را در مرتبهٔ دوم اختلال و در نزدیک مرز به دست می‌آوریم:

$$f_3^{(2)}(u,r) = f(r)\left[1 - 12\ln(u) + 144\ln(u)^2\right]u^5 + O(u^7), \quad (27)$$

$$f^{(2)}(u,r) = 3 f(r) u^5 - \frac{3}{49}\left(\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df(r)}{dr}\right)u^7 + O(u^9), \quad (28)$$

که در آنها می‌توان $f(r) = \bar{C}_5 / r^{10}$ را قرار داد.

به علاوه، می‌توان جواب دیگری را برای این حالت نیز بر پایهٔ رفتار نزدیک مرز جواب (۱۷)، یعنی (۱۹) به عنوان شرط یا دادهٔ اولیه و از روی معادلات تکرار (۱۶) با چند جمله‌ای‌های آدومیان (۱۶. الف) نوشت که در مرتبهٔ اول بسط سری اختلالی به صورت زیر می‌شود:

$$f^{(1)}(u,r) \cong \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \frac{96 a_0^2 b_0^3}{(a_0^2 - b_0^2 + r^2)^5} u^5, \quad (29)$$

با $\lambda = 384{,}24$ به ترتیب برای (۲۵) و (۲۶).

۴. از جواب‌ها و تقارن‌های حجمی به دوگان‌های مرزی با تناظر AdS_4 / CFT_3

ابتدا توجه داریم که به سبب ساختار جواب آزمایشی (۲) و این که (پاد) غشاهای چشمهٔ آن حول جهت‌های ترکیبی فضای داخلی ۷- بعدی می‌پیچند، با توجه به قواعد تقاطع غشاها- برای نمونه [۲۱] را ببینید- تمام ابرتقارن‌های اصلی شکسته می‌شوند ($\mathcal{N} = 8 \to 0$) و پاریته نیز می‌شکند. چرا که در واقع ما غشاهای-M را به زمینهٔ SW (یا پادغشاهای-M را به زمینهٔ WR) اضافه می‌کنیم و در نتیجه، نظریهٔ حاصل برای پادغشاهای-M2 است، با این توجه که SW به جز برای $AdS_4 \times S^7$ هیچ ابرتقارنی را نیز حفظ نمی‌کند [۲۲]. علاوه بر این، ناوردایی مقیاس نیز به سبب وجود جملات غیرخطی می‌شکند [1]. در نتیجه تقارن ایزومتری $SO(4,1)$ فضای $EAdS_4$ به $SO(3,1)$ در رد لورنتزی یا $SO(4)$ اقلیدسی کاهش می‌یابد. شش مولد $L_{\mu\nu}$ برای تبدیلات لورنتز و $L_{\mu 4} \equiv R_\mu \approx (K_\mu + a^2 P_\mu)$ متناظر با چرخش‌های روی یک ۳- کره با P_μ برای انتقالات، K_μ برای تبدیلات همدیس خاص و a به عنوان پارامتر مقیاس هستند. برای جزئیات بیشتر [۱۴]، [۲۳] و [۲۴] را نیز ببینید. همچنین قابل گفتن است که چون موجوداتی که در فضای خارجی داریم از خمش (پاد) غشاها حول جهت‌های فضای داخلی می‌آیند، قاعدتاً شبه اسکالر هستند [۲۵]، اگرچه در اینجا ما آنها را هم به صورت شبه اسکالر و هم اسکالر تحلیل می‌کنیم.

از طرفی، برای محقق کردن نقش شکست ابرتقارن در نظریهٔ مرزی دوگان، از تبادل سه نمایش $SO(8) \to SU(4) \times U(1)$ برای گراویتینو ($8_s \to 1_{-2} \oplus 1_2 \oplus 6_0,\ 8_c \to 4_{-1} \oplus \bar{4}_1,\ 8_v \to \bar{4}_{-1} \oplus 4_1$) استفاده می‌کنیم. یعنی با $8_s \leftrightarrow 8_c$ و $8_s \leftrightarrow 8_v$ که به ترتیب به معنای

---

۱. قابل توجه است که تصحیحات به نمودارهای درختی حجمی و وجود برهم‌کنش‌ها، سبب ظهور جرم‌ها (غیر از جرم cc) و شکست تقارن‌ها می‌شوند. بنابراین در اثر شکست ناوردایی مقیاس، عملگرهای مرزی ابعاد غیرعادی به دست می‌آورند. البته ما بعد برهنهٔ آنها را در تقریب کاهشی در نظر می‌گیریم.

تبادل نمایش‌های ابربار با فرمیون و اسکالر است، می‌توانیم H– تکتایه‌های شبه‌اسکالر یا فرمیونی و اسکالر را در $۳۵_s = ۱_{-۴} \oplus ۱_۰ \oplus \bar{۱}_۴ \oplus ۶_{-۲} \oplus ۶_۲ \oplus ۲۰'_۰$ محقق کنیم؛ در حالی که میدان تکتایهٔ پیمانه‌ای را می‌توان در $۲۸ \rightarrow ۶_{-۲} \oplus ۱_۰ \oplus \bar{۶}_۲ \oplus ۱۵_۰$ یافت. برای جزئیات بیشتر، [۱۴] و [۲۶] را نیز ببینید. در واقع این تبادل نمایش‌ها، برای تحقق میدان‌ها و عملگرهای – تکتایهٔ دوگان مرزی لازم است. همچنین، شکستن پاریته با وجود جملهٔ چرن- سایمون نیز بدیهی است؛ اگرچه در چارچوب نظریهٔ ABJM، این شکست پاریته باعث تمرکز به یک بخش از گروه پیمانه‌ای ضربی ($\mathcal{G}$) می‌شود. به عبارتی دیگر، در حد کاوشی، با اضافه کردن l (پاد)غشاهای–M به N (پاد)غشای– M۲ زمینه، گروه ضربی را می‌توان به صورت $SU(N+l)_k \times SU(N)_{-k}$ نوشت. سپس با کنارگذاشتن قسمت اصلی به عنوان ناظر، تنها بخش $SU(l)$ باقی می‌ماند؛ که البته از دید یک سازوکار هیگز جدید [۲۷] و نیز (پاد) غشاهای کسری، به عنوان (پاد) غشاهای– M۵ که حول سه مختصه فضای داخلی و سه مختصه فضای خارجی $R^۳ \times S^۳ / Z_k$ می‌پیچند، این تقلیل گروه پیمانه‌ای نیز توجیه شده است. مراجع [۶]، [۲۸] و [۲۹] را نیز ببینید. به ویژه قابل توجه است که در حد $k \rightarrow \infty$ (به عنوان تراز چرن) میدان–های پیمانه‌ای جدا می‌شوند و تنها قسمت $U(1)$ از گروه پیمانه–ای باقی می‌ماند. البته از تعریف $A_i^{\pm} \equiv (A_i \pm \hat{A}_i)$ و این نکته که (شبه) اسکالرهای ما نسبت به A_i^{+} خنثی هستند در حالی که A_i^{-} به عنوان تقارن باریونی عمل می‌کند، در بخش بعد استفاده خواهیم کرد.

از طرفی دیگر، یک (شبه) اسکالر در فضای $AdS_۴$ با رفتار نزدیک مرز به صورت (۱۰) را می‌توان با شرط مرزی نیومن ($\delta\beta = ۰$)، دیریکله ($\delta\alpha = ۰$) یا ترکیبی کوانتیده کرد.برای نمونه [۳۰]، [۲] و [۱۷] را ببینید. به ویژه، برای مدهای (شبه) اسکالر در بازهٔ جرم مربعی $-۹/۴ \le m^۲ \le -۵/۴$ ، هر سه نوع کوانتش قابل اعمال است؛ در حالی که برای مدهای با جرم مربعی بزرگ‌تر از حد بالای بازهٔ اخیر، تنها مد β هنجارش–پذیر است. لذا شرط مرزی دیریکله و عملگرهای دوگان با بعد همدیس Δ_+ را در اینجا به کار می‌بریم. همچنین، برای تضمین پایداری جواب‌ها و داشتن بعد حقیقی عملگرها، پایین‌ترین جرم مجاز $m_{BF}^۲ = -۹/۴$ را به عنوان قید برایتن لونر– فریدمن (BF) داریم [۳۱]. به علاوه، برای مدهای هنجارش–پذیری که بر آنها متمرکز می‌شویم، α و β تعبیرهای هولوگرافیک به ترتیب به عنوان چشمه و مقدار چشمداشتی خلأ تابع تک- نقطه‌ای عملگر Δ_+ ($\mathcal{O}_{\Delta_+}$) دارند و برای عملگر Δ_- ($\mathcal{O}_{\Delta_-}$) نقش آنها عوض می‌شود. قواعد تناظر $AdS_۴ / CFT_۳$ مورد نیاز برای هر سه شرط مرزی را نیز اخیراً در [۹] همراه با مراجع ضروری ارائه کرده‌ایم. در اینجا به ضرورت استفاده، تنها قاعدهٔ مربوطه به شرط مرزی دیریکله یا استاندارد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{۳}\beta = \langle \mathcal{O}_{\Delta_+} \rangle_\alpha = -\frac{\delta W[\alpha]}{\delta\alpha}, \quad W[\alpha] = -S_{on}[\alpha], \qquad (۳۰)$$

که در آن S_{on} کنش روی پوسته[۱] در حجم $AdS_۴$ و $W[\alpha]$ تابعی مولد همبسته همبند عملگر $\mathcal{O}_{\Delta_+}$ در $CFT_۳$ مرزی است. یادآوری می‌شود که کمیت‌های مربوطه برای شرط مرزی نیومن با تبدیل لژاندر این کمیت‌ها به دست می‌آیند.

۵. جواب‌های دوگان در نظریه‌های میدان چرن– سایمون– مادهٔ ۳– بعدی مرزی

باتوجه به استدلال‌های در بخش ۴، برای ساخت جواب‌های مرزی دوگان، ما در واقع برشی از لاگرانژین مدل ABJM– برای نمونه [۵] و [۳۲] را ببینید– شامل یک اسکالر ($Y = y$) و یک فرمیون (ψ) H– تکتایه به علاوه جملهٔ چرن– سایمون را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\mathcal{L}^{(i)} = \mathcal{L}_{CS}^{+} - tr\left(i\bar{\psi}\gamma^k D_k\psi\right) - tr\left(D_k y^{\dagger} D^k y\right) - \mathcal{W}_{\Delta}^{(i)}, \qquad (۳۱)$$

که آن $D_k\Phi = \partial_k\Phi + iA_k\Phi - i\Phi\hat{A}_k$ با $\Phi = (y, \psi)$، $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + i[A_i, A_j]$ و بخش CS را اغلب به صورت:

---
۱. On-shell

$$\mathcal{L}_{CS}^{+} = \frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{ijk}\ tr\left(A_i^{+}\partial_j A_k^{+} + \frac{2i}{3}A_i^{+}A_j^{+}A_k^{+}\right), \quad \text{(۳۱. الف)}$$

به جای جمع آن جملات برای میدان‌های A_i ($\mathcal{L}_{CS}$) و $\hat{A}_i$ ($\hat{\mathcal{L}}_{CS}$)، با یادآوری $A_i^{\pm} \equiv (A_i \pm \hat{A}_i)$ و $A_i^{-} = 0$، در نظر می‌گیریم. از جملهٔ آخر در که انتگرال W در (۳۱) است، در واقع تغییر شکلی است که با عملگرهای H- تکتایهٔ مختلف شامل می‌کنیم، با این توجه که عملگرهای تک‌ردی[۱] مرزی متناظر با جریان‌های غیر بقادار دوگان به میدان‌های جرم‌دار در حجم هستند.

۱.۵ دوگان‌هایی مرزی برای حالت جفت شدهٔ همدیس حجمی با شرایط مرزی نیومن و دیریکله

برای (شبه) اسکالر $m^2 = -2$ با جواب دقیق (۱۷)، در [۱۸]، [۱۹] و [۸] دیدیم که آن متناظر با تغییرشکل حاشیه‌ای سه‌ردی از عملگر $\mathcal{O}_1^{+} = tr(y\bar{y})$ مربوط به شرط مرزی نیومن است [۲]. همچنین با جواب دقیق مشابهی که اخیراً با شامل کردن پس‌کنش در [۹] به دست آوردیم، دوگان‌های مرزی آن را برای شرایط مرزی مختلف در مدل‌های بوزونی و فرمیونی عادی و بحرانی مورد بحث قرار دادیم.[۳]

در این زیربخش، برای تغییرشکل در (۳۱) دوگان به جواب حجمی مربوطه، از عملگر $\mathcal{O}_1^{+}$ اخیر برای شرط مرزی نیومن و $\mathcal{O}_2^{-} \sim tr(\psi\bar{\psi})$ برای شرط مرزی دیریکله، به علاوه عملگر $\mathcal{O}_2^{(a)} = tr(\psi\bar{\psi}) + \frac{4\pi}{k}\ tr(y\bar{y})^2$ در [۴۲] و [۴۳]، به عنوان ترکیبی خطی از $\mathcal{O}_2^{-}$ و $(\mathcal{O}_1^{+})^2$ استفاده می‌کنیم.

در واقع، برای تغییرشکل (جرمی) با عملگر $\mathcal{O}_1^{+}$ در (۳۱)، با کنار گذاشتن بخش فرمیونی آن، معادله حرکت و $\bar{y} = y^{\dagger}$ جواب می‌شوند:

$$\left(\nabla_i^2 - m_b^2\right)\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_c(r) \cong \frac{\tilde{c}}{\sqrt{m_b}}\frac{e^{-m_b r}}{r}, \quad (۳۲)$$

که با شرط $\varphi_c(r \to \infty) \to 0$ پذیرای جواب‌های با کنش متناهی است. لازم به یادآوری است که این‌چنین جواب‌هایی در قالب اینستنتون‌های مقید[۴] ابتدا در [۴۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. مقدار تصحیح کنش با کمک معادلهٔ حرکت را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{S}_{mB} = m_b^2 \int \varphi_c^2\ d^3\vec{u} \Rightarrow \tilde{S}_{mB}^{c} = 18\pi, \quad (۳۳)$$

که در آن $\tilde{c} \cong 3$ از [۴۵] و انتگرال گیری روی یک ۳- کره در بی‌نهایت (S_{∞}^{3}) انجام شده است. همچنین، به عنوان بررسی ساده‌ای از تناظر جواب‌های حجمی و مرزی در این مورد، $\langle \mathcal{O}_1^{+} \rangle_{\beta} \sim \varphi_c^2 \sim 1/r^2 \sim f_1(r)$ است که با جواب حجمی (۲۰) با $a_0 = b_0$ و نیز با $f_1(r)$ از (۲۲)، منطبق می‌شود.

---

۱. Single-trace operators

۲. لازم به یادآوری است که بخش تکتایه نظریه مرزی برای N بزرگ با $\lambda \to 0$ و $N,k \to \infty$ محقق و همچنین در این حد مدل ABJM به مدل O(N) برداری تبدیل می‌شود [۳۳]. از طرف دیگر، برای مدل O(N) برداری سه- بحرانی (tri-critical) در ۳- بعد با پتانسیل متناسب با تغییر سه- ردی عملگر $\langle \mathcal{O}_1^{+} \rangle = tr(y\bar{y}) \sim \varphi^2$ - با $y = \varphi I_N$ که I_N ماتریس واحد است و البته با کنارگذاشتن ضرایب N برای راحتی- که در مرز ناوردایی مقیاس را نیز می‌شکنند، گذار فاز در مقداری بحرانی $g_6^{*} = 158$ که کمتر از مقدار $g_6^{*} = 192$ در نقطهٔ ثابت فرابنفش (UV) است، روی می‌دهد [۳۴ و ۳۵]؛ و به ویژه برای $g_6 > g_6^{c}$، پتانسیل $(\sim g_6(\varphi^2)^3)$ از زیر نامقید و ناپایداری حاشیه‌ای داشتیم [۸]. علاوه بر این، طبق استدلال در [۳۶]، در مدل‌های U(N) CS سه- بحرانی نیز برای $g_6 > g_6^{c}$ تنها حالت‌های خنثی نسبت به U(1) باقی می‌مانند و برای هر مقدار مثبت g_6، عملگر $g_6\mathcal{O}_1^{3}$ به طور کوانتومی نامربوط (irrelevant) و باعث ناپایداری مرزی می‌شود.

۳. با توجه به اهمیت حالت cc، اشاره به نقش آن در نظریه‌های اسپین بالاتر واسیلیف (Vasiliev's Higher-Spin (HS) theories) حجمی و دوگان مرزی آنها نیز مفید است. در واقع، نظریهٔ واسیلیف نوع A حجمی با پاریته زوج (اسکالرها) و شرط مرزی نیومن، دوگان به نظریه بوزونی O(N) یا U(N) CS عادی (اسکالر آزاد) با عملگر $\Delta_{-} = 1$ است. نظریهٔ واسیلیف نوع B حجمی با پاریته فرد (شبه اسکالرها) و شرط مرزی دیریکله، دوگان به نظریهٔ فرمیونی O(N) یا U(N) CS عادی (فرمیون آزاد) با عملگر $\Delta_{+} = 2$ است [۳۷ و ۳۸]. به علاوه، این دو نظریه تحت شارگروه بازبهنجارش به نظریه‌های بحرانی متناظرشان می‌روند. به عبارتی دیگر، نظریهٔ نوع A (نوع B) با شرط مرزی $\Delta_{+} = 2$ ($\Delta_{-} = 1$) روی اسکالر (شبه اسکالر)، دوگان به مدل برداری بوزونی (فرمیونی) بحرانی است [۳۹]. درضمن، دوگانی بوز- فرمی بین مدل‌های بوزونی عادی و فرمیونی بحرانی و نیز بین مدل‌های فرمیونی عادی و بوزونی بحرانی- [۴۰] و [۴۱] را ببینید- را اخیراً در [۹]، حداقل در سطح جواب‌هایی در این مدل‌ها، تأیید کردیم.

۴. Constrained instantons

برای تغییر شکل (جرمی) با عملگر $\mathcal{O}_2^- = tr(\psi\bar{\psi})$ در (۳۱) نیز، با کنار گذاشتن بخش اسکالر آن، معادلهٔ حرکت $\bar{\psi}$ و جواب می‌شوند:

$$i\gamma^k\partial_k\psi + m_f\,\psi = 0 \Rightarrow \psi = \tilde{b}\,\frac{\left[\tilde a + i\left(\vec u - \vec u_0\right).\vec\gamma\right]}{\left[\tilde a^2 + (\vec u-\vec u_0)^2\right]^{3/2}}\,\chi, \qquad (۳۴)$$

که در آن ماتریس‌های گاما به صورت $\gamma^k = (\sigma_2,\sigma_1,\sigma_3)$ هستند با $\sigma_i^\dagger=\sigma_i$ و اسپینور ثابت بدون بعد، رابطهٔ $\chi^\dagger\chi=1$ را اقناع می‌کند. برای جواب فرمیونی مشابه، [۴۶] را ببینید. علاوه بر این بایستی

$$m_f \equiv \tilde\alpha(\vec u) = -\frac{3\tilde a}{\left[\tilde a^2+(\vec u-\vec u_0)^2\right]}. \qquad (۳۴.\text{ الف})$$

در نتیجه، مقدار تصحیح کنش با کمک معادلهٔ حرکت را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت(مرجع [۹] را نیز ببینید):

$$\tilde S_{mF} = 2\int m_f\; tr(\psi\bar\psi)\; d^3\vec u \Rightarrow \tilde S^c_{mF} = \left(\frac{\pi\tilde b}{\tilde a}\right)^2, \qquad (۳۵)$$

که در آن انتگرال‌گیری روی S^3_∞ با مبدأ در مرکز کره ($\vec u_0 = 0$) انجام شده است. به علاوه، تناظر $\langle\mathcal{O}_2^-\rangle_\alpha \sim \beta$ با جواب‌های حجمی در زیربخش ۲.۳. با تطبیق پارامترها به وضوح، به طور تقریبی، برقرار است.

همچنین، با تغییرشکل $\mathcal{W}_2^{(a)} = \tilde\alpha\left(\vec u\right)\,\mathcal{O}_2^{(a)}$ در (۳۱)، سهم بخش فرمیونی همان (۳۴) است، در حالی که معادلهٔ اسکالر و جواب آن، با $a=\tilde a$ و (۳۴. الف)، می‌شوند:

$$\partial_k\partial^k\varphi - \frac{8\pi}{k}\tilde\alpha\,\varphi^3 = 0 \Rightarrow \varphi = \sqrt{\frac{3k}{24\pi}}\left[\frac{a}{a^2+(\vec u-\vec u_0)^2}\right]^{\frac{1}{2}}; \qquad (۳۶)$$

و در نتیجه مقدار تصحیح کنش با توجه به معادلات حرکت می‌شود:

$$\tilde S_{mF2} = -\frac{4\pi}{k}\int\tilde\alpha\,\varphi^4\, d^3\vec u \Rightarrow \tilde S^c_{mF2} = \frac{3}{2}k\pi. \qquad (۳۷)$$

به علاوه، به عنوان آزمون اولیه‌ای از تناظر جواب‌های حجمی و مرزی، داریم:

$$\langle\mathcal{O}^{(i)}_{\Delta_+}\rangle_\alpha \approx \frac{a^{\Delta_+}}{\left[a^2+(\vec u-\vec u_0)^2\right]^{\Delta_+}}, \qquad (۳۸)$$

با $\Delta_+ = 2$ و $ka^2/(16\pi)\approx\tilde b^2$ برای این مورد، که با جواب حجمی (۲۰) با $a_0^2 - b_0^2 = a^2$ به طور ساختاری و تقریبی منطبق می‌شود؛ و نیز در حد $a\to 0, r\to\infty$ (با یادآوری $r=\left|\vec u-\vec u_0\right|$) می‌توان تناظر تقریبی را با جواب‌های حجمی و از جمله (۲۱) برقرار کرد.

از طرفی دیگر، با شامل‌کردن میدان پیمانه‌ای H- تکتایه‌ای مانند A_i^+ برای ساختن عملگرها، سه عملگر جدید زیر را نیز در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2^{(b)} &= \varepsilon^{ij}\;F^+_{ij}, \\ \mathcal{O}_2^{(c)} &= tr(y\bar y)\;\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\;A_k^+, \\ \mathcal{O}_2^{(d)} &= \;\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\;A_k^+\,\bar\psi. \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

برای تغییرشکل در (۳۱) با عملگر $\mathcal{O}_2^{(b)}$ و کنار گذاشتن بخش‌های اسکالر و فرمیونی، معادلهٔ پیمانه‌ای و جوابی برای آن می‌شود:

$$\varepsilon^{kij}\;F^+_{ij} = 0 \Rightarrow F^+ = \frac{a_1}{r^4}, \qquad (۴۰)$$

که با $a_1,a_2,...$ به عنوان ثابت‌های مرزی، شرط $F^+(r\to\infty)\to 0$ و استفاده از جواب آزمایشی

$$A^+_\mu = \omega_{\mu\nu}\;x^\nu A(r),\;\; \omega_{\mu\nu} = \begin{cases}1 & :\nu>\mu, \\ 0 & :\nu=\mu,\end{cases} \quad \mu,\nu\neq i,j, \qquad (۴۰.\text{ الف})$$

که در آن $A(r)$ تابعی اسکالر و μ,ν نیز شاخص‌های مرزی هستند، به دست آمده است. برای جزئیات بیشتر [۱۲] را ببینید. در نتیجه، تناظر

$$\langle\mathcal{O}^{(i)}_{\Delta_+}\rangle_\alpha \sim \frac{1}{r^{2\Delta_+}}, \qquad (۴۱)$$

در این مورد با $\Delta_+ = 2$ برای جواب حجمی مربوطه (۲۱) و نیز (۲۰) با $a_0=b_0$ به طور تقریبی برقرار است.

برای عملگر $\mathcal{O}_2^{(c)}$ نیز اگر جملات $\mathcal{L}_{CS}+\hat{\mathcal{L}}_{CS}$ را به جای $\mathcal{L}^+_{CS}$ در (۳۱) بگیریم- و البته در نهایت، $A_i^-=0$ قرار داده می‌شود- یا هنگامی که تنها یک میدان پیمانه‌ای وجود دارد،

معادلات حاصل برای اسکالر ($\bar{y}=y^{\dagger}$) و میدان پیمانه‌ای به ترتیب می‌شوند:

$$D_k D^k y - y\,\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\,A_k^+ = 0, \tag{۴۲}$$

$$\frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{kij}F_{ij}^+ + i\left[y\left(D^k\bar{y}\right)-\left(D^k y\right)\bar{y}\right] - tr\left(y\bar{y}\right)\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij} = 0; \tag{۴۳}$$

که برای $y=\bar{y}$، شرط اقتاع ترکیب معادلات حاصل عبارت است از:

$$\partial_k\partial^k\varphi=0,\ \varphi(r)=a_2+\frac{a_3}{r}; \tag{۴۴}$$

$$\varepsilon^{kij}A_k^+\,F_{ij}^+=0,\ A_k^+=\varepsilon_{kij}\,\varepsilon^{ij}\,\tilde{A}(r), \tag{۴۵}$$

که $\tilde{A}(r)$ در آن تابع اسکالر مرزی دیگری است. به ویژه می‌بینیم که تناظر (۴۱) برای این عملگر نیز با $a_2=0$ برقرار است و

$$\tilde{A}(r)=\frac{a_4}{r^2}. \tag{۴۶}$$

از طرفی دیگر، اگر $y\neq\bar{y}$ که در فضای اقلیدسی مجاز است و به طور صریح با

$$y^{\dagger}=a_5\,I_N,\qquad y=\varphi\,I_N, \tag{۴۷}$$

آنگاه معادلات (۴۲) و (۴۳) به شرطی اقناع می‌شوند که

$$\partial_k\left(\varepsilon^{kij}\ F_{ij}^+\right)=0,\ A_k^+=i\frac{\partial_k\varphi}{\varphi}; \tag{۴۸}$$

می‌دانیم با شرط فوق برای A_k^+، جواب اینستنتونی $SU(2)$ یانگ- میلز BPST [1] [۴۷] به صورت زیر نیز ممکن است:

$$A_k^+\approx\frac{\left(x-x_0\right)_k}{a^2+(x-x_0)^2}\Rightarrow F_{ij}^+\approx\varepsilon_{ij}\left[\frac{a}{a^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2}\right]^2, \tag{۴۹}$$

که به معادلهٔ اسکالر بی جرم $\nabla_i^2\varphi+\lambda_4\,\varphi^3=0$ در سه بعد تقلیل می‌یابد. مرجع [۹] را نیز ببینید.

برای عملگر $\mathcal{O}_4^{(d)}$ به عنوان تغییرشکل در (۳۱)، با کنار گذاشتن قسمت اسکالر، ترکیب معادلات حاصل برای میدان پیمانه ای و فرمیونی به ترتیب با (۴۵) و

$$\begin{aligned}&i\gamma^k\partial_k\psi=0,\\ &\psi=\frac{i}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\,\frac{(x-x_0)^k\gamma_k}{\left[(x-x_0)_k(x-x_0)^k\right]^{3/2}}\ \chi,\end{aligned} \tag{۵۰}$$

۱. Belavin, Polyakov, Schwarz and Tyupkin

(با یادآوری $|\vec{u}-\vec{u}_0|=|x-x_0|$) اقناع و تناظر (۴۱) برای این عملگر نیز تأیید می‌شود. به علاوه، با جواب اخیر، صفر شدن بار مغناطیسی خالص و یا شار، یعنی $\Phi=\oint_{S_\infty^r}F^+=0$ را نیز داریم(مرجع [۵] را نیز ببینید).

اما در حالت کلی‌تر، اگر دو جملهٔ $\mathcal{L}_{CS}+\hat{\mathcal{L}}_{CS}$ را به جای $\mathcal{L}_{CS}^+$ در (۳۱) درنظر بگیریم، با عملگر $\mathcal{O}_4^{(d)}$ و کنار گذاشتن قسمت اسکالر، معادلات حاصل برای فرمیون ($\bar{\psi}$) و پیمانه به ترتیب عبارتند از:

$$i\gamma^k D_k\psi+\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\ A_k^+=0, \tag{۵۱}$$

$$\frac{ik}{4\pi}\varepsilon^{kij}\ F_{ij}^+ + 2\bar{\psi}\gamma^k\psi-\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\bar{\psi}=0,\ \ F_{ij}^-=0; \tag{۵۲}$$

سپس با ترکیب این دو معادله و $A_i^-=0$، معادلهٔ حاصل با جواب فرمیونی (۳۴) و جواب پیمانه‌ای

$$\tilde{A}(r)=\frac{3}{4}\tilde{n}\frac{\tilde{a}}{\left[\tilde{a}^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2\right]}, \tag{۵۳}$$

با $\tilde{n}=1$، اقتناع می‌شوند. در نتیجه، تناظر

$$\langle\mathcal{O}_4^{(d)}\rangle_\alpha=\frac{9\tilde{a}\tilde{b}\tilde{n}}{\left[\tilde{a}^2+(\vec{u}-\vec{u}_0)^2\right]^2}, \tag{۵۴}$$

را داریم که همان (۳۸) با $a=\tilde{a}=\tilde{b}$ است. به علاوه تطابق با جواب حجمی (۲۰) با $a_0^2-b_0^2=\tilde{a}^2$ و $a_0b_0\approx\tilde{a}\tilde{b}$ نیز وجود دارد.

۲.۵. جواب‌های مرزی دوگان برای حالت حجمی $m^2=4$ با شرط مرزی دیریکله

در مطالعهٔ اخیر [۱۲]، برای چنین حالت جرم‌داری، عملگر بعد ۴ مرزی $\mathcal{O}_4^{(c)}=tr(\psi\bar{\psi})\ \varepsilon^{ij}\ F_{ij}^+$ را علاوه بر $\mathcal{O}_4^{(a)}=tr(\psi\bar{\psi})\ tr(\varphi\bar{\varphi})^2$ و $\mathcal{O}_4^{(b)}=tr(\psi\bar{\psi})^2$ قبلاً به کاربرده شده در [۱۹] و [۱۴]، معرفی و جواب‌های دوگانشان تحلیل شدند. در اینجا، دو عملگر دیگر به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}_4^{(d)}=tr(y\bar{y})\ tr(\psi\bar{\psi})\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\ A_k^+,\\ &\mathcal{O}_4^{(e)}=tr(y\bar{y})^2\ \varepsilon^{ij}\ F_{ij}^+.\end{aligned} \tag{۵۵}$$

برای عملگر $\mathcal{O}_4^{(d)}$ به عنوان تغییرشکل در (۳۱)، با $A_i^- = 0$، با نوشتن معادلات میدان اسکالر، فرمیون و پیمانه‌ای، به سادگی ملاحظه می‌شود که آنها به ترتیب با معادلات و جواب‌های (۴۴)، (۵۰) و (۴۵) همراه با (۴۶) اقناع می‌شوند. در نتیجه تناظر (۴۱) با $\Delta_+ = 4$ برای این عملگر با جواب حجمی (۲۳) به طور تقریبی برقرار است.

برای عملگر $\mathcal{O}_4^{(e)}$ نیز، با کنارگذاشتن بخش فرمیونی (۳۱)، معادلهٔ اسکالر ($\overline{y}$) می‌شود:

$$\partial_k \partial^k y - 2\, y\, tr(y\overline{y})\varepsilon^{ij}\ F_{ij}^+ = 0; \tag{۵۶}$$

در حالی که معادله و جواب بخش پیمانه‌ای همان (۴۰) و برای اسکالر نیز (۴۴) است. بنابراین دوباره تناظر در (۴۱) برای این عملگر نیز برقرار می‌شود. به علاوه، با شرط صفرشدن قدرت– میدان پیمانه‌ای در بینهایت و سپس در نظر گرفتن

$$\varepsilon^{ij}\ F_{ij}^+ \equiv F^+ = -\varphi^2 = \left[\frac{a}{a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_\circ)^2}\right]^2, \tag{۵۷}$$

معادلهٔ (۵۶) و جواب حاصل به صورت زیر می‌شوند(برای جواب‌های مشابه معادلات اسکالر، برای نمونه، [۲۳] و [۴۸] را نیز ببینید):

$$\begin{aligned} &\partial_k \partial^k \varphi + 2\varphi^5 = 0 \Rightarrow \\ &\varphi(u, \vec{u}) = \sqrt[1/2]{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{a^2 + (\vec{u} - \vec{u}_\circ)^2}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{۵۸}$$

و در نتیجه تناظر (۳۸) با $\Delta_+ = 4$ برای این عملگر و تطابق ساختاری با جواب حجمی (۲۴) با تعدیل پارامترها را نیز داریم.

اما با $y^\dagger \neq y$ از (۴۷)، با بازنوشتن معادلهٔ پیمانه‌ای که سه جملهٔ اول از سمت چپ (۴۳) است و قرار دادن آن در (۵۶)، خواهیم داشت:

$$\partial_k \left(\varepsilon^{kij} F_{ij}^+\right) - \frac{8\pi a_\Delta}{k} \varphi^2(r) \varepsilon^{ij} F_{ij}^+ = 0; \tag{۵۹}$$

و سپس با A_i^+ از (۴۰. الف) که در نتیجهٔ آن $\varepsilon^{ij} F_{ij}^+ = -12 A(r) - 4\, r\, A'(r)$ است [۱۲]، به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \left(\varphi^2(r) + \frac{4}{r}\right)\frac{dA(r)}{dr} + \frac{3}{r}\varphi^2(r)\, A(r) = 0, \tag{۶۰}$$

و در نتیجه با $a_5 = -(3\sqrt{3}\ k)/8\pi$ جواب زیر را داریم:

$$\begin{aligned} &\varphi^2(r) = \frac{n}{r} \Rightarrow A(r) = \frac{a_6}{r^n} + \frac{a_7}{r^3} \Rightarrow \\ &F^+ = \frac{4\ a_6}{r^n}(n - 3), \end{aligned} \tag{۶۰. الف}$$

به علاوه با n=۷ دوباره ساختار و تناظر مطلوب (۴۱) با $\Delta_+ = 4$ را داریم. همچنین، با n=۳ تناظر $\langle \mathcal{O}_4^{(e)} \rangle_{\hat{\alpha}} \sim 1/r^4$ با جواب حجمی (۱۱) را خواهیم داشت.

همچنین، می‌توان لاگرانژین یانگ- میلز یا عملگر تغییر شکل را به صورت $\mathcal{O}_4^{(f)} \approx F_{ij}\, F^{ij}$ در نظر گرفت و جواب اینستنتونی معروف (۴۹) را برای آن نوشت که در نتیجه، تناظر (۳۸) در این مورد نیز برقرار می‌شود.

۳.۵. جواب‌های مرزی دوگان برای حالت حجمی $m^2 = 10$ با شرط مرزی دیریکله

عملگرهای H- تکتایهٔ بعد- ۵ متناظر با این حالت جرم‌دار را نیز می‌توانیم از میدان‌های اسکالر، فرمیون و پیمانه‌ای در این بخش بسازیم. برای نمونه، در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_\Delta^{(a)} = tr(y\overline{y})^3\ tr(\psi\overline{\psi}), \\ &\mathcal{O}_\Delta^{(b)} = tr(y\overline{y})^3\ \varepsilon^{ij}\ F_{ij}^+, \end{aligned} \tag{۶۱}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_\Delta^{(c)} = tr(y\overline{y})\ tr(\psi\overline{\psi})\,\varepsilon^{ij}\ F_{ij}^+, \\ &\mathcal{O}_\Delta^{(d)} = tr(y\overline{y})^2\ tr(\psi\overline{\psi})\,\varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\ A_k^+, \\ &\mathcal{O}_\Delta^{(e)} = tr(\psi\overline{\psi})^2\ \varepsilon^{kij}\varepsilon_{ij}\ A_k^+. \end{aligned}$$

در واقع $\mathcal{O}_\Delta^{(a)}$ را می‌توان به صورت تغییری چند- ردی مرکب از تغییر سه- ردی با $\mathcal{O}_1^+$ و تک- ردی $\mathcal{O}_2^-$ از زیربخش ۱.۵. گرفت. با در نظرگرفتن آن برای تغییرشکل در (۳۱) با توجه به (۳۰) – و البته چون با شرط مرزی دیریکله و مدهای هنجارش‌پذیر کار می‌کنیم، برای سادگی و بدون تغییر در نتایج، $\alpha = 1$ را قرار می‌دهیم- معادلات و جواب‌های حاصل برای اسکالر و فرمیون بترتیب (۴۴) و (۵۰) هستند؛ و در نتیجه تناظر (۴۱) با $\Delta_+ = 5$ با جواب‌های حجمی (۲۷) (قسمت هنجارش‌پذیر آن) و (۲۸) و نیز جواب (۲۹) با $a_\circ = b_\circ$ برقرار

می‌شود. در نتیجه آن ثابت‌های حجمی و مرزی نیز با هم تنظیم می‌شوند.

برای تغییرشکل با $\mathcal{O}_{\Delta}^{(b)}$ نیز، با کنارگذاشتن بخش فرمیونی (۳۱)، جواب پیمانه‌ای را می‌توان همان (۴۰) گرفت و معادلهٔ اسکالر نیز به صورت:

$$\partial_k \partial^k y - ۳\, y\, tr(y\bar{y})^۲ \varepsilon^{ij} F_{ij}^{+} = ۰, \qquad (۶۲)$$

همراه با جواب (۴۴) می‌شود. به علاوه، با $y \neq \bar{y}$ می‌توان فرایندی مشابه روابط (۵۹) و (۶۰) را برای بخش پیمانه‌ای انجام داد (با $\varphi^۳$ به جای $\varphi^۲$ و $n=۹$). به طور مشابه، برای عملگرهای $\mathcal{O}_{\Delta}^{(c)}$ و $\mathcal{O}_{\Delta}^{(d)}$ نیز معادلات اسکالر و فرمیونی حاصل با (۴۴) و (۵۰) اقناع می‌شوند؛با این تفاوت که جواب برای بخش پیمانه‌ای $\mathcal{O}_{\Delta}^{(c)}$، (۴۰) و برای $\mathcal{O}_{\Delta}^{(d)}$، (۴۵) همراه با جواب (۴۶) است. در نتیجه، تناظر (۴۱) برای سه عملگر اخیر با $\Delta_+ = ۵$ نیز برقرار است.

در نهایت، برای تغییرشکل با عملگر $\mathcal{O}_{\Delta}^{(e)}$، اگر ابتدا در حالت کلی جملات $\mathcal{L}_{CS} + \hat{\mathcal{L}}_{CS}$ را به جای $\mathcal{L}_{CS}^{+}$ بگیریم (و البته با $A_i^{-} = ۰$)، با کنار گذاشتن بخش اسکالر (۳۱)، معادلات حاصل، مشابه (۵۱) و (۵۲)، برای میدان فرمیونی و پیمانه‌ای به ترتیب عبارتند از:

$$i\gamma^k D_k \psi + ۲\psi\, tr(\psi\bar{\psi}) \varepsilon^{kij} \varepsilon_{ij}\, A_k^{+} = ۰, \qquad (۶۳)$$

$$\frac{ik}{۴\pi} \varepsilon^{kij} F_{ij}^{+} + ۲\bar{\psi}\gamma^k \psi - \varepsilon^{kij} \varepsilon_{ij}\, tr(\psi\bar{\psi})^۲ = ۰; \qquad (۶۴)$$

با این یادآوری که جملهٔ دوم در طرف چپ (۶۴) هنگامی که تنها یک جملهٔ CS $\mathcal{L}_{CS}^{+}$ موجود است، حضور ندارد و در آن صورت جواب فرمیونی (۵۰) و پیمانه‌ای (۴۵) با (۴۶) و تناظر (۴۱) نیز معتبر هستند. اما در حالت کلی، برای معادلهٔ حاصل از ترکیب (۶۳) و (۶۴)، بخش پیمانه‌ای با جواب آزمایشی (۴۵) و (۵۳) با $\tilde{n} = ۱/۲$ و بخش فرمیونی با جواب (۳۴) اقناع می‌شود؛ البته با درنظرگرفتن مؤلفهٔ سوم ماتریس گاما ($\gamma^k \to \gamma^۳$) و $\chi^{\dagger} = (۰ \;\; ۱)$. در نتیجه، به عنوان تأییدی از تناظر حالت- عملگر، داریم:

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta}^{(e)} \rangle_{\alpha} = \frac{۹\tilde{a}\, \tilde{b}^۴\, \tilde{n}}{\left[\tilde{a}^۲ + (\vec{u} - \vec{u}_۰)^۲\right]^۵}, \qquad (۶۵)$$

که همان تناظر (۳۸) با $\Delta_+ = ۵$ و $a = \tilde{a} = \tilde{b}$ است که با جواب حجمی (۲۸) در حد $a \to ۰$ و $r \to \infty$ و همچنین با جواب حجمی (۲۹) با $a_۰^۲ - b_۰^۲ = \tilde{a}^۲$ و $\tilde{a}\,\tilde{b}^۴ \approx a_۰^۲\, b_۰^۳$ مطابقت دارد. به علاوه، برای محاسبهٔ مقدار کنش از (۳۱) و بر پایهٔ معادلات و جواب‌های اخیر با این عملگر، با این توجه که سهم بخش CS صفر می‌شود، با قرار دادن $\tilde{b} = ۱$ برای سادگی و فرض $\tilde{a} \geq ۰$، به دست می‌آوریم:

$$S_{(۵)}^{modi.} = -۶\pi\tilde{a} \int_۰^{\infty} \frac{r^۲}{(\tilde{a}^۲ + r^۲)^۵}\, dr = -\frac{۱۵}{۲۵۶} \frac{\pi^۲}{\tilde{a}^۶}, \qquad (۶۶)$$

که مقداری متناهی است و سرشت جواب به عنوان اینستنتونی (کوچک) واقع در مبدأ یک ۳- کره با شعاع rدر بینهایت را تأیید می‌کند.

۶. نکات پایانی

در این مطالعه، از تقلیلی از ابرگرانش ۱۱- بعدی روی $AdS_۴ \times S^۷ / Z_k$ با یک شار ۴- فرم، معادلات (شبه) اسکالر غیرخطی مرتبه دومی را در حجم فضای پاددوسیتهٔ ۴- بعدی اقلیدسی به دست آوردیم. پس از حل آنها برای حالت‌های جفت شده همدیس $m^۲ = -۲$ و جرم‌دار $m^۲ = ۴, ۱۰$، به ویژه با روش تجزیهٔ آدومیان، به جواب‌های تقریبی به صورت بسط سری در نزدیک مرز رسیدیم. سپس، با توجه به شکست ابرتقارن، پاریته و ناوردایی مقیاس جواب‌های حجمی، جواب‌های $SO(۴)$ ناوردایی را در بخش $SU(۴) \times U(۱)$- تکتایهٔ نظریهٔ مرزی ۳- بعدی $SU(N)$ چرن- سایمون- ماده روی پادغشاهای-M۲، با عملگرهای $\Delta_+ = ۲, ۴, ۵$ دوگان (به مدهای هنجارش‌پذیر حجمی با شرط مرزی دیریکله) ساخته شده از یک اسکالر، فرمیون و میدان پیمانه‌ای، ارائه کردیم که در واقع اینستنتون‌های واقع در مرکز یک ۳-کره در بینهایت بودند.

در این میان، قابل توجه است که برای پتانسیل اسکالر حجمی (۶. ب) که می‌توان آنرا ناشی از یک نیروی جاذب بین غشا- پادغشا در اثر شکست ابرتقارن در نظر گرفت و شامل دو خلأ نسبتاً تبهگن که یکی کاذب که به طور کلاسیکی پایدار ولی از نظر کوانتومی ناپایدار است و دیگری صحیح یا واقعی است، تقریب دیوار نازک[۱] (TWA)- که در آن اختلاف انرژی بین دو خلأ بسیار کوچک و ضخامت دیوار کمتر از تمام مقیاس‌های طولی در مسئله است- برقرار است. به علاوه، در دمای صفر، گذار بین خلأها توسط افت و خیزهای کوانتومی یا دینامیک (در اینجا واپاشی از طریق تونل‌زنی) است، با این توجه که ضریب جملهٔ مکعبی در پتاسیل حجمی سرشت گذار فاز مرتبهٔ اول (کوانتومی) را مشخص می‌کند. به عبارتی دیگر، در TWA، یک حباب کروی $O(۴)$ متقارن که عمومی‌ترین جواب یا حداقل یک جواب با کمترین کنش است [۴۹]، را داریم که توسط یک متغیر دینامیکی (r) توصیف می‌شود و داخل حباب، خلأ صحیح و خارج آن خلأ کاذب است و دیوار حوزه بین دو ناحیه برون یابی می‌کند. در واقع انرژی به دست آمده از تشکیل حباب[۲] خلأ صحیح، به انرژی جنبشی دیواره منتقل و در نتیجه دیوار به طور نسبیتی گسترش می یابد؛ با این توجه که چهار مولد تقارن شکسته شده، یعنی انتقالات و تبدیل مقیاس، مسئول انتقال حباب به اطراف در حجم هستند [۱۱]. در واقع، داخل حباب خلأ صحیح، یک جهان فریدمن- لومتر- رابرتسون- واکر[۳] (FLRW) با انحنای منفی و یک تکینگی نابودی بزرگ[۴] است. ادامهٔ لونتزی آن اینستنتون CdL، مشابه یک سیاه چاله است که تکینگی پشت آن مخفی است. برای بحثی از رمبش یا فروپاشی حباب‌های از این نوع، برای نمونه [۵۰] را ببینید.در واقع، قابل توجه است که جواب‌های مشابه آنچه در اینجا ارائه شده‌اند، به گستردگی در توصیف مدل‌های تشکیل جهان‌های حبابی مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ که البته، بحث تکنیکی آن صورتمندی با نسخه‌های مختلف متریک حجمی، با توجه به رفتار جواب‌ها در حدود مختلف مختصات و محاسبات عددی مربوطه خارج از بحث این تحقیق است؛ و خواننده علاقمند می‌تواند برای نمونه به [۵۱] و [۵۲] از میان تحقیقات فراوان در این زمینه مراجعه کند.

نظریهٔ میدان مرزی در رد لورنتزی نیز روی تکه $dS_۳$ از $AdS_۴$ در uثابت زندگی می‌کند، با این توجه که جهت u هولوگرافیک، جهت شار گروه بازبهنجارش است؛ و پتانسیل نامقید از زیر مرزی نیز سبب رمبش بزرگ حجمی می‌شود. برای تفسیرهای بیشتر [۵۳] و [۵۴] را نیز ببینید. در واقع در اینجا نیز با عملگرهای تغییرشکل در نقش پتانسیل‌های مرزی، برای نمونه با توجه به (۵۷)، از (۵۸) می‌بینیم که یک پتانسیل نامقید از زیر و در نتیجه ناپایداری به سبب تونل‌زنی به واسطهٔ اینستنتون‌های از نوع فوبینی [۲۳]، از قله ($\varphi=۰$) به حالتی دلخواه داریم. به همین ترتیب، با کمک دوگانی بوز- فرمی از انواعی مانند $\psi\leftrightarrow\varphi^2$ و $\psi\sim A^+$ که در [۹] نیز بحث کرده‌ایم، تفسیرهای مشابهی را برای پتانسیل‌های تغییر شکل دیگر نیز می‌توان ارائه کرد.

به عنوان نکتهٔ آخر، جالب توجه است کـه جـواب‌هـای در اینجا مثال‌هایی از خلأهای AdS غیر ابرمتقارن هستند کـه طبـق [۵۵] باید ناپایدار باشند.

۱. Thin-wall approximation

۲. Bubble nucleation

۳. Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

۴. Big crunch singularity

مراجع

1. J Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys*. **2** (1998) 231.
2. I R Klebanov and E. Witten, *Nucl. Phys. B* **556** (1999) 89.
3. O Aharony, O Bergman, D L Jafferis, and J Maldacena, *JHEP* **0810** (2008) 091.
4. M Naghdi, *Int. J. Mod. Phys. A* **26** (2011) 3259.
5. M Naghdi, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 026013.
6. M Naghdi, *Class. Quant. Grav*. **32** (2015) 215018.
7. S Vandoren and P Nieuwenhuizen, [arXiv:0802.1862 [hep-th]].
8. M Naghdi, *Fortschr. Phys.* **67** (2018) 1800044.
9. M Naghdi, [arXiv:2002.06547 [hep-th]].
10. T Hertog and G T Horowitz, *JHEP* **04** (2005) 005 .
11. M Smolkin and N Turok, [arXiv:1211.1322 [hep-th]].
12. M Naghdi, [arXiv:2005.00358 [hep-th]].
13. S R Coleman and F. De Luccia, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 3305.
14. M Naghdi, *Eur. Phys. J. Plus* **133** (2018) 307.
15. G Adomian, "*Solving frontier problems of physics: The decomposition method*", Springer, 1st Edition (1994).
16. E Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998) 253.
17. I Papadimitriou, *JHEP* **0705** (2007) 075.
18. A Imaanpur and M Naghdi, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 085025.
19. M Naghdi, *Class. Quant. Grav*. **33** (2016) 115005.
20. O Hrycyna, *Phys. Lett. B* **768** (2017) 218.
21. E Bergshoeff, M de Roo, E Eyras, B Janssen, and J P van der Schaar, *Nucl. Phys. B* **494** (1997) 119.
22. M J Duff, B E W Nilsson and C N Pope, *Nucl. Phys. B* **233** (1984) 433.
23. S Fubini, *Nuovo Cim. A* **34** (1976) 521.
24. F Loran, *Mod. Phys. Lett. A* **22** (2007) 2217.
25. B E W Nilsson and C N Pope, *Class. Quant. Grav*. **1** (1984) 499.
26. M Bianchi, R Poghossian and M Samsonyan, *JHEP* **1010** (2010) 021.
27. X Chu, H Nastase, B Nilsson, and C Papageorgakis, *JHEP* **1104** (2011) 040.
28. I Bena, Phys. Rev. D **62** (2000) 126006.
29. O Aharony, O Bergman, D L Jafferis, *JHEP* **0811** (2008) 043.
30. V Balasubramanian, P Kraus and A Lawrence, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 046003.
31. P Breitenlohner and D Z Freedman, *Phys. Lett. B* **115** (1982) 197.
32. S Terashima, *JHEP* **0808** (2008) 080.
33. B Craps, T Hertog and N Turok, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 086007,
34. W A Bardeen, M Moshe and M Bander, *Rev. Lett.* **52** (1984) 1188.
35. S Elitzur, A Giveon, M Porrati and E Rabinovici, *JHEP* 0602 (2006) 006.
36. E Rabinovici and M Smolkin, *JHEP* **1107** (2011) 040.
37. I R Klebanov and A M Polyakov, *Phys. Lett. B* **550** (2002) 213.
38. E Sezgin and P Sundell, *Nucl. Phys. B* **644** (2002) 303. [arXiv:hep-th/0205131], Erratum: Nucl. Phys. B **660**, 403 (2003).
39. E Sezgin and P Sundell, *JHEP* **0507** (2005) 044.
40. S Choudhury, A Dey, I Halder, S Jain, L Janagal, Sh Minwalla, and N Prabhakar, *JHEP* **1811**(2018) 177.
41. O Aharony, S Jain and Sh Minwalla, *JHEP* 1812 (2018) 058.
42. D Gaiotto and X Yin, *JHEP* **0708** (2007) 056.
43. O Aharony, G G Ari and R Yacoby, *JHEP* **1203** (2012) 037.
44. I Affleck, *Nucl. Phys. B* **191** (1981) 429.
45. J Zinn-Justin, "*The principles of instanton calculus: A few applications*", Recent Advances in Field Theory, Les Houches, Session XXXIX, edited by J.-B. Zuber and R. Stora (North Holland, Amsterdam), (1982) .
46. K G Akdeniz and A Smailagić, *Nuovo Cim. A* **51** (1979) 345.
47. A A Belavin, A M Polyakov, A S Shvarts and Yu S Tyupkin, *Phys. Lett. B* **59** (1975) 85.
48. L N Lipatov, Sov. Phys. *JETP* **45** (1977) 216, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **72** (1977) 411.
49. S Coleman, V Glaser and A Martin, *Commun. Math. Phys.* **58** (1978) 211.
50. J L F Abbott and S Coleman, *Nucl. Phys. B* **259** (1985) 4170.
51. H Widyan, A Mukherjee, N Panchapakesan, and R P Saxena, *Phys. Rev. D* **59** (1999) 045003.
52. B H Lee, Ch H Lee, W Lee and Ch Oh, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 024019.
53. J Maldacena, [arXiv:1012.0274 [hep-th]].
54. J L F Barbon and E Rabinovici, *JHEP* **1104** (2011) 044.
55. L H Ooguri and C Vafa, *Adv. Theor. Math. Phys*. **21** (2017) 1787.