



کنش یانگ-میلز-چرن-سایمونز غیر آبلی القایی در سه بعد

معصومه قاسم‌خانی، زینا حق‌گویان و مجتبی علی پور خوبده

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

پست الکترونیکی: m_ghasemkhani@sbu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۷/۲۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۲/۲۶)

چکیده

در این مقاله، کوارک‌های جرم داری که در برهم‌کنش با یک میدان پیمانه‌ای غیر آبلی (گلتون) خارجی هستند، را در فضا-زمان سه بعدی در نظر می‌گیریم. با انتگرال‌گیری بر روی میدان‌های کوارکی، شکل کلی کنش مؤثر در حد تک-حلقه را برای گلتون‌هایی که به کوارک‌ها جفت شده‌اند، به دست می‌آوریم. در ادامه، نمودارهای فاینمن مربوط به توابع ۱، ۲، ۳ و ۴ نقطه‌ای گلتون را در حد تک-حلقه با استفاده از روش منظم‌سازی ابعادی محاسبه می‌کنیم. ما به طور صریح نشان می‌دهیم که کنش مؤثر به دست آمده در حد انرژی پایین (تکانه بسیار کمتر از جرم کوارک)، به صورت ترکیبی از کنش چرن-سایمونز غیر آبلی و یانگ-میلز است. این کنش القایی که به دلیل تصحیحات کوانتومی ناشی از حلقه‌های فرمیونی تولید می‌شود، به تقارن‌های لورنتس و ناوردایی پیمانه‌ای نیز احترام می‌گذارد.

واژه‌های کلیدی: کنش مؤثر، کنش یانگ-میلز، کنش چرن-سایمونز غیر آبلی، توابع چند نقطه‌ای گلتون

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین نمونه‌های کنش مؤثر، کنش مؤثر فوتون در چارچوب نظریه الکترودینامیک کوانتومی به نام کنش اوایلر-هایزنبرگ^۱ است که منجر به ظهور برهم‌کنش‌های غیرخطی برای فوتون می‌شود [۵]. این کنش در چارچوب نظریه الکترودینامیک کوانتومی (QED) با انتگرال‌گیری بر روی میدان‌های فرمیونی در حد انرژی‌های بسیار کمتر از جرم الکترون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L_{EH} = -F + \left(\frac{\alpha^2}{m_e^4}\right) \left[\frac{1}{45} F^2 + \frac{1}{45} G^2 \right], \quad (1)$$

که در آن کمیات F و G به شکل زیر تعریف می‌شوند:

در سال‌های اخیر، مطالعات بسیاری در زمینه محاسبه کنش مؤثر برای انواع نظریه میدان‌های کوانتومی در ابعاد مختلف فضا-زمان صورت گرفته است [۶-۱]. همچنین با بهره‌گیری از رهیافت کنش مؤثر، کارهایی هم در موضوعات متفاوتی نظیر ماده تاریک [۷]، تورم [۸] و کیهان‌شناسی [۹] صورت گرفته است. ایده اصلی فرمول‌بندی کنش مؤثر این است که روی درجات آزادی سنگین‌تر از یک مقیاس انرژی مشخص در نظریه مورد نظر انتگرال‌گیری می‌کنیم. آثار این درجات آزادی سنگین به صورت یک سری جملات برهم‌کنشی جدید برای میدانی خواهد بود که انرژی آن کمتر از این مقیاس انرژی هست.

۱. Euler-Heisenberg

شده است. این مقاله، به بررسی کنش مؤثر میدان پیمانه‌ای آبلی (فوتون) در فضا- زمان ناجابه‌جایی سه بعدی می‌پردازد. نتیجه این بررسی منجر به ظهور جملات القایی ماکسول ناجابه‌جایی و چرن- سایمونز آبلی ناجابه‌جایی برای کنش فوتون شد. محاسبات ما مشابه مقاله [۴] در ۳ بعد خواهد بود با این تفاوت که اولاً مدل ما در فضا- زمان معمولی (جابه‌جایی) است و ثانیاً گروه تقارنی کنش مورد مطالعه، یک گروه غیر آبلی است. در واقع، ایده اصلی در رهیافت کنش مؤثر برای میدان پیمانه‌ای غیر آبلی در کار حاضر این است که ماده فرمیونی کواریکی با میدان پیمانه‌ای "خارجی" در برهم‌کنش بوده و ما "هیچ‌گونه اطلاعاتی" درباره شکل کنش میدان پیمانه‌ای یعنی بخش آزاد و نیز جمله خود برهم‌کنشی آن نداریم. در این مقاله به وضوح نشان می‌دهیم که چگونه با انتگرال‌گیری بر روی درجات آزادی ماده فرمیونی (به کمک روش انتگرال مسیر)، می‌توان توابع چند- نقطه‌ای میدان پیمانه‌ای غیر آبلی "خارجی" را به دست آورد [۱۷]. محاسبه صریح ما نشان می‌دهد که تابع دو- نقطه‌ای متناظر با کنش آزاد میدان پیمانه‌ای بوده و توابع ۳ و ۴- نقطه‌ای نیز، شکل جملات برهم‌کنشی میدان پیمانه‌ای را تولید می‌کنند.

لازم به ذکر است، در مقاله [۶] نیز به کنش مؤثر میدان پیمانه‌ای غیر آبلی در سه بعد صرفاً اشاره شده و بحث تقارن پاریته و شکست آن مورد بررسی قرار گرفته است. البته محتوای اصلی این مقاله با کار ما بسیار متفاوت هست؛ مقاله [۶] از همان ابتدا برای میدان پیمانه‌ای گلئون، کنش یانگ- میلز را در نظر گرفته است در حالی که کنش یانگ- میلز به همراه جمله چرن- سایمونز غیر آبلی برای میدان پیمانه‌ای "خارجی" در انتهای محاسبات ما به طرز زیبایی تولید می‌شود.

این کنش القایی در رژیم انرژی‌های بسیار کم یعنی تکانه‌های بسیار کوچک‌تر از جرم کواریک‌ها به دست می‌آید. بر خلاف مقاله مورد بحث که در آن کواریک‌ها بدون جرم هستند، جرم کواریک در محاسبات ما نقش کلیدی دارد. در بخش‌های محاسباتی خواهیم دید، نتایج نهایی انتگرال‌های فاینمن محاسبه شده به صورت توانی از نسبت تکانه گلئون به جرم کواریک می‌باشد که ما تا مرتبه اول آن را نگه می‌داریم.

$$F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, G = \frac{1}{8} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}, \quad (2)$$

و نیز $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ است. جمله اول در رابطه (۱)، همان کنش ماکسول معمولی است اما جملات دوم و سوم جملات غیرخطی هستند که از محاسبات کوانتومی در سطح تک- حلقه به دست می‌آیند. این جملات مانند جمله ماکسول، تحت تبدیلات پیمانه‌ای و لورنتس ناورداد بوده و همچنین به تقارن‌های گسسته وارونی فضا (P)، وارونی زمان (T) و مزدوج‌گیری باری (C) احترام می‌گذارند.

نمونه‌ای دیگر از کنش مؤثر، نظریه فرمی^۱ است که در حقیقت یک مدل مؤثر برای توصیف برهم‌کنش‌های ضعیف در حدود انرژی‌های کمتر از ۱۰۰ گیگا الکترون ولت است. برخلاف کنش اوایلر- هایزنبرگ که با انتگرال‌گیری روی میدان‌های فرمیونی به دست می‌آید، کنش فرمی شامل برهم‌کنش چهار فرمیون است که با انتگرال‌گیری بر روی درجات آزادی میدان پیمانه‌ای W_{μ}^{\pm} در چارچوب نظریه الکتروضعیف به دست می‌آید. ارائه مدل فرمی، سهم به‌سزایی در الهام بخشی و ظهور مدل استاندارد ذرات بنیادی داشته است. از این حیث، رهیافت کنش مؤثر، نقش مهمی در مطالعه جنبه پدیده شناسی ذرات بنیادی و نظریه میدان کوانتومی وابسته به آن دارد.

بیشتر کارهای انجام شده در زمینه محاسبه کنش مؤثر، در فضا- زمان چهار بعدی صورت گرفته است. اما مطالعه نظریه میدان‌های کوانتومی سه بعدی، به لحاظ عدم وجود واگرایی فرابنفش و نیز کاربرد آن در ماده چگال، نظیر عایق‌های توپولوژیکی و گرافین، می‌تواند بسیار جذاب باشد. بر همین اساس، اخیراً، دوگانی فرمیون- بوزون توسط زایبرگ و همکاران در سه بعد ارائه شده است [۱۱-۱۳]. در حقیقت این امر، نشان دهنده توجه فیزیکدانان نظری به مطالعه نظریه میدان‌های کوانتومی سه بعدی و کاربرد آنها برای توصیف پدیده‌هایی در فیزیک ماده چگال (فیزیک در صفحه)^۲ است.

ایده مقاله حاضر از کار انجام شده در مقاله [۴] الهام گرفته

۱. Fermi theory

۲. Planar physics

مدل، میدان گلتون یک میدان خارجی بوده و جمله انرژی جنبشی برای آن در نظر نمی‌گیریم. این کنش تحت تبدیلات پیمانه‌ای غیر آبلی بسیار کوچک زیر ناورداست،

$$\begin{aligned} \delta\psi &= ig\lambda\psi, \\ \delta G_\mu &= \partial_\mu\lambda - ig[G_\mu, \lambda], \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن λ پارامتر تبدیل پیمانه‌ای است و به شکل $\lambda = \sum_{a=1}^{\Lambda} \lambda^a T^a$ است. با استفاده از روش انتگرال مسیر، روی میدان‌های فرمیونی انتگرال‌گیری کرده و داریم،

$$e^{i\Gamma[G]} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{iS_F}. \quad (4)$$

با اعمال تکنیک‌های محاسباتی مربوطه در انتگرال مسیر، فرم نهایی کنش مؤثر گلتون برابر است با

$$\begin{aligned} \Gamma[G] &= -i\text{Tr} \ln(i\not{D} - m) = \\ &= -\sum_{a=1}^{\Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n} \text{Tr} \left(\frac{1}{i\not{D} - m} \not{G}^a T^a \right)^n, \end{aligned} \quad (6)$$

که روی اندیس‌های رنگ و اندیس‌های دیراک ردگیری می‌شود. کنش مؤثر گلتون در رابطه (۶) را می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد که برای محاسبات ما مناسب‌تر است.

$$\begin{aligned} \Gamma[G] &= \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3x_1 \dots \int d^3x_n \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= G_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots G_{\mu_n}^{a_n}(x_n), \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n)$ تابع n -نقطه ای گلتون نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) &= -\frac{g^n}{n} \int \prod_i \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \\ &= \delta\left(\sum_i p_i\right) e^{-i\sum_i p_i \cdot x_i} \Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(p_1, \dots, p_n), \end{aligned} \quad (8)$$

و کمیت $\Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}(p_1, \dots, p_n)$ به نوعی تبدیل فوریه تابع n -نقطه‌ای گلتون در فضای تکانه است.

در این مقاله، تمرکز اصلی ما بر روی محاسبه $\Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}^{a_1 \dots a_n}$ برای توابع ۱، ۲، ۳ و ۴ نقطه‌ای خواهد بود. سپس با استفاده از روابط (۷) و (۸)، چهار جمله اول موجود در کنش مؤثر گلتون را در سه بعد به دست می‌آوریم.

لازم به ذکر است، محاسبات بخش‌های بعدی ما نشان می‌دهد که برخلاف چهار بعد، هیچ‌گونه واگرایی فرابنفش در حد تک-حلقه مشاهده نمی‌شود. البته این نتیجه دور از انتظار

همچنین، ما در محاسبه انتگرال‌های فاینمن، از روش منظم سازی ابعادی کمک خواهیم گرفت اما در مقاله [۶] جزئیات محاسبات ارائه نشده و فقط به استفاده از روش منظم سازی پائولی-ویلارز اشاره شده است. در همین راستا، مقاله دیگری نیز تحت عنوان "لاگرانژی موثر کرومودینامیک کوانتومی سه بعدی" اما با رویکردی کاملاً متفاوت انجام شده است [۷]. این مقاله هم مشابه [۶]، از همان ابتدا جمله یانگ-میلز را برای میدان پیمانه‌ای در نظر گرفته و نشان می‌دهد که کنش موثر در حد انرژی پایین منجر به مدل سیگما غیر خطی می‌شود. تفاوت مهم این مقاله با کار حاضر این است که جمله جرمی کوارک‌ها در [۷] به صورت یک عبارت ترکیبی نوشته شده است که تحت پارامتر زوج است در حالی که جمله جرمی ما همان شکل استاندارد جمله دیراک بوده و در سه بعد تحت پارامتر فرد است. در این مقاله، ابتدا به ارائه مدل مورد نظر و معرفی رهیافت کنش مؤثر می‌پردازیم. سپس با انتگرال‌گیری بر روی درجات آزادی فرمیونی (کوارک‌ها)، کنش مؤثر گلتون در حد تک-حلقه را با محاسبه توابع ۱، ۲، ۳ و ۴ نقطه‌ای گلتون محاسبه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که کنش مؤثر القایی گلتون در حد انرژی‌های بسیار کمتر از جرم کوارک‌ها، شامل دو بخش چرن-سایمونز غیر آبلی^۱ و یانگ-میلز^۲ به ترتیب با پارامتر فرد و زوج خواهد بود. ضمناً این کنش به تقارن‌های پیمانه‌ای و لورنتس، که در سطح کلاسیک (درختی) وجود دارند، نیز احترام می‌گذارد.

۲. معرفی مدل

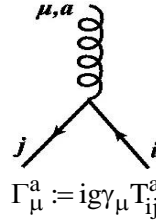
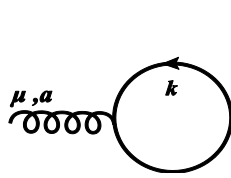
فرض کنید میدان فرمیونی کوارکی در چارچوب نظریه میدان کرومودینامیک کوانتومی با میدان پیمانه‌ای غیر آبلی (گلتون) خارجی برهم کنش دارد. این کنش به صورت زیر داده می‌شود،

$$S_F = \int d^3x \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (3)$$

که در آن، $D_\mu = \partial_\mu - igG_\mu^a T^a$ مشتق هم‌ورد است. ماتریس‌های T^a نیز مولدهای گروه $SU(3)$ هستند. در این

۱. Non-Abelian Chern-Simons

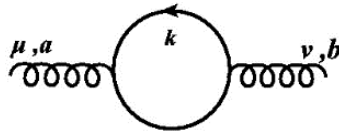
۲. Yang-Mills



$$S^{ij}(x-y) := \frac{i\delta^{ij}}{\not{p} - m}$$

شکل ۲. نمودار فاینمن تابع یک- نقطه‌ای گلئون در حد تک- حلقه.

شکل ۱. قوانین فاینمن در بخش کواری کرومودینامیک کوانتومی.



شکل ۳. نمودار فاینمن تابع دو- نقطه‌ای گلئون در حد تک- حلقه.

برابر است با:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = -g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{N_{\mu\nu}^{ab}}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)}, \quad (10)$$

که در آن $N_{\mu\nu}^{ab}$ با رابطه زیر داده می‌شود:

$$N_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{2} \text{tr} \left[\gamma_\mu (\not{p} + \not{K} + m) \gamma_\nu (\not{K} + m) \right]. \quad (11)$$

و $\text{tr}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$ است. حال با استفاده از روش منظم‌سازی ابعادی، انتگرال رابطه (۱۰) را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا با استفاده از پارامتریابی فاینمن داریم،

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k+p)^2 - m^2)} = \int_0^1 \frac{dy}{\int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{\Gamma(\gamma) \delta(x+y-1) dx dy}{[x(k^2 - m^2) + y(k+p)^2 - ym^2]^\gamma}} = \int_0^1 \frac{dy}{(\ell^2 - \Delta)^\gamma}, \quad (12)$$

که در آن $\ell = k + yp$ و $\Delta = m^2 + y(y-1)p^2$ است. حال تانسور $\Sigma_{\mu\nu}$ در رابطه (۱۱) را بر حسب توان‌های جرمی به صورت زیر مرتب می‌کنیم،

$$\Sigma_{\mu\nu}(k) = \text{tr} \left[\underbrace{\gamma_\mu (\not{p} + \not{K}) \gamma_\nu \not{K}}_{A_{\mu\nu}} + m \left[\underbrace{\text{tr}(\gamma_\mu (\not{p} + \not{K}) \gamma_\nu)}_{B_{\mu\nu}} + \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \not{K}) \right] + m^2 \underbrace{\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu)}_{C_{\mu\nu}} \right]. \quad (13)$$

سپس هر یک از عبارات $A_{\mu\nu}$ ، $B_{\mu\nu}$ و $C_{\mu\nu}$ را بر حسب توانه ℓ بازنویسی کرده و فقط توان‌های زوج ℓ را نگه می‌داریم، زیرا توان‌های

نیود چرا که بعد جرمی ضریب جفت شدگی g در سه بعد مثبت بوده و در نتیجه این نظریه ابر بازبهنجار پذیر است.

برای شروع محاسبات، قدم اول تعیین قوانین فاینمن مربوط به رأس برهم‌کنشی و انتشارگر آزاد میدان فرمیونی (کواری) با توجه به کنش (۳) است که در زیر ارائه شده است (شکل ۱):

۳. محاسبات کوانتومی در حد تک- حلقه

در این بخش، توابع n -نقطه‌ای گلئون را به ازای $n=1, 2, 3, 4$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۳.۱. تابع یک- نقطه‌ای گلئون ($n=1$)

نمودار با یک پای خارجی، در شکل (۲) رسم شده است. به راحتی می‌توان نشان داد که سهم این نمودار برابر صفر است. عبارت فاینمن این نمودار برابر است با:

$$\Pi_\mu^a(p) = ig \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr}(T^a) \text{tr}[\gamma_\mu (\not{K} + m)]}{(k^2 - m^2)} = 0, \quad (9)$$

چون $\text{tr}(T^a) = 0$ می‌باشد، در $\Pi_\mu^a(p)$ محاسبه کنش مؤثر سهمی ندارد. اولین سهم غیر صفر مربوط به نمودار با دو پای خارجی است.

۳.۲. تابع دو- نقطه‌ای گلئون ($n=2$)

نمودار فاینمن مربوط به تابع دو-نقطه‌ای در شکل (۳) رسم شده است. با توجه به قوانین فاینمن شکل (۱)، سهم این نمودار

$$\Gamma_{\text{eff}}^{\text{YM}}[\text{GG}] = -\frac{ig^2}{48\pi m} \int d^3x \times \left[G_\mu^a(x) \left(-\square \eta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu \right) G_\nu^a(x) \right]. \quad (16)$$

لازم به ذکر است که ما در کنش (۳)، هیچ گونه جمله جنبشی برای میدان پیمانه‌ای غیر آبلی خارجی در نظر نگرفته بودیم. نتیجه به دست آمده در این مرحله با انتظار فیزیکی که برای شکل بخش جنبشی کنش گلئون از قبل داشتیم، کاملاً سازگار است. به طور مشابه برای قسمت پاد متقارن تانسور خود-انرژی گلئون، بخش آزاد (جنبشی) کنش چرن-سایمونز غیر آبلی با پارینه فرد به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\Gamma_{\text{eff}}^{\text{CS}}[\text{GG}] = \frac{ig^2}{16\pi} \int d^3x \left[\varepsilon^{\mu\nu\rho} G_\mu^a(x) \partial_\nu G_\rho^a(x) \right]. \quad (17)$$

این کنش، بر خلاف بخش جنبشی کنش یانگ-میلز در رابطه (۱۶)، فقط شامل مشتق مرتبه اول میدان پیمانه‌ای است. همچنین با توجه به خاصیت پادتقارنی تانسور لوی چویوتا، به راحتی می‌توان دید کنش چرن-سایمونز فقط در ابعاد فرد موجود است.

۳.۳. تابع سه-نقطه‌ای گلئون (n=3)

حال سراغ محاسبه تابع سه-نقطه‌ای گلئون می‌رویم. با استفاده از رهیافت ماتریس پراکندگی در نظریه میدان کوانتومی و بسط آن تا مرتبه سوم ضریب جفت شدگی g ، دو نوع نمودار مثلثی در این مرتبه خواهیم داشت که در شکل (۴) رسم شده‌اند (نمودار دوم همان نمودار اولی اما با جهت تکانه معکوس است). البته در اینجا، برخلاف QED، نمودارهای با تعداد فرد پای گلئون خارجی، سهم غیر صفر می‌دهند.

عبارت فاینمن مربوط به نمودار (a) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(a)} = g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \times \text{tr} \left[\frac{N_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(a)}}{(k^2 - m^2)(q^2 - m^2)(s^2 - m^2)} \right] \quad (18)$$

که t^p ، u^v و r^h در شکل (۴)، چهار-بردارهای مربوط به تکانه‌های پاهای خارجی گلئونی هستند. صورت کسر (۱۸) نیز برابر است با:

$$N_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(a)} = \overbrace{\left(T_{ij}^a \delta^{jl} T_{kl}^b \delta^{km} T_{nm}^c \delta^{ni} \right)}^{T_{abc}|_{(a)}} \quad (19)$$

فرد l سهمی در انتگرال ندارند. با استفاده از روابط ردگیری ماتریس‌های دیراک در سه بعد (پیوست-الف) خواهیم داشت،

$$A_{\mu\nu} = -\frac{2}{3} \ell^2 \eta_{\mu\nu} + (-2p_\mu p_\nu + 2p^\lambda \eta_{\mu\nu}) y(1-y), \quad (14)$$

$$B_{\mu\nu} = 2\text{imp}^p \varepsilon_{\mu\rho\nu}, \quad C_{\mu\nu} = 2m^2 \eta_{\mu\nu}.$$

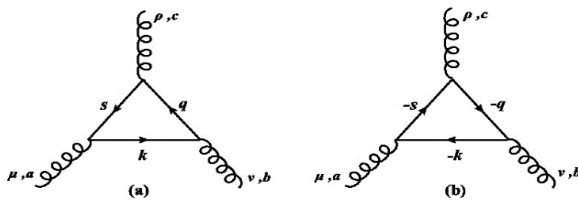
در محاسبات فوق از رابطه‌ی $\ell_\mu \ell_\nu = \frac{\ell^2}{3} \eta_{\mu\nu}$ استفاده شده است. در ادامه خواهیم دید که عبارات $A_{\mu\nu}$ و $C_{\mu\nu}$ منجر به تولید جملات یانگ-میلز (از مرتبه‌های m^{-1}, m^{-3}, \dots) و عبارت $B_{\mu\nu}$ نیز منجر به تولید جملات چرن-سایمونز (از مرتبه‌های m^0, m^{-2}, \dots) می‌شود. با جای گذاری $B_{\mu\nu}$ ، $A_{\mu\nu}$ و $C_{\mu\nu}$ در رابطه (۱۰) و انتگرال‌گیری روی تکانه‌ی حلقه، سهم تابع دو-نقطه‌ای گلئون در حد انرژی‌های پایین در مقایسه با جرم کوارک‌ها، $m^2 \square p^2$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\frac{g^2 \delta^{ab}}{2} \left[\frac{i}{12\pi m} (p^\lambda \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) + \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho} p^\rho + O\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right]. \quad (15)$$

این رابطه با اتحاد وارد^۱ یعنی $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = p_\nu \Pi^{\mu\nu} = 0$ سازگار است. به عبارت دیگر، تبدیل پیمانه‌ای در سطح تک-حلقه نیز برقرار است. لازم به ذکر است که نتیجه به دست آمده، بر خلاف چهار بعد، محدود بوده و فاقد هر گونه واگرایی فرابنفش است. اگر ساختار تانسوری خود-انرژی گلئون در رابطه (۱۵) را با حالت چهار بعدی مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم ساختار تانسوری خود-انرژی گلئون در چهار بعد، فقط شامل عبارت $(p^\lambda \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$ است.

تانسور $(p^\lambda \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$ نسبت به تعویض اندیس‌های فضا-زمانی ($\mu \leftrightarrow \nu$) متقارن است و منجر به جمله جنبشی کنش یانگ-میلز با پارینه زوج می‌شود. در حالی که در سه بعد، طبق رابطه (۱۵)، تانسور خود-انرژی گلئون اولاً تحت $\mu \leftrightarrow \nu$ متقارن نبوده و ثانیاً شامل دو بخش است: بخش متقارن با پارینه زوج و بخش پادمقارن با پارینه فرد. با قرار دادن قسمت متقارن رابطه (۱۵) در روابط (۸) و (۷)، بخش آزاد کنش یانگ-میلز با پارینه زوج به صورت زیر به دست می‌آید:

۱. Ward identity



شکل ۴. نمودارهای فاینمن تابع سه- نقطه‌ای گلئون در حد تک- حلقه.

مشابه رابطه (۲۱)، مرتب شده و داریم: $\Omega_{\mu\nu\rho}|_{(b)}$

$$\Omega_{\mu\nu\rho}|_{(b)} = \overbrace{\text{tr}[-\gamma_\mu \not{s} \not{q} \not{k} \not{v}]}^{A'_{\mu\nu\rho}} + \overbrace{\text{mtr}[\gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{k} \not{v} + \gamma_\mu \not{s} \not{q} \not{k} \not{v} + \gamma_\mu \not{k} \not{q} \not{s} \not{v}]}^{B'_{\mu\nu\rho}} + \overbrace{\text{m}^\gamma \text{tr}[\gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{k} \not{v} + \gamma_\mu \not{s} \not{q} \not{k} \not{v} + \gamma_\mu \not{k} \not{q} \not{s} \not{v}]}^{C'_{\mu\nu\rho}} + \overbrace{\text{m}^\gamma \text{tr}[\gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{k} \not{v}]}^{D'_{\mu\nu\rho}} \quad (25)$$

لازم به ذکر است در روابط (۲۱) و (۲۵)، تانسورهای $(A_{\mu\nu\rho}, A'_{\mu\nu\rho}, C_{\mu\nu\rho}, C'_{\mu\nu\rho})$ شامل تعداد زوجی از ماتریس‌های گاما و تانسورهای $(B_{\mu\nu\rho}, B'_{\mu\nu\rho}, D_{\mu\nu\rho}, D'_{\mu\nu\rho})$ شامل تعداد فردی از ماتریس‌های گاما هستند. پس از انجام محاسبات، خواهیم دید که این دو نوع دسته تانسوری منجر به ظهور دو نوع جمله برهم‌کنشی بین گلئون‌ها می‌شود که به ترتیب برابرند با:

(الف) برهم‌کنش سه تایی گلئون‌ها با پارته زوج در نظریه یانگ-میلز

(ب) برهم‌کنش سه تایی گلئون‌ها با پارته فرد در نظریه چرن-سایمونز غیر آبلی برای نشان دادن این مطلب، ابتدا با محاسبه بخش پارته زوج شروع می‌کنیم.

۳.۳.۱. محاسبه بخش پارته زوج تابع سه- نقطه‌ای گلئون

نخست تانسور $A_{\mu\nu\rho}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$A_{\mu\nu\rho} = \overbrace{k^\alpha (k+u)^\beta (k-r)^\lambda}^{\kappa^{\alpha\beta\gamma}} \text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\lambda] \quad (26)$$

به کمک پارامتربندی فاینمن داریم،

$$\frac{1}{(k^\gamma - m^\gamma)(q^\gamma - m^\gamma)(s^\gamma - m^\gamma)} = \int_0^1 \int_0^{1-z} \frac{\Gamma(r) dy dz}{(\ell^\gamma - \Delta)^\gamma} \quad (27)$$

که در آن (Δ, ℓ) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Delta \equiv m^\gamma + u^\gamma y(y-1) + r^\gamma z(z-1) + \gamma(u.r)zy, \quad (28)$$

$$\ell \equiv k - (rz - uy).$$

$$\Omega_{\mu\nu\rho}|_{(a)} = \overbrace{\text{tr}[\gamma_\mu (\not{k} + m) \not{q} (\not{q} + m) \not{s} (\not{s} + m)]}^{\Omega_{\mu\nu\rho}|_{(a)}} \quad (20)$$

با استفاده از خواص ماتریس‌های T (پیوست الف) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$T^{abc}|_{(a)} = \text{tr}(T^a T^c T^b) + i f^{bcd} \text{tr}(T^a T^d) = \frac{1}{4}(d^{acb} - i f^{acb}).$$

$\Omega_{\mu\nu\rho}|_{(a)}$ را نیز بر حسب توان‌های جرمی m مرتب می‌کنیم:

$$\Omega_{\mu\nu\rho}|_{(a)} = \overbrace{\text{tr}[\gamma_\mu \not{k} \not{q} \not{s}]}^{A_{\mu\nu\rho}} + \overbrace{\text{mtr}[\gamma_\mu \not{k} \not{q} \not{s} \not{v} + \gamma_\mu \not{k} \not{q} \not{s} \not{v} + \gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{v} \not{k}]}^{B_{\mu\nu\rho}} + \overbrace{\text{m}^\gamma \text{tr}[\gamma_\mu \not{k} \not{q} \not{s} \not{v} \not{v} + \gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{v} \not{v} \not{k} + \gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{v} \not{v} \not{k}]}^{C_{\mu\nu\rho}} + \overbrace{\text{m}^\gamma \text{tr}[\gamma_\mu \not{q} \not{s} \not{v} \not{v} \not{k}]}^{D_{\mu\nu\rho}} \quad (21)$$

عبارت فاینمن مربوط به نمودار (b) نیز به صورت زیر داده می‌شود،

$$\Pi_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(b)} = g^r \int \frac{d^r k}{(2\pi)^r} \times \text{tr} \left[\frac{N_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(b)}}{(k^\gamma - m^\gamma)(q^\gamma - m^\gamma)(s^\gamma - m^\gamma)} \right], \quad (22)$$

که در آن $N_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(b)}$ برابر است با:

$$N_{\mu\nu\rho}^{abc}|_{(b)} = \overbrace{\text{tr}[\gamma_\mu (-\not{s} + m) \not{q} (-\not{q} + m) \not{v} (-\not{k} + m)]}^{T^{acb}|_{(b)}} = \overbrace{\left(T_{ij}^a \delta^{jn} T_{mn}^c \delta^{mk} T_{lk}^b \delta^{jl} \right)} \quad (23)$$

$$\text{tr}[\gamma_\mu (-\not{s} + m) \not{q} (-\not{q} + m) \not{v} (-\not{k} + m)] \quad (24)$$

مشابه قبل، عبارت $T^{acb}|_{(b)}$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$T^{acb}|_{(b)} = \frac{1}{4}(d^{abc} - i f^{abc}).$$

$B_{\mu\nu\rho} + D_{\mu\nu\rho}$ ، که شامل رد تعداد فرد ماتریس‌های گاما است، بخش چرن-سایمونز نمودار (a) برابر است با:

$$\Lambda_{\mu\nu\rho}^{abc} \Big|_{(a)}^{CS} = \frac{g^r \varepsilon^{\mu\nu\rho}}{16\pi} (d^{acb} - if^{acb}). \quad (35)$$

با تکرار محاسبات برای عبارت $(B'_{\mu\nu\rho} + D'_{\mu\nu\rho})$ در رابطه (۲۲) مربوط به نمودار (b)، سرانجام به نتیجه نهایی زیر برای بخش چرن-سایمونز مجموع دو نمودار مثلثی در حد انرژی‌های پایین می‌رسیم:

$$\Lambda_{\mu\nu\rho}^{abc} \Big|_{(a+b)}^{CS} = \frac{ig^r f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho}}{8\pi}, \quad (36)$$

که با قرار دادن در روابط (۸) و (۷)، بخش برهم‌کنش سه تایی کنش چرن-سایمونز غیر آبلی به دست می‌آید:

$$\Gamma_{\text{eff}}^{CS} [GGG] = \frac{ig^r}{24\pi} \int d^r x f^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\rho} G_\mu^a(x) G_\nu^b(x) G_\rho^c(x). \quad (37)$$

از مقایسه نتیجه (۳۷) با بخش جنبشی کنش چرن-سایمونز در رابطه (۱۷)، مشاهده می‌کنیم که هر دو کنش نسبت به m از مرتبه صفر هستند. بنابراین با ترکیب این دو عبارت هم مرتبه داریم:

$$\Gamma_{\text{eff}}^{CS} = \frac{ig^r}{16\pi} \int d^r x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left[G_\mu^a(x) \partial_\nu G_\rho^a(x) + \frac{1}{3} f^{abc} G_\mu^a(x) G_\nu^b(x) G_\rho^c(x) \right], \quad (38)$$

کنش (۳۸) را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\Gamma_{\text{eff}}^{CS} = \frac{ig^r}{8\pi} \int d^r x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \text{tr} \left[G_\mu(x) \partial_\nu G_\rho(x) + \frac{1}{3} G_\mu(x) G_\nu(x) G_\rho(x) \right]. \quad (39)$$

این رابطه، کنش چرن-سایمونز غیر آبلی نام دارد که تحت تبدیلات پیمانه‌ای بسیار کوچک یعنی $\delta G_\mu = \partial_\mu \lambda - i[G_\mu, \lambda]$ ناورداست. اگر میدان‌های پیمانه‌ای آبلی باشند، جمله برهم‌کنش سه تایی حذف شده و فقط جمله جنبشی باقی می‌ماند. لازم به ذکر است، تصحیحات همراه با مشتقات مراتب بالاتر به کنش چرن-سایمونز غیر آبلی فوق را می‌توان با نگه داشتن سایر جملات بسط به دست آورد. محاسبه دقیق جملات تصحیحی همراه با مشتقات مراتب بالاتر (m^{-2}) در مورد کنش چرن-سایمونز ناجابه‌جایی و نیز بحث ناوردایی پیمانه‌ای این جملات به طور مفصل در مقاله [۴] بررسی شده است. مشابه این بحث در مورد این مدل نیز صادق خواهد بود.

در رابطه (۲۶) را برحسب تکانه ℓ بازنویسی کرده و توان‌های زوج آن را نگه می‌داریم. با استفاده از روابط مندرج در پیوست (الف)، داریم:

$$\tilde{A}_{\mu\nu\rho} = \frac{2\ell^2}{3} \left\{ \begin{aligned} &\eta_{\mu\rho} (u_\nu(y-1) - r_\nu(z+1)) \\ &+ \eta_{\rho\nu} (u_\mu(y+1) + r_\mu(-z+1)) \\ &+ \eta_{\mu\nu} (u_\rho(y-1) + r_\rho(-z+1)) \end{aligned} \right\}. \quad (29)$$

حال با درج این عبارت در رابطه (۱۸) و انتگرال گیری، در حد انرژی‌های پایین، $m^2 \ll r^2, u^2, t^2$ داریم:

$$\frac{ig^r}{24\pi m} \left[-(2r+u)_\nu \eta_{\mu\rho} + (2u+r)_\mu \eta_{\rho\nu} + (r-u)_\rho \eta_{\mu\nu} \right]. \quad (30)$$

مشابه مراحل محاسباتی بالا را برای $C_{\mu\nu\rho}$ انجام داده و نتیجه زیر در حد انرژی‌های پایین حاصل می‌شود:

$$-\frac{ig^r}{24\pi m} \left[(2r+u)_\nu \eta_{\mu\rho} - (r+2u)_\mu \eta_{\rho\nu} - (u-r)_\rho \eta_{\mu\nu} \right]. \quad (31)$$

بنابراین بخش یانگ-میلز (پارته زوج) نمودار (a) یعنی

$$\Pi_{\mu\nu\rho}^{abc} \Big|_{(a)}^{YM} = \frac{g^r}{4} (d^{acb} - if^{acb}) \int_0^1 dz \int_0^{-z} dy \times \int \frac{d^r \ell}{(2\pi)^r} \frac{(A_{\mu\nu\rho} + C_{\mu\nu\rho})}{(\ell^2 - \Delta)^r}, \quad (32)$$

با در نظر گرفتن روابط (۳۰) و (۳۱)، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Pi_{\mu\nu\rho}^{abc} \Big|_{(a)}^{YM} = \frac{ig^r}{24\pi m} \times \frac{1}{2} (d^{acb} - if^{acb}) \quad (33)$$

$$\left[\eta_{\mu\nu}(r-u)_\rho + \eta_{\rho\nu}(u-t)_\mu + \eta_{\mu\rho}(t-r)_\nu \right].$$

پس از انجام محاسبات مشابه برای عبارت $(A'_{\mu\nu\rho} + C'_{\mu\nu\rho})$ مربوط به نمودار (b)، سرانجام بخش یانگ-میلز مجموع دو نمودار مثلثی در حد انرژی‌های پایین برابر است با:

$$\Pi_{\mu\nu\rho}^{abc} \Big|_{(a+b)}^{YM} = -\frac{f^{abc} g^r}{24\pi m} \left[\eta_{\mu\nu}(r-u)_\rho + \eta_{\rho\nu}(u-t)_\mu + \eta_{\mu\rho}(t-r)_\nu \right]. \quad (34)$$

شکل تانسوری رابطه به دست آمده دقیقاً همان ضریب رأس حاصل از برهم‌کنش سه گلوئون در نظریه یانگ-میلز است. با توجه به شکل (۴) که به طور مؤثر برهم‌کنش سه گلوئون را نشان می‌دهد، درستی رابطه (۳۴) تایید می‌شود.

۳.۳.۲. محاسبه بخش پارته فرد تابع سه-نقطه‌ای گلوئون

مشابه مراحل طی شده در بخش (۳،۳،۱)، با بازنویسی تانسور

$$\Lambda_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_{(1)} = -g^{\nu} \int \frac{d^{\nu} k}{(\nu\pi)^{\nu}} \frac{N_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_{(1)}}{(k_1^{\nu} - m^{\nu})(k_2^{\nu} - m^{\nu})(k_3^{\nu} - m^{\nu})(k_4^{\nu} - m^{\nu})} \quad (40)$$

که در آن $k_1 = k$; $k_2 = k + q$; $k_3 = k + q + r$; $k_4 = k - p$ تکانه‌های حلقه هستند. همچنین p^{μ} , q^{ν} , r^{ρ} و s^{σ} چهار بردارهای مربوط به تکانه‌های گلوئون‌های ورودی هستند. فرم صریح صورت کسر (۴۰) عبارت است از:

$$N_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_{(1)} = \frac{T_{kj}^{a} T_{mk}^{b} T_{om}^{c} T_{jo}^{d}}{\Psi_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(1)}} \text{tr} \left[\gamma_{\mu} (K_1 + m) \gamma_{\nu} (K_2 + m) \gamma_{\rho} (K_3 + m) \gamma_{\sigma} (K_4 + m) \right]. \quad (41)$$

با استفاده از روابط پیوست (الف) داریم:

$$T_{(1)}^{abcd} = \frac{1}{\Lambda} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{\Lambda} d^{abe} d^{cde} + \frac{i}{\Lambda} d^{abe} f^{cde} + \frac{i}{\Lambda} f^{abe} d^{cde} - \frac{1}{\Lambda} f^{abe} f^{cde}. \quad (42)$$

تانسور $\Psi_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(1)}$ را، مشابه بخش قبل، بر حسب توان‌های جرمی فرمیون m مرتب می‌کنیم:

$$\Psi_{\mu\nu\rho\sigma} \Big|_{(1)} = \overbrace{\text{tr}[\gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4]}^{A_{\mu\nu\rho\sigma}} + \overbrace{m \text{tr}[\gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4]}^{B_{\mu\nu\rho\sigma}} + \overbrace{m^{\nu} \text{tr}[\gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4]}^{C_{\mu\nu\rho\sigma}} + \overbrace{m^{\nu} \text{tr}[\gamma_{\mu} K_1 \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} K_2 \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} K_3 \gamma_{\sigma} K_4 + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4]}^{D_{\mu\nu\rho\sigma}} + \overbrace{m^{\nu} \text{tr}[\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} K_4]}^{E_{\mu\nu\rho\sigma}}. \quad (43)$$

$$\frac{1}{(k_1^{\nu} - m^{\nu})(k_2^{\nu} - m^{\nu})(k_3^{\nu} - m^{\nu})(k_4^{\nu} - m^{\nu})} = \int_0^1 \int_0^{1-w} \int_0^{1-y-w} \frac{\Gamma(\nu)}{(\ell^{\nu} - \Delta)^{\nu}} dz dy dw \quad (44)$$

که در آن ℓ و Δ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

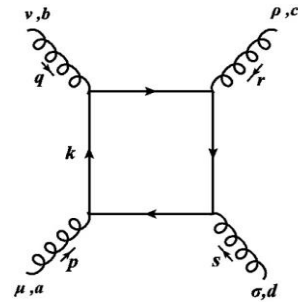
$$\Delta \equiv m^{\nu} + q^{\nu} y(y-1) + (q+r)^{\nu} z(z-1) + p^{\nu} w(w-1) - 2p \cdot (q+r) z w - 2(k \cdot p) w + 2(q \cdot p) y w, \quad (45)$$

$$\ell \equiv k + qy + (q+r)z - pw.$$

شکل صریح $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ به صورت زیر است:

$$A_{\mu\nu\rho\sigma} = k^{\alpha} (k+q)^{\beta} (k+q+r)^{\lambda} (k-p)^{\theta} \text{tr}[\gamma_{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\nu} \gamma_{\beta} \gamma_{\rho} \gamma_{\lambda} \gamma_{\sigma} \gamma_{\theta}]. \quad (46)$$

$A_{\mu\nu\rho\sigma}$ را بر حسب ℓ بازنویسی کرده و جملاتی را نگه می‌داریم که نتیجه انتگرال آنها شامل سهمی از مرتبه m^{-1} باشد. با توجه به این



شکل ۵. نمودار فاینمن تابع چهار- نقطه‌ای گلوئون در حد تک-حلقه.

۳.۴. تابع چهار- نقطه‌ای گلوئون (n=۴)

در این بخش، تابع چهار- نقطه‌ای گلوئون را بررسی می‌کنیم. در این مرتبه، طبق رابطه بسط ماتریس پراکندگی در نظریه میدان کوانتومی ۲۴ حالت متفاوت خواهیم داشت که از جایگشت اندیس‌های تکانه‌های ورودی و خروجی به دست می‌آیند. نمودار تابع چهار نقطه‌ای در شکل (۵) رسم شده است.

به عنوان نمونه، یکی از نمودارها را محاسبه کرده و سپس با اعمال ۲۴ جایگشت مختلف و ترکیب آنها، نتیجه نهایی را به دست می‌آوریم:

جملات $D_{\mu\nu\rho\sigma}$, $B_{\mu\nu\rho\sigma}$ شامل تعداد فردی از ماتریس‌های گاما هستند و منجر به جملات برهم‌کش چهار تایی گلوئونی با پاریته فرد یعنی چرن-سایمونز خواهند شد. نتیجه محاسبات ما نشان می‌دهد که نتیجه انتگرال‌گیری این جملات در حد انرژی‌های کم، بر خلاف بخش پاریته فرد توابع ۲ و ۳ نقطه‌ای، فاقد سهمی متناسب با m^0 بوده و از مرتبه m^{-2} خواهد بود. بنابراین، این جملات را کنار گذاشته و بر روی جملات با پاریته زوج یعنی $E_{\mu\nu\rho\sigma}$, $C_{\mu\nu\rho\sigma}$, $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ تمرکز می‌کنیم. در ادامه خواهیم دید که جملات با پاریته زوج در تابع چهار- نقطه‌ای، مشابه بخش یانگ-میلز توابع ۲ و ۳ نقطه‌ای، سهمی متناسب با m^{-1} خواهند داشت. حال تک تک این عبارات را بررسی می‌کنیم. با استفاده از روش پارامتربندی فاینمن داریم،

۴. نتیجه گیری

در این مقاله، به مطالعه کنش مؤثر میدان پیمانه‌ای غیر آبلی (گلتون) در چارچوب مدل برهم‌کنشی کوآرک‌های جرم دار با میدان پیمانه‌ای خارجی در سه بعد پرداختیم. از همان ابتدا، میدان پیمانه‌ای در لاگرانژی اولیه، فاقد جمله جنبشی و خود برهم‌کنشی بوده و هدف یافتن کنش مؤثر برای این میدان پیمانه‌ای بود. در این مقاله، به مطالعه کنش مؤثر میدان پیمانه‌ای غیر آبلی گلتون در چارچوب نظریه میدان کرومودینامیک کوانتومی سه بعدی پرداختیم. برای این منظور، ابتدا با استفاده از روش انتگرال مسیر فاینمن، روی درجات آزادی فرمیونی انتگرال‌گیری کرده و ساختار کلی کنش مؤثر گلتون را به شکل یک سری به دست آوردیم. سپس به محاسبه دقیق چند جمله اول این سری یعنی توابع ۱، ۲، ۳ و ۴ نقطه‌ای گلتون در حد انرژی‌های پایین، پرداختیم.

اولین جمله غیر صفر این سری، تابع دو-نقطه‌ای (تانسور قطبش) گلتون در حد تک-حلقه بود که بر خلاف چهار بعد، فاقد واگرایی فرابنفش بود. این تانسور شامل دو بخش با پاریته زوج و فرد بود. بخش پاریته زوج متناظر با جمله جنبشی کنش یانگ-میلز (از مرتبه m^{-1}) و بخش پاریته فرد متناظر با جمله جنبشی کنش چرن-سایمونز غیر آبلی (از مرتبه m^0) شد.

در ادامه، سهم تابع سه-نقطه‌ای را بررسی کردیم که مشابه بخش تابع دو-نقطه‌ای، شامل دو قسمت بود. سهم با پاریته زوج، از مرتبه m^{-1} ، دقیقاً برابر با ضریب رأس برهم‌کنش سه تایی گلتون در مدل یانگ-میلز شد. اما سهم با پاریته فرد، از مرتبه m^0 ، برابر با ضریب رأس برهم‌کنش سه تایی گلتون در کنش چرن-سایمونز غیر آبلی شد.

در انتها، به محاسبه بخش چهار-نقطه پرداخته و متوجه شدیم که جمله چرن-سایمونزی با پاریته فرد در مرتبه m^0 وجود نداشته و فقط سهم جمله پاریته زوج در مرتبه m^{-1} را در نظر گرفتیم. در نهایت با جمع کردن سهم‌های هم مرتبه با پاریته یکسان، به دو کنش القایی چرن-سایمونز غیر آبلی (از مرتبه m^0) و یانگ-میلز (از مرتبه m^{-1}) رسیدیم. این دو کنش هر دو به تبدیلات پیمانه‌ای بسیار کوچک احترام گذاشته

نکته، فقط جمله توان چهارم ℓ ، سهم خواهد بود:

$$\tilde{A}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2\ell^4}{15} [3\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \gamma\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + 3\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}]. \quad (47)$$

داریم: $E_{\mu\nu\rho\sigma}$ و $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ به طور مشابه برای

$$\tilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\ell^2 m^2}{3} [-2\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} + \gamma\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - 2\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}] \quad (48)$$

$$\tilde{E}_{\mu\nu\rho\sigma} = 2m^4 [\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}] \quad (49)$$

با جای‌گذاری روابط (۴۷)، (۴۸) و (۴۹) در (۴۰)، عبارت نهایی مربوط به نمودار فاینمن شکل (۵) در حد انرژی‌های پایین به شکل زیر در می‌آید:

$$\Lambda_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_{(i)} = \frac{-ig^4}{12\pi m} \left[\frac{1}{12} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{\lambda} d^{abe} d^{cde} + \frac{i}{\lambda} d^{abe} f^{cde} + \frac{i}{\lambda} f^{abe} d^{cde} - \frac{1}{\lambda} f^{abe} f^{cde} \right] \times [\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - 2\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}]. \quad (50)$$

در این مرحله، برای یافتن سهم کلی بخش یانگ-میلز تابع ۴-نقطه‌ای، بایستی ۲۴ جایگشت مربوطه را انجام داد، یعنی:

$$\Lambda_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_{\text{Total}} = \sum_{i=1}^{24} \Lambda_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_{(i)}. \quad (51)$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\Lambda_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \Big|_T = \frac{-ig^4}{8\pi m} [f^{bce} f^{dae} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) + f^{bae} f^{dce} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) + f^{cae} f^{dbe} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho})]. \quad (52)$$

این رابطه، دقیقاً ضریب رأس برهم‌کنش ۴ تایی گلتون در نظریه یانگ-میلز است که با انتظار فیزیکی ما منطبق است.

اگر کنش‌های متناظر با بخش‌های پاریته زوج توابع ۲، ۳ و ۴ نقطه‌ای در روابط (۱۵)، (۳۴) و (۵۲)، که همگی از مرتبه m^{-1} هستند، با هم جمع کنیم داریم:

$$\Gamma_{\text{eff}}^{YM} = \frac{c}{m} \int d^3x F_{\mu\nu}^a(x) F^{\mu\nu,a}(x), \quad (53)$$

که در آن $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + gf^{abc} G_\mu^b G_\nu^c$ و c یک ضریب عددی است. این رابطه همان کنش نظریه یانگ-میلز است که به وضوح تحت تبدیلات پیمانه‌ای و تبدیلات لورنتس ناورداست. ملاحظه می‌کنیم که در حد آبلی یعنی $f^{abc} \rightarrow 0$ ، جملات برهم‌کنش ۳ و ۴ تایی میدان پیمانه‌ای حذف شده و بنابراین رابطه (۵۳) به کنش ماکسول تبدیل می‌شود.

جدول ۱. مقایسه کنش مؤثر القایی میدان پیمانه‌ای آبلی و غیر آبلی در سه بعد.

مدل	تابع دو- نقطه‌ای	تابع سه- نقطه‌ای	تابع چهار- نقطه‌ای
QED_3	کنش ماکسول از مرتبه m^{-1} کنش چرن- سایمونز آبلی از مرتبه m^0	سهم این بخش به هر دو کنش صفر است.	سهم این بخش به هر دو کنش صفر است.
QCD_3	بخش جنبشی یانگ- میلز از مرتبه m^{-1} بخش جنبشی چرن- سایمونز غیر آبلی از مرتبه m^0	برهم کنش سه تایی گلئون در یانگ- میلز از مرتبه m^{-1} برهم کنش سه تایی گلئون در چرن- سایمونز غیر آبلی از مرتبه m^0	برهم کنش چهار تایی گلئون در یانگ- میلز از مرتبه m^{-1} فاقد سهم در چرن- سایمونز غیر آبلی از مرتبه m^0

مقاله را با نتایجی که از قبل در مورد مدل آبلی QED_3 به دست آمده بود [۱۴]، مقایسه کرده‌ایم.

پیوست (الف)

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\sigma) &= 2\eta_{\mu\sigma}, \quad \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 2i\epsilon_{\mu\nu\rho}, \\ \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\nu) &= 2(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}), \\ \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\rho) &= 2(\eta_{\mu\alpha}\epsilon_{\nu\beta\rho} + \epsilon_{\mu\alpha\nu}\eta_{\beta\rho} \\ &\quad + \eta_{\beta\nu}\epsilon_{\mu\alpha\rho} - \eta_{\nu\rho}\epsilon_{\mu\alpha\beta}). \\ [T^a, T^b] &= if^{abc}T^c, \quad \text{tr}[T^a T^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}, \\ \text{tr}[T^a T^b T^c] &= \frac{1}{4}(if^{abc} + d^{abc}), \\ \text{tr}[T^a T^b T^c T^d] &= \frac{1}{12}\delta^{ab}\delta^{cd} + \frac{1}{8}(d^{abe} + if^{abe})(d^{cde} + if^{cde}). \end{aligned}$$

و ناوردای تبدیلات لورنتس نیز هستند. بنابراین، ما بدون اینکه کنش میدان پیمانه‌ای خارجی را از اول بدانیم، با انجام محاسبات تک- حلقه توانستیم کنش القایی برای میدان پیمانه‌ای غیر آبلی خارجی در سه بعد را به دست بیاوریم. بنابراین، ما بدون اینکه کنش میدان پیمانه‌ای را از اول بدانیم، با انجام محاسبات تک- حلقه توانستیم کنش القایی برای میدان پیمانه‌ای در سه بعد را به دست بیاوریم. هر چند کنش میدان پیمانه‌ای در ابعاد فضا- زمانی زوج، فقط شامل کنش ماکسول آبلی برای فوتون و یانگ- میلز غیر آبلی برای گلئون است. در حالی که در ابعاد فضا- زمانی فرد، کنشی با پارته فرد هم اضافه می‌شود که بسته به گروه تقارن داخلی نظریه، چرن- سایمونز آبلی یا غیر آبلی خواهد بود. در جدول ۱، نتایج به دست آمده در این

مراجع

1. L Bonora, M Cvitan, P Dominis Prester, S Giaccari, B Lima de Souza and T temberga, *JHEP* **1612** (2016) 084, arXiv:1609.02088 [hep-th].
2. L Bonora, M Cvitan, P Dominis Prester, S Giaccari and T temberga, *JHEP* **1801** (2018) 080, arXiv:1709.01738 [hep-th].
3. J Quevillon, C Smith and S Touati, *Phys. Rev. D* **99** 1 (2019) 013003, arXiv:1810.06994 [hep-th].
4. R Bufalo and M Ghasemkhani, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 12, 125013, arXiv:1412.1635 [hep-th].
5. M Ghasemkhani, R Bufalo, V Rahmanpour and M Alipour, *Phys. Rev. D* **101** (2020) 2, 025001, arXiv:1909.04941 [hep-th].
6. A N Redlich, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 18.
7. G Ferretti, S G Rajeev and Z Yang, *Int. J. Mod. Phys. A* **7** (1992) 7989.
8. R Bufalo, M Ghasemkhani, Z Haghgouyan, and A Soto, "Induced Maxwell-Chern-Simons Effective Action in Very Special Relativity", submitted to *Eur. Phys. J. C*, arXiv:2004.02176 [hep-th].
9. A De Simone and T Jacques, *Eur. Phys. J. C* **76** (2016) 367, arXiv:1603.08002 [hep-ph].
10. C Cheung, P Creminelli, A L Fitzpatrick, J Kaplan, and L Senatore, *JHEP* **03** (2008) 014.
11. J J M Carrasco, M P Hertzberg, and L Senatore, *JHEP* **09** (2012) 082, arXiv:1206.2926 [astro-ph.co].
12. W Heisenberg and H Euler, *Z Phys.* **98** (1936) 714.
13. N Seiberg and Sh-H Shao, "Exotic Symmetries, Duality, and Fractons in 2+1-Dimensional Quantum Field Theory", arXiv:2003.10466[cond-mat.str-el].
14. P S Hsin and N Seiberg, *JHEP* **1609** (2016) 095, arXiv:1607.07457 [hep-th].
15. F Benini, P S Hsin and N Seiberg, *JHEP* **1704** (2017) 135, arXiv:1702.07035 [cond-mat.str-el].
16. S Deser and A N Redlich, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1541.
17. M E Peskin, D V Schroeder, "An Introduction to Quantum Field Theory", Addison-Wesley (1995).