مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۱، شمارهٔ ۳، پاییز ۱۴۰۰

گذار تراوش برای ولگشت تصادفی با حرکت‌های غیر موضعی

محدثه فشانجردی و عباس علی صابری

دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه تهران، تهران

پست الکترونیکی: m.feshanjerdi@alzahra.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۹/۲۹ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۴۰۰/۳/۱۱)

چکیده

در این مقاله یک مدل تراوش معرفی می‌کنیم که از حرکت ولگشت تصادفی بر روی شبکهٔ مربعی به وجود می‌آید. ولگشت تصادفی علاوه بر حرکت‌های موضعی، حرکت‌های غیر موضعی نیز دارد. ما گذار تراوش و نماهای بحرانی را برای این مدل به دست می‌آوریم. یافته‌های ما نشان می‌دهد که آستانهٔ تراوش با افزایش حرکت‌های غیر موضعی ولگشت تصادفی کاهش می‌یابد. ما همچنین توابع مقیاس‌بندی جهان شمولی را برای بزرگ‌ترین شکاف و بزرگ‌ترین خوشه با استفاده از قضیهٔ مقدار بیشینه بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: پدیدهٔ تراوش، کلاس جهان شمولی، ولگشت تصادفی

۱. مقدمه

پدیدهٔ تراوش[۱] یکی از ساده‌ترین مدل‌های تئوری احتمال است که گذار فاز پیوسته را نشان می‌دهد [۱]. پدیدهٔ تراوش برای اولین بار توسط فولری[۲] در دهه ۱۹۴۰ مطرح شد و در سال ۱۹۵۴ توسط آقایان برادبنت و همرسلی به عنوان یک مسئلهٔ ریاضی مورد توجه قرارگرفت [۲]. مدل تراوش در بستر یک شبکه بررسی می‌شود. جایگاه‌ها[۳] (مدل تراوش جایگاهی) یا پیوندها[۴] (مدل تراوش پیوندی) در شبکه به صورت تصادفی با احتمال p اشغال می‌شوند. از به هم پیوستن نزدیک‌ترین همسایه‌های اشغال شده، خوشه‌ها پدید می‌آیند. در مدل تراوش جایگاهی همهٔ جایگاه‌ها خالی هستند ($p = 0$) یعنی هیچ خوشه‌ای در شبکه وجود ندارد. در مدل تراوش پیوندی وقتی هیچ پیوندی بین جایگاه‌ها برقرار نیست، اندازهٔ خوشه‌ها برابر یک است (هر جایگاه، خوشه‌ای به اندازهٔ یک است و از به هم پیوستن جایگاه‌ها توسط پیوندها، خوشه‌هایی با اندازه‌های بزرگ‌تر تشکیل می‌شود.). برای هر دو مدل تراوش در ($p= 1$)، یک خوشهٔ بسیار بزرگ در شبکه ظهور می‌کند و کل شبکه را اشغال می‌کند. این تغییر ساختار بین دو حالت $p= 0$ و $p= 1$ منجر به گذار فاز تراوش (در نزدیکی آستانهٔ تراوش ($p = p_c$))، بر حسب تابع احتمال اشغال p می‌شود. اندازهٔ نسبی بزرگ‌ترین خوشه به اندازهٔ کل شبکه را پارامتر نظم می‌گویند که تغییر ساختار در شبکه را نشان می‌دهد. در نزدیکی گذار فاز تراوش نماهای بحرانی از رفتار توانی پارامتر نظم، توزیع اندازهٔ خوشه‌ها و میانگین اندازهٔ خوشه‌های محدود بر حسب ($p - p_c$) به دست می‌آیند.

۱. Percolation
۲. Flory
۳. site
۴. bond

این نماها جهان شمولی‌اند به این معنا که به ساختار و جزئیات شبکه، مثلاً این که شبکه مربعی، مثلثی و یا لانه زنبوری باشد و یا به نوع تراوش بستگی ندارند و تنها تابع بعد شبکه هستند [۱]. با استفاده از تئوری مقیاس‌بندی اندازهٔ محدود[1]، نماهای بحرانی و کلاس جهان شمولی سیستم‌ها به دست می‌آید [۳].

بسیاری از خواص فیزیکی مورد توجه در مدل تراوش به شکل‌های مختلف از مسیر متصل کننده، بین دو ضلع شبکه، بر روی خوشهٔ نامحدود وابسته است. ساختار این مسیرهای متصل کننده بین دو سمت شبکه با استفاده از ولگشت‌های تصادفی از خودگریز[2] به دست می‌آید. به علت اهمیت ولگشت‌های تصادفی[3] در پدیدهٔ تراوش در این مقاله ما یک مدل تراوش که از ترکیب ولگشت تصادفی و تراوش تشکیل شده است را بررسی می‌کنیم. در این مدل، ولگشت تصادفی علاوه بر حرکت موضعی، حرکت‌های غیر موضعی نیز انجام می‌دهد. حرکت‌های غیر موضعی ولگشت تصادفی باعث ایجاد خوشه‌هایی با اندازه‌های مختلف می‌شود. در واقع مدل ما می‌تواند نحوهٔ پخش بیماری یا شایعه را نشان دهد. یک انسان بیمار می‌تواند با حرکت ولگشت در جامعه، بیماری خود را به هر شخصی که ملاقات می‌کند منتقل کند. حرکت فیزیکی این شخص بخش ولگشت است و اگر چنانچه این شخص به عنوان مثال از هواپیما استفاده کند و به یک منطقهٔ دوردست سفر کند، آنگاه شبیه یک پیوند غیرموضعی در مدل ما رفتار می‌کند. نحوهٔ عملکرد این مدل، نماهای بحرانی و کلاس جهان شمولی گذار فاز بیماری سؤال‌هایی هستند که، ما در این مقاله بررسی می‌کنیم.

۲. مدل

در این مدل ما یک شبکهٔ $L\times L$ با تعداد $N = L^۲$ جایگاه را در نظر می‌گیریم. شبکه شرط مرزی دوره‌ای دارد. هر جایگاه چهار همسایهٔ نزدیک دارد که به اندازهٔ ثابت شبکه (به طول واحد) از هم فاصله دارند. بنابراین هر جایگاه می‌تواند به کمک پیوندهای موضعی به چهار همسایهٔ نزدیک خود متصل شود. ما دو جایگاه مختلف را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و بین این دو جایگاه انتخاب شده یک پیوند اضافی غیر موضعی برقرار می‌کنیم. طول این پیوند غیر موضعی انتخاب شده بیشتر از ثابت شبکه است. با این عمل دو جایگاه انتخاب شده را همانند همسایه‌های نزدیک هم در نظر می‌گیریم. در این هنگام یک شبکهٔ همسایگی با تعداد $N = L^2$ جایگاه مشخص می‌کنیم که در آن برای هر جایگاه همسایه‌های آن را قرار می‌دهیم (همسایه‌ها با پیوندهای موضعی و غیر موضعی). سپس این عمل را تا زمانی ادامه می‌دهیم که تعداد پیوندهای اضافی تشکیل شده به مقدار مورد نظر برسد (N / تعداد پیوندهای اضافی =γ). پیوندهای غیر موضعی بین دو جایگاه انتخاب شده نباید تکراری باشند. هنگامی که پیوندهای اضافی غیر موضعی به مقدار مورد نظر رسید شبکه آمادهٔ بررسی می‌شود.

در ادامه برای بررسی مدل، در زمان $t = ۰$، یک جایگاه به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و یک ولگشت تصادفی از این جایگاه انتخاب شده شروع به حرکت می‌کند. در هر گام زمانی ولگشت تصادفی می‌تواند به صورت کاملاً تصادفی یکی از جایگاه‌های همسایه‌های نزدیک خود را (پیوندهای موضعی یا غیر موضعی) از شبکهٔ همسایگی انتخاب کند. بنابراین ولگشت تصادفی می‌تواند علاوه بر حرکت موضعی، حرکت غیر موضعی نیز داشته باشد. هر جایگاهی را که توسط ولگشت تصادفی انتخاب می‌شود علامت گذاری (روشن) می‌کنیم و این جایگاه انتخاب شده برای همیشه روشن باقی می‌ماند. اگر ولگشت تصادفی یک جایگاه را چندین بار انتخاب کند در علامت گذاری جایگاه اهمیتی ندارد. مجموعه‌ای از جایگاه‌های روشن شده که فقط با پیوندهای موضعی با طول ثابت شبکه به یکدیگر متصل شده‌اند، تشکیل یک خوشه از جایگاه‌های روشن را می‌دهند. با گذشت زمان و ادامهٔ حرکت ولگشت تصادفی روی شبکه در حالت $p < p_c$ خوشه‌های غیر متصل با اندازه‌های محدود در سرتاسر شبکه پدید می‌آیند و با افزایش جابه‌جایی‌های ولگشت تصادفی، خوشه‌های محدود به هم می‌پیوندند و خوشهٔ بزرگ را تشکیل می‌دهند (حالت $p > p_c$) و تراوش در شبکه اتفاق می‌افتد. همان طور که پیشتر بیان شد چگونگی گذار فاز در $p = p_c$

۱. finite size scaling theory
۲. self-avoiding walks
۳. random walk

کلاس جهان شمولی به دست آمده از نماهای بحرانی و زمان گذار p_c سؤال‌هایی هستند که ما در ادامه بررسی خواهیم کرد. برای به دست آوردن پارامتر نظم در شبکه، ما اندازهٔ بزرگ‌ترین خوشه‌های روشن $S(t)$ را در هر گام زمانی به دست می‌آوریم. بعد از ایجاد تراوش در سیستم، مقادیر بزرگ‌ترین خوشه‌ها را در گام‌های زمانی پی در پی از هم کم می‌کنیم.

$$\Delta = \frac{1}{N}\left(S\left(t_c + 1\right) - S(t_c)\right), \qquad (1)$$

هنگامی که بزرگ‌ترین پرش در پارامتر نظم در زمان t_c صورت می‌گیرد، آستانهٔ تراوش $p_c = t_c / N$ به دست می‌آید که N تعداد جایگاه‌های شبکه است [۴]. اندازهٔ بزرگ‌ترین خوشه در زمان t_c به عنوان قدرت تراوش در نظر گرفته می‌شود $S(t_c)$. به منظور داشتن مقادیر دقیق‌تری از کمیت‌های پارامتر نظم، آستانه و قدرت تراوش، تعداد $M = 10^4$ شبیه سازی برای هر شبکه تکرار شده است. سپس ما میانگین و جذر میانگین مربعی کمیت‌ها را از نتایج شبیه سازی‌ها به دست می‌آوریم:

$$Y_i = \left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_M\right)|_{Y=\Delta, p_c \text{ and } S_c}, \qquad (2)$$

$$\overline{Y}\left(L\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i, \qquad (3)$$

$$\chi_Y = \sqrt{< Y_i^2 >}. \qquad (4)$$

در این مقاله ما اندازهٔ شبکه را تغییر می‌دهیم و تغییر در رفتار شبکه‌ها با اندازه‌های متفاوت را، با تئوری مقیاس‌بندی اندازهٔ محدود بررسی می‌کنیم. برای شبکه‌های محدود با طول L، رفتار مقیاس‌بندی برای میانگین و جذر میانگین مربعی کمیت‌ها بر حسب نماهای شکاف به صورت زیر داده شده است [۵]:

$$\overline{\Delta}\left(L\right) \sim L^{-\beta_1},\ \chi_\Delta \sim L^{-\beta_2}, \qquad (5)$$

$$\overline{S}_c\left(L\right) \sim L^{d_{f1}},\ \chi_S \sim L^{d_{f2}}, \qquad (6)$$

$$|\,\overline{p}_c\left(L\right) - \overline{p}_c\left(\infty\right)| \sim L^{\frac{1}{\nu_1}}. \qquad (7)$$

نماهای شکاف $\beta_1 = \beta_2$ است که برابرند با β. β/ν نمای بحرانی است که رفتار توانی پارامتر نظم را در حد اندازهٔ نامحدود نشان می‌دهد. ν نمای بحرانی مربوط به طول همبستگی در حد ترمودینامیکی است. نماهای $d_{f1} = d_{f2}$ است که برابر با بعد فرکتالی d_f در حد اندازهٔ نامحدود است [۶]. قانون مقیاس‌بندی برای نماهای شکاف به صورت $\beta = d_{f1} - d_{f2}$ است که مشابه با رفتار مقیاس‌بندی برای تراوش استاندارد است ($\beta / \nu = d - d_f$). ما نمای شکاف ν_2 را از مقدار بیشینهٔ تابع توزیع $P_p(p_c, L)$ به دست می‌آوریم:

$$P_p\left(p_c^*, L\right) \sim L^{\frac{1}{\nu_2}}, \qquad (8)$$

p_c^* متناظر با مقدار بیشینهٔ تابع توزیع است و $\nu = \nu_1 = \nu_2$ است. تابع توزیع کمیت‌ها از قانون مقیاس‌بندی اندازهٔ محدود به صورت زیر به دست می‌آید [۷]:

$$P_\Delta\left(\Delta, L\right) = L^{\beta_2} f_\Delta\left(\Delta\, L^{\beta_2}\right), \qquad (9)$$

$$P_p\left(p_c, L\right) = L^{\frac{1}{\nu_2}} f_p\left(\delta p_c\ L^{\frac{1}{\nu_2}}\right), \qquad (10)$$

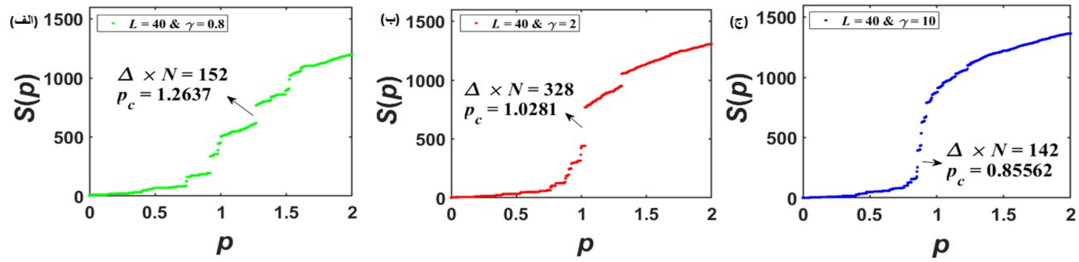
$$P_S\left(S_c,\ L\right) = L^{-d_{f2}} f_S\left(S_c\ L^{-d_{f2}}\right). \qquad (11)$$

که $\delta_{p_c} = p_c - \overline{p}_c(\infty)$ و $\overline{p}_c(\infty)$ آستانهٔ تراوش برای شبکهٔ نامحدود است. $f_\Delta\left(\Delta\, L^{\beta_2}\right)$، $f_p\left(\delta p_c\ L^{\frac{1}{\nu_2}}\right)$ و $f_S\left(S_c\ L^{-d_{f2}}\right)$ سه تابع مقیاس‌بندی جهان شمولی هستند. از نتایج شبیه سازی ها، ما توابع توزیع کمیت‌ها و توابع مقیاس‌بندی جهانی شان را با استفاده از قضیهٔ مقدار بیشینه[1] به دست می‌آوریم.

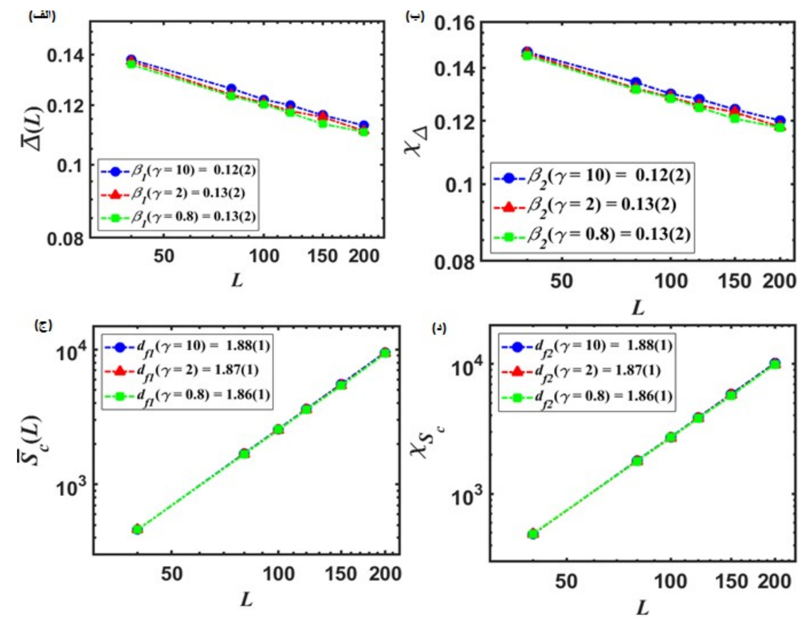
۳. نتایج

ما شبکه‌هایی با اندازه‌های مختلف ۴۰، ۸۰، ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ و پیوندهای اضافی با γهای ۰٫۸، ۲ و ۱۰ را بررسی می‌کنیم و از شرایط مرزی دوره‌ای نیز برای حرکت ولگشت تصادفی استفاده می‌کنیم. شکل ۱ نمودار بزرگ‌ترین خوشه را بر حسب p در گام‌های زمانی مختلف نشان می‌دهد. این نمودار تنها برای یک نمونه از شبکه با اندازهٔ ۴۰ و گاماهای مختلف ۰٫۸، ۲ و ۱۰ رسم شده است. همان طور که پیشتر گفته شد بزرگ‌ترین شکاف در منحنی‌ها در p_c صورت می‌گیرد. بنابراین با این روش می‌توانیم پارامتر نظم (اندازهٔ بزرگ‌ترین شکاف تقسیم بر تعداد جایگاه‌های شبکه)، آستانهٔ تراوش و قدرت تراوش (اندازهٔ بزرگ‌ترین خوشه در زمان p_c) را به دست

1. Extreme value theory



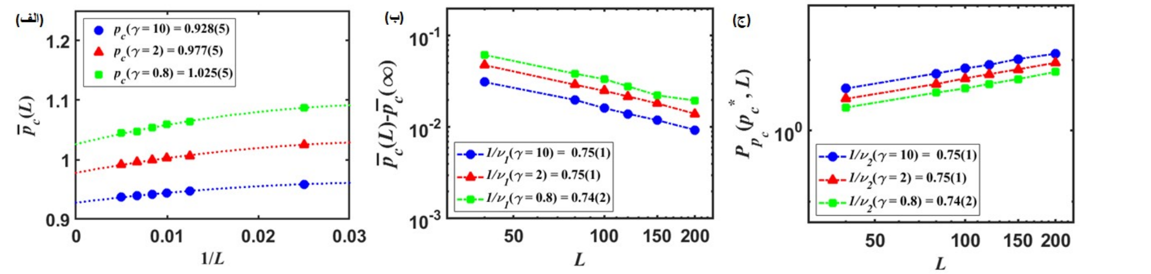
شکل ۱. نمودار تحول زمانی بزرگ‌ترین خوشه بر حسب p. این نمودار تنها برای یک نمونه از شبکه با اندازهٔ ۴۰ و گاماهای مختلف ۰٫۸، ۲ و ۱۰ رسم شده است. بزرگ‌ترین شکاف در آستانهٔ تراوش صورت می‌گیرد. در داخل منحنی‌ها اندازهٔ بزرگ‌ترین شکاف و آستانهٔ تراوش مشخص شده است.



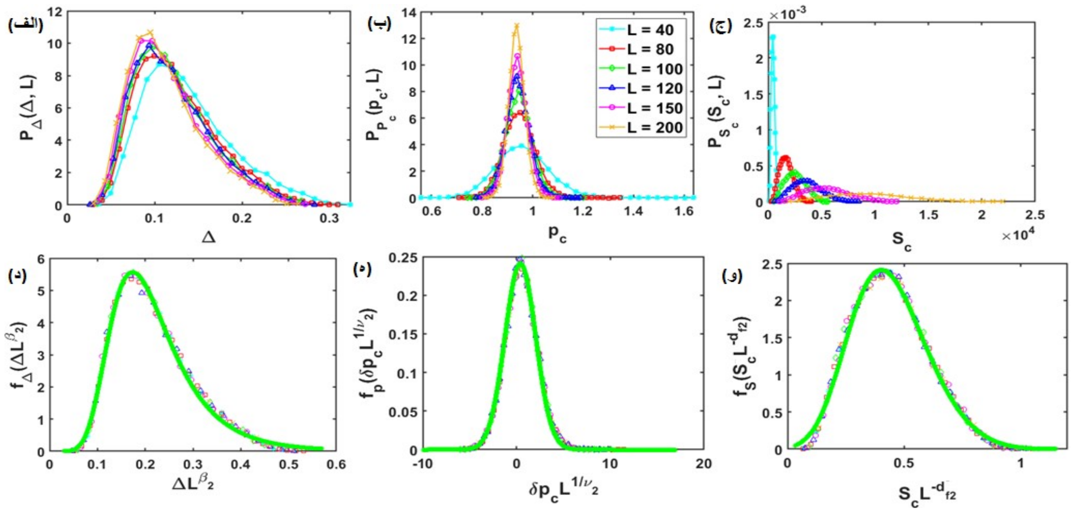
شکل ۲. منحنی میانگین و ریشهٔ میانگین مربعی پارامتر نظم (قسمت‌های الف و ب) و قدرت تراوش (قسمت‌های ج و د) بر حسب تابعی از طول شبکه برای مقادیر متفاوت γ (۰٫۸، ۲ و ۱۰) رسم شده است. از شیب منحنی‌ها مقادیر β_1، β_2 و بعد فرکتالی d_{f1} و d_{f2} به دست می‌آید.

آوریم. شکل ۲ منحنی میانگین و ریشهٔ میانگین مربعی پارامتر نظم (قسمت‌های الف و ب) و قدرت تراوش (قسمت‌های ج و د) را بر حسب تابعی از طول شبکه نشان می‌دهد. ما از مقیاس‌های لگاریتمی روی محورهای افقی و عمودی برای استخراج نماهای بحرانی استفاده می‌کنیم. از شیب منحنی‌ها (قسمت الف شکل ۲) و با استفاده از رابطهٔ مقیاس‌بندی (۵) برای پیوندهای اضافی با γهای ۰٫۸، ۲ و ۱۰، مقادیر β_1 و β_2 به ترتیب (۲) ۰٫۱۳، (۲) ۰٫۱۳ و (۲) ۰٫۱۲ به دست می‌آید. برای به دست آوردن بعد فرکتالی، رابطهٔ (۶)، اندازهٔ بزرگ‌ترین خوشه از جایگاه‌های روشن (قدرت تراوش) را در نقطهٔ آستانه تراوش بر حسب طول شبکه رسم کردیم (قسمت‌های ج و د از شکل ۲). از شیب نمودارها d_{f1} و d_{f2} برای پیوندهای اضافی با γهای مختلف ۰٫۸، ۲ و ۱۰، به ترتیب (۱) ۱٫۸۶، (۱) ۱٫۸۷ و (۱) ۱٫۸۸ به دست می‌آید.

به منظور به دست آوردن نماهای ν_2 و ν_1 از روابط (۷) و (۸)، ما باید در ابتدا مقادیر میانگین آستانهٔ تراوش را برای شبکه با طول نامتناهی $\overline{p}_c(\infty)$ به دست آوریم. به این منظور مقادیر میانگین آستانه $\overline{p}_c(L)$ که برای سیستم‌ها با اندازه‌های متفاوت L به دست آمده است را بر حسب $1/L$ رسم می‌کنیم. با برونیابی نمودارها در حالتی که $1/L$ را به سمت صفر میل می‌دهیم، $\overline{p}_c(\infty)$ برای مقادیر مختلف γ به دست می‌آید (قسمت الف از شکل ۳). در شکل ۳ در قسمت (ب) منحنی $\overline{p}_c(\infty)-\overline{p}_c(L)$ و در قسمت (ج) مقدار بیشینه تابع توزیع آستانهٔ تراوش $P_p\left(p_c^*, L\right)$ بر حسب طول آستانهٔ



شکل ۳. (الف) مقادیر آستانهٔ بحرانی متوسط $\overline{p}_c(\infty)$ برای پیوندهای اضافی با γهای ۰٫۸، ۲ و ۱۰ بر حسب $1/L$. خط‌های نقطه چین برون‌یابی نقاط را در حد اندازهٔ نامحدود وقتی که $1/L$ به سمت صفر می‌رود نشان می‌دهند. مقادیر آستانهٔ بحرانی متوسط برای اندازه‌های نامتناهی به ترتیب ۱٫۰۲۵ (۵)، ۰٫۹۷۷ (۵) و ۰٫۹۲۷ (۵) به دست آمدند، (ب) منحنی $\overline{p}_c(\infty)-\overline{p}_c(L)$ و (ج) مقدار بیشینه تابع توزیع آستانهٔ تراوش $P_p\left(p_c^*, L\right)$ بر حسب طول شبکه رسم شده است و مقادیر $1/\nu_2$ و $1/\nu_1$ از شیب نمودارها اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۴. تابع توزیع‌های پارامتر نظم (الف) آستانهٔ تراوش، (ب) قدرت تراوش و (ج) برای پیوندهای اضافی با $\gamma=10$ و طول شبکه‌های مختلف (۴۰، ۸۰، ۱۰۰، ۱۲۰، ۱۵۰ و ۲۰۰) نشان داده شده است. توابع مقیاس‌بندی پارامتر نظم، آستانهٔ تراوش، و قدرت تراوش به ترتیب در قسمت‌های (د)، (هـ) و (و) نشان داده شده است. بهترین نموادر منطبق شده بر داده‌ها با رنگ سبز نشان داده شده است. تابع مقیاس‌بندی برای آستانه تراوش کاملا با تابع توزیع گوسی در توافق است و توابع مقیاس‌بندی پارامتر نظم ($f_\Delta(\Delta\, L^{\beta_2})$) و قدرت تراوش ($f_S(S_c\, L^{-d_{f2}})$) به ترتیب تابع توزیع‌های فرشه و وایبل با پارامتر شکل ۰٫۰۶۹ (۵) و ۰٫۱۷۲- (۵) هستند.

بر حسب طول شبکه رسم شده است و از شیب نمودارها مقادیر $1/\nu_1=1/\nu_2$ برابر با ۰٫۷۴ (۲)، ۰٫۷۵ (۱) و ۰٫۷۵ (۱) برای پیوندهای اضافی با γهای ۰٫۸، ۲ و ۱۰ استخراج شد. در حد γ به سمت بی‌نهایت، پیوندهای غیر موضعی بسیار زیادی وجود دارد که حرکت‌های ولگشت تصادفی را کاملا غیر موضعی می‌کند و مدل ما به طور مؤثری به مدل تراوش جایگاهی استاندارد در دو بعد میل خواهد کرد. نماهای بحرانی به دست آمده (شکل‌های ۲ و ۳) به خوبی این موضوع را نشان می‌دهند. در قسمت‌های الف، ب و ج از

شکل ۴ منحنی تابع توزیع، خود کمیت‌ها (S_c و $Y=\Delta, p_c$) برای پیوندهای اضافی $\gamma=10$ و طول شبکه‌های مختلف نشان داده شده است. محور افقی تابع توزیع های پارامتر نظم (قسمت الف)، آستانهٔ تراوش (قسمت ب) و قدرت تراوش (قسمت ج)، برای طول‌های متفاوت را به ترتیب در L^{β_2}، $L^{\frac{1}{\nu_2}}$ و $L^{-d_{f2}}$ و محور عمودی را در $L^{-\beta_2}$، $L^{-\frac{1}{\nu_2}}$ و $L^{d_{f2}}$ ضرب می‌کنیم؛ با این عمل منحنی‌های با طول‌های متفاوت در توابع توزیع روی هم قرار می‌گیرند.

بهترین نمودار منطبق شده بر داده‌ها با رنگ سبز در قسمت‌های (د)، (ه) و (و) شکل ۴ نشان داده شده است. تابع مقیاس‌بندی برای $Y = p_c$ کاملاً با تابع توزیع گوسی در توافق است (قسمت هـ شکل ۴). توابع مقیاس‌بندی جهان شمولی را برای کمیت‌های S_c و $Y = \Delta$ بر اساس توابع قضیه مقدار بیشینه بررسی می‌کنیم. توابع توزیع مقدار بیشینه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\sigma}t(z)^{\zeta+1}\ e^{-t(z)}, \qquad (12)$$

با $t(z)$:

$$t\left(z\right)=\begin{cases}(1+\zeta(\frac{z-\mu}{\sigma}))^{-1/\zeta} & if\, \zeta\neq 0,\\ \exp\left(-\frac{(z-\mu)}{\sigma}\right) & if\, \zeta=0.\end{cases}$$

که μ موقعیت، σ پارامتر مقیاس و ζ پارامتر شکل هستند. هنگامی که $\zeta > 0$ است، تابع توزیع مقدار بیشینه متناسب با تابع توزیع فرشه[1] است. برای حالت $\zeta < 0$، تابع توزیع بیشینه، تابع توزیع وایبل[2] را نشان می‌دهد و در حالت $\zeta = 0$ تابع توزیع گامبل[3] است. بنابراین با استفاده از قضیهٔ مقدار بیشینه، بهترین نمودارها را بر روی توابع مقیاس‌بندی پارامتر نظم ($f_S(S_c\, L^{-d_{f^2}})$) و قدرت تراوش ($f_\Delta(\Delta\, L^{\beta_2})$) رسم کردیم و به این نتیجه رسیدیم که توابع مقیاس‌بندی برای آنها به ترتیب تابع توزیع‌های فرشه و وایبل با پارامتر شکل ۵ ۰٫۰۶۹ و (۵) ۰٫۱۷۲- است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل تراوشی معرفی شده است که برخلاف مدل استاندارد که هر جایگاه به صورت کاملاً تصادفی انتخاب و روشن می‌شود، در اینجا جایگاه‌ها به صورت همبسته انتخاب می‌شوند. این همبستگی از همبستگی بلند برد زمانی در گام‌های ولگشت به عاریه گرفته شده است که برای کنترل و تضعیف آن از گام‌های غیرموضعی با درصد قابل کنترل توسط پارامتر γ استفاده شده است. در نتیجه پر واضح است که تنها در حد تعداد پیوندهای غیرموضعی بسیار بالاست که این مدل قابل نگاشت به مدل تراوش جایگاهی استاندارد است. در نتیجه مدل معرفی شده در این کار تنها در حد γ بی‌نهایت، به کلاس جهان شمولی مدل استاندارد شناخته شده در دو بعد میل می‌کند.

در حد تعداد پیوندهای غیر موضعی محدود، شاید نتایج ما نشان دهندهٔ ایجاد کلاس‌های جهان شمولی جدید نیز باشد. در حد γ های خیلی کم امکان تغییر در طبیعت گذار فاز از پیوسته به گسسته وجود دارد که البته به دلیل زمانبر بودن اثبات آن، این بخش را به مطالعات آینده واگذار خواهیم کرد. نتایج ما نشان می‌دهد که با افزایش یافتن پارامتر γ، مقدار آستانهٔ تراوش کاهش می‌یابد. بنابراین مدل پیشنهاد شده توسط ما که بر پایهٔ تنها یک پارامتر γ بنا نهاده شده است، این امکان را ایجاد می‌کند تا پیش‌بینی مناسبی از نحوهٔ پیشرفت و گسترش یک بیماری یا شایعه و ارتباط آن با کنترل مرزهای هوایی یا فضای مجازی و... ارائه دهد.

مراجع

1. D Stauffer, and A Aharony, "*Introduction to Percolation Theory*", Taylor and Francis (1991).
2. S R Broadbent, and J M Hammersley, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*. **53** (1957) 629.
3. V Privman and M E Fisher, *Phys. Rev*. B. **30** (1984) 322.
4. J Nagler, A Levina, and M Timme, *Nature. Phys*. **7** (2011) 265.
5. J Fan, and X Chen, *Europhysics Letters* **107** (2014) 28005.
6. J Fan, J Meng, Y Liu, A A Saberi, J Kurths, and J Nagler, *Nature. Phys*. **16** (2020) 495.
7. V Privman and M E Fisher, *Phys. Rev*. B **30** (1984) 322.

۱. Frechet distribution
۲. Weibull distribution
۳. Gumbel distribution