مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران

مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۴، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۸۳

محاسبهٔ ترازهای انرژی پایین ایزوتوپهای زوج_زوج کادمیوم، قلع و تلور در چارچوب مدل بوزونی برهمکنش‌دار (IBM-1)

سید مجتبی مستجاب الدعواتی، احمد پرورش و ابراهیم حسن‌زاده

گروه فیزیک - دانشگاه اصفهان

(دریافت مقاله: ۸۱/۱۰/۱۲ ؛ دریافت نسخه نهایی: ۸۲/۱۰/۶)

چکیده

در این مقاله ضمن معرفی مدل بوزونی برهمکنش‌دار، محاسبات مربوط به ترازهای انرژی پایین ایزوتوپهای زوج - زوج کادمیم، قلع و تلور در چارچوب مدل بوزونی برهمکنش‌دار ارائه می‌شود. محاسبات برای انرژی وگذارهای چهارقطبی الکتریکی ترازها انجام شده است و در هر مورد که دادهٔ تجربی یا محاسبات دیگری یافته‌ایم نتایج خود را با آنها مقایسه کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: مدلهای هسته‌ای، تقارنهای دینامیکی، مدل بوزونی، گذارهای الکترومغناطیسی

۱. مقدمه

در کنار استفاده از مدل هندسی برای توصیف حرکتهای جمعی در هسته‌ها، رهیافت دیگری بر پایهٔ مفهوم تقارنها برای توصیف برانگیختگیهای هسته‌ای وجود دارد. این رهیافت اولین بار در قالب مدل بوزونی برهمکنش‌دار (IBM-1) ارائه گردید [۱]. ما در این مقاله نخست مدل بوزونی برهمکنش‌دار را معرفی می‌کنیم. سپس انرژی ترازهای پایین (تا حدود انرژی $۳/۵MeV$) ایزوتوپهای زوج_زوج $Cd\,(N=۶۰-۶۸)$، $Sn(N=۶۰-۷۲)$ و $Te(N=۶۲-۷۰)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در انتها نیز آهنگهای گذار چهارقطبی الکتریکی کاهش یافته $B(E۲)$ را برای بعضی از حالتها محاسبهٔ می‌کنیم. در هر مورد که دادهٔ تجربی یا محاسبه دیگری یافته‌ایم محاسبات خود را با آن داده‌ها مقایسه کرده‌ایم.

در مدل بوزونی برهمکنش‌دار سعی بر این است که خواص جمعی هسته‌ها به یک روش وحدت یافته، توصیف شوند. منشأ این مدل از طرفی در مدل پوسته‌ای است و از طرف دیگر، در وضعیتهای زیادی خواصی مانند مدل جمعی دارد. در مدل بوزونی برهمکنش‌دار از یک شیوهٔ جبری مبتنی بر نظریهٔ گروه‌ها استفاده می‌شود و بر همین اساس، بسیاری از خواص مدل توسط روشهای نظریهٔ گروه‌ها به دست می‌آیند که به طور تحلیلی بیان می‌گردند [۲]. ایدهٔ اولیهٔ مدل بوزونی برهمکنش‌دار این است که، ترازهای انرژی پایین درهسته‌های زوج- زوج می‌توانند توسط یک دستگاه از بوزونهای برهمکنش‌دار s و d که به ترتیب تکانه‌های ۰ و ۲ را حمل می‌کنند ، توصیف شوند. در واقع در این مدل هر زوج نوکلئون به عنوان بوزون در نظر گرفته می‌شود. به علاوه بوزونها (زوج نوکلئونها) همیشه از نزدیکترین پوستهٔ بسته شمرده

می‌شوند. مثلا هستهٔ $^{106}_{48}Cd_{58}$ دو حفرهٔ پروتونی در پوستهٔ بستهٔ ($Z=50$) و هشت نوترون بیرون پوستهٔ بسته ($N=50$) دارد. بنابراین در چارچوب این مدل، این هسته پنج بوزون [$N=\frac{1}{2}(2+8)=5$] دارد.

بوزون s ($L=0$) و بوزون d ($L=2$) روی هم شش مؤلفه (زیر تراز) دارند و بنابراین یک فضای شش بعدی به وجود می‌آورند که به توصیفی برحسب گروه یکانی در فضای شش بعدی $U(6)$، می‌رسد. وجود تقارنها در چارچوب این مدل منحصر به فردترین ویژگی این مدل است و هنگام کاهش جبر $U(6)$ به زیر جبرهایش، سه گونه از تقارنهای دینامیکی آشکار خواهد شد. این تقارنهای دینامیکی که در چارچوب این مدل با $U(5)$، $SU(3)$ و $O(6)$ نمایش داده می‌شوند در مدل هندسی به ترتیب متناظر با ایده‌های هندسی نوسانگر ناهماهنگ کروی، چرخندهٔ متقارن تغییر شکل یافته و چرخندهٔ نامتقارن تغییر شکل یافته هستند. توصیف این وضعیتها تحلیلی و نسبتاً ساده است و تعبیرهای فیزیکی صریحی دارد. در حالتهای زیادی هم که هسته‌ها هیچ کدام از تقارنهای یاد شده را نمایش ندهند، هامیلتونی موجود در مدل باید به شیوه‌ای عددی قطری شود و خاصیت تقارنی موجود، این روش را ساده می‌کند [۳ و۴]. ما در این مقاله در مورد روش عددی صحبت خواهیم کرد.

۲. مدل بوزونی برهمکنش‌دار

دلیل در نظرگرفتن بوزونهایی با $J=0^+$ و $J=2^+$ در تعبیر میکروسکوپیکی آنها قرار دارد. در واقع اساس این فرض به مدل پوسته‌ای برمی‌گردد، جایی که حالتهایی با تکانه و پاریتهٔ 0^+ و 2^+ دارای انرژی به مراتب کمتر از دیگر حالتها هستند. این موضوع یک سیمای ویژه از محاسبات ترازها در مدل پوسته‌ای است که از یک برهمکنش کوتاه برد دو جسمی، بین نوکلئونهای مشابه در یک مدار، نتیجه شده است. با توجه به این که در این مدل یک بوزون تک قطبی با تکانه و پاریتهٔ $J^P=0^+$ و یک بوزون چهار قطبی با تکانه و پاریتهٔ $J^P=2^+$ وجود دارد، سنگ بناهای مدل عبارتند از:

$s^\dagger, d^\dagger_\mu$	۶ عملگر خلق	$(\mu=0,\pm1,\pm2)$
s, d_μ	(۱) ۶ عملگر نابودی	$(\mu=0,\pm1,\pm2)$

این عملگرها از روابط جابه‌جایی بوزونی پیروی می‌کنند. هامیلتونی مدل به روش زیر ساخته می‌شود [۳ و ۴]:

جفت نوکلئونهای جمعی S و D (در فضای مدل پوسته‌ای) به بوزونهای متناظر (s و d)، و برهمکنشهای نوکلئون ـ نوکلئون نیز به برهمکنشهای بوزون ـ بوزون نگاشته می‌شود [۵] و یک محدودیت و شاید شاخصترین فرضی که بر این مدل اعمال می‌گردد این است که تعداد بوزونها پایسته است، یا به بیان دیگر، در هر عملگر فیزیکی که با آن سروکار داریم، باید تعداد عملگرهای خلق و نابودی با هم برابر باشد. در معمولترین تصویر میکروسکوپی از مدل، بوزونها معادل جفتهای نوکلئونی هستند. نقش بوزون s در نتیجه شدن جفت شدگی قوی تک قطبی در نیروی نوکلئون- نوکلئون بین ذرات مشابه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اهمیت بوزون d نیز در نیروی جفت شدگی نسبتا قوی چهار قطبی و در برهمکنش موثر نوترون- پروتون به وسیلهٔ نیروی چهار قطبی - چهارقطبی، قرار دارد. فرضهای موجود در مدل، پیچیدگی مسائل چند فرمیونی را کاهش می‌دهد. حال با این توضیحات می‌توآن هامیلتونی سیستم را به این صورت نوشت:

$$H=E_0+\sum_{\alpha}\varepsilon_\alpha b^\dagger_\alpha b_\alpha+\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{1}{2}u_{\alpha\beta\gamma\delta}b^\dagger_\alpha b^\dagger_\beta b_\gamma b_\delta+\ldots \quad (2)$$

که در این رابطه E_0 یک مقدار ثابت است و در انرژیهای برانگیختگی شرکت نمی‌کند و برای تمام ترازهای یک هستهٔ یکسان است. عبارت دوم سهم برهمکنش تک جسمی را نشان می‌دهد و عبارت سوم سهم برهمکنش دوجسمی را بر عهده دارد. همین جا علت نام‌گذاری مدل کاملاً آشکار می‌گردد، مدلی که توسط بوزونها توصیف می‌گردد و بوزونهایی که با در نظر گرفتن فرضهایی خاص با یکدیگر برهمکنش می‌کنند ("مدل بوزونی برهمکنش‌دار").

حال اگر این رابطه را در مورد بوزونهای s و d اعمال کنیم به هامیلتونی زیر می‌رسیم:

$$H = E_0 + \varepsilon\left(s^\dagger \cdot \tilde{s}\right) + \varepsilon_d\left(d^\dagger \cdot \tilde{d}\right)$$
$$+ \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2}(2L+1)^{\frac{1}{2}} C_L \left[\left[d^\dagger \times d^\dagger\right]^{(L)} \times \left[\tilde{d} \times \tilde{d}\right]^{(L)}\right]^{(0)}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} V_1 \left[\left[d^\dagger \times d^\dagger\right]^{(2)} \times \left[\tilde{d} \times \tilde{s}\right]^{(2)} + \left[d^\dagger \times s^\dagger\right]^{(2)} \times \left[\tilde{d} \times \tilde{d}\right]^{(2)}\right]^{(0)}$$
$$+ \frac{1}{2} V_0 \left[\left[d^\dagger \times d^\dagger\right]^{(0)} \times \left[\tilde{s} \times \tilde{s}\right]^{(0)} + \left[s^\dagger \times s^\dagger\right]^{(0)} \times \left[\tilde{d} \times \tilde{d}\right]^{(0)}\right]^{(0)}$$
$$+ u_2 \left[\left[d^\dagger \times s^\dagger\right]^{(2)} \times \left[\tilde{d} \times \tilde{s}\right]^{(2)}\right]^{(0)}$$
$$+ \frac{1}{2} u_0 \left[\left[s^\dagger \times s^\dagger\right]^{(0)} \times \left[\tilde{s} \times \tilde{s}\right]^{(0)}\right]^{(0)}, \qquad (3)$$

همان گونه که دیده می‌شود این هامیلتونی شامل ۹ پارامتر می‌باشد. ε_s و ε_d بیانگر انرژی بوزونهای s و d می‌باشند. C_0، C_2، C_4، v_0، v_2 و u_0، u_2 نیز بیانگر عنصر ماتریسی برهمکنش دو جسمی هستند.

۳. روش محاسبات

آن چه که مدل IBM-1 را از دیگر مدلهای بوزونی متمایز می‌کند، این است که تعداد کل بوزونها (بوزونهای s به علاوهٔ بوزونهای d) مقداری متناهی و پایسته است. این خاصیت امکان محاسبهٔ ماتریس هامیلتونی را بدون کوتاه کردن فضای مدل، فراهم می‌سازد. بنابراین خواص یک دستگاه متناهی با بوزونهایی که دو به دو با یکدیگر برهمکنش می‌کنند، می‌تواند به طور دقیق مورد مطالعه قرار گیرد، بدون آن که هیچ محدودیتی بر برهمکنش دو جسمی اعمال شود. یکی دیگر از جنبه‌های منحصر به فرد IBM-1، بحث تقارنهای دینامیکی می‌باشد. در محاسبات عددی نه تنها این حدها ($U(5)$، $SU(3)$ و $O(6)$) می‌توانند به دست آیند، بلکه حالات میانی نیز که تقارن مشخصی ندارند نیز قابل بررسی‌اند.

ما در این مقاله برای انجام محاسبات عددی از کد رایانه‌ای PHINT استفاده کرده‌ایم [۶]. این کد شامل برنامه‌هایی است که محاسبات مربوط به هسته‌های زوج - زوج را در چارچوب IBM-1 انجام می‌دهد. این برنامه‌ها به زبان FORTRAN هستند که شامل بخشهای ارائه شده در جدول ۱ می‌باشند.

جدول ۱. برنامه‌های مربوط به کد رایانه‌ای PHINT.

نام برنامه	محاسبات
PCIBAXW	انرژیهای برانگیختگی و توابع موج
PCIBAEM	گذارهای الکترومغناطیسی
CFPGEN	مولدهای ضرایب کسری

این کد برای انجام محاسبات حالتهای جمعی انرژی پایین در هسته‌های زوج - زوج سنگین و نیمه سنگین نوشته شده است. برنامهٔ PCIBAXW، انرژی و ویژه بردارهای حالتهای با پاریتهٔ مثبت ومنفی را محاسبهٔ می‌کند. حالتهای با پاریتهٔ منفی به وسیلهٔ وارد کردن بوزون f $(L=3^-)$، ساخته می‌شوند [۳]، و در انتها کلیهٔ ویژه مقادیر وهر تعداد دلخواه از ویژه بردارها داده می‌شود. در قطری کردن هامیلتونی از پایه‌های کروی $U(5)$ استفاده می‌شود که به صورت زیر است:

$$|\psi\rangle = |[N], n_d, v, n_\Delta, L_d, n_f, L\rangle \qquad (4)$$

که برچسبهای تابع موج بالا عبارت‌اند از:

N : تعداد کل بوزونها، n_d : تعداد بوزونهای d، v : تعداد جفت بوزونهای d که به تکانهٔ صفر جفت شده‌اند، n_Δ : تعداد بوزونهای d سه‌گانه‌ای که به تکانهٔ صفر جفت شده اند، n_f : تعداد بوزونهای f که برای حالتهای با پاریتهٔ مثبت صفر و برای حالتهای با پاریتهٔ منفی یک می‌باشد L_d : تکانهٔ زاویه‌ای کل بوزونهای d و L : تکانهٔ زاویه‌ای کل.

از برنامه‌ی PCIBAEM برای محاسبهٔ گذارهای الکترومغناطیسی استفاده می‌شود. برنامه‌ی CFPGEN نیز، برای محاسبهٔ عناصر ماتریسی هامیلتونی کاربرد دارد. این برنامه شامل ضرایب کسری اصلی است (CFP) [۷، ۸] که از آنها در محاسبهٔ عناصر ماتریسی بوزون d استفاده می‌شود. این ضرایب از یک فایل به نام PHINT.OUT، که توسط برنامهٔ CFPGEN تولید می‌شود، خوانده می‌شود.

لازم به ذکر است که در این محاسبات شکل هامیلتونی

می‌تواند از نوع (۳) و یا از نوع بسط چند قطبی باشد. بسط چند قطبی نمایش هم ارز دیگری از هامیلتونی است که با رابطهٔ زیر بیان می‌شود :

$$
\begin{aligned}
H_{multipole\ \exp} &= EPS\ \ \hat{n}_d + \tfrac{1}{2} ELL(\hat{L}\cdot\hat{L}) + \tfrac{1}{2} qq(\hat{Q}\cdot\hat{Q}) \\
&- 5\sqrt{7} OCT[(d^\dagger \tilde{d})^{(3)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(3)}]^{(0)} \\
&+ 15 HEX[(d^\dagger \tilde{d})^{(4)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(4)}]^{(0)} \\
\hat{L}\cdot\hat{L} &= -10\sqrt{3}[(d^\dagger \tilde{d})^{(1)} \times (d^\dagger \tilde{d})^{(1)}]^{(0)} \\
\hat{Q}\cdot\hat{Q} &= \sqrt{5}\Big[\{(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} \\
&+ \frac{CHQ}{\sqrt{5}}(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}\} \cdot \{(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} \\
&+ \frac{CHQ}{\sqrt{5}}(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}\}\Big]
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

۴. محاسبهٔ ترازهای انرژی پایین در ایزوتوپهای کادمیم، قلع وتلور

الف- ما در این قسمت انرژی ترازهای پایین ایزوتوپهای $Cd(N=60-68)$، $Sn(N=60-72)$ و $Te(N=62-70)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. محاسبات با داده‌های تجربی سازگار است. مقادیر پارامترهای هامیلتونی به کار برده شده برای این ایزوتوپها (در شکل بسط چند قطبی) در جدول ۲ آمده است.

پارامتر EPS برای تمامی هسته‌های فوق در حدود انرژی $E_x(2_1^+)$ قرار داده شده است. همچنین حدس اولیه برای بعضی از پارامترهای مربوط به ایزوتوپ $^{110}_{48}Cd_{62}$ از مرجعهای [۴] و [۹] گرفته شده است. سایر پارامترها نیز از برازش داده‌های نظری با اطلاعات تجربی به دست آمده است. داده‌های تجربی نیز از مرجع [۱۰] گرفته شده است. نتایج به دست آمده در شکل‌های ۱ تا ۳ آمده است.

به منظور آن که معیار کلیتری برای مقایسهٔ داده‌های تجربی و نظری در دست داشته باشیم، در شکل ۴ داده‌های نظری را بر حسب داده‌های تجربی رسم کرده‌ایم. میزان انحراف معیار داده‌های نظری از داده‌های تجربی برابر $\sigma = 101/5 keV$ است.

ب ـ در این قسمت آهنگهای گذار چهار قطبی الکتریکی کاهش یافته $B(E2)$ را برای برخی از ترازهایی که انرژی آنها در قسمت الف آمده است، ارائه می‌دهیم. عملگر چهار قطبی الکتریکی در مدل IBM−1 با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
T(E2) &= E2SD(s^\dagger \tilde{d} + d^\dagger s)^{(2)} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}} E2DD(d^\dagger \tilde{d})^{(2)},
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

که پارامتر $E2DD$ همان پارامتر CHQ جدول۲ است. مقادیر پارامتر $E2SD$ نیز در جدول ۳ آمده است. نتایج به دست آمده در جدول ۴ ارائه شده است. در هر مورد که دادهٔ تجربی در دسترس بوده است در کنارمحاسباتمان آورده‌ایم. همچنین به منظور ارزیابی کارآیی مدل، محاسبات انجام شده برای ایزوتوپهای Cd و Te که در چارچوب IBM−2 (مدلی که در آن، بین بوزونهای پروتونی و بوزونهای نوترونی تفاوت در نظر گرفته می‌شود) انجام شده است [۱۱] را آورده‌ایم.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

ایزوتوپهای سبک Cd با $Z=48$ و $N=60-68$ به علت اثرات پوستهٔ بستهٔ $Z=50$، در انرژیهای پایین غالبا کروی هستند و انرژیهای برانگیختگی آنها در این حالت با تقریب خوبی از پیش‌گوییهای یک نوسانگر چهار قطبی کروی، $U(5)$، پیروی می‌کند.

داده‌های تجربی برای ایزوتوپهای Cd، با پیش‌بینیهای $IBM-1$ کاملا سازگاراست و برانگیختگیهای چهار قطبی در این ایزوتوپها دیده می‌شود. در واقع وضعیت تقارنی این ایزوتوپها به حد $U(5)$ خیلی نزدیک است. در ایزوتوپها Te نیز وضعیت تقریبا به همین صورت می‌باشد، به جز این که در این ایزوتوپها دوپروتون در بالای پوستهٔ بسته می‌باشد. در ایزوتوپهای Sn نیز انتظار داریم که وضعیت تقریبا به همین صورت باشد، به جز این که انتظار داریم در این ایزوتوپها برانگیختگیهای انرژی پایین کاملا ناشی از بوزونهای نوترونی Cd و Te علاوه بر بوزونهای نوترونی باشد (پوستهٔ پروتونی بسته است)، در حالی که در ایزوتوپهای Cd و Te علاوه بر بوزنهای نوترونی،تک بوزون پروتونی نیز

جدول ۲. مقادیر پارامترهای به کار برده شده برای ایزوتوپهای کادمیم، قلع و تلور.

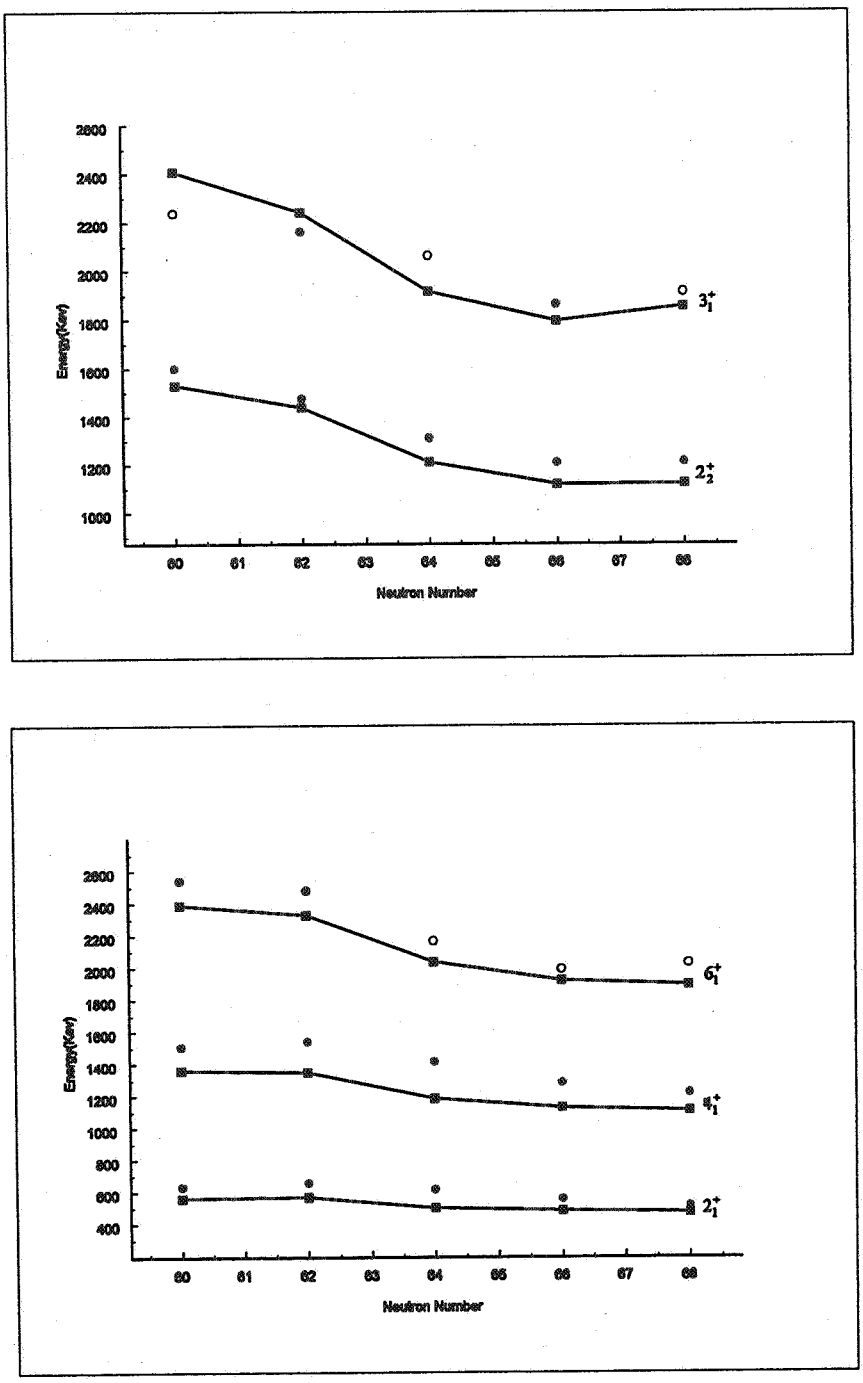
ایزوتوپ	EPS	ELL	QQ	CHQ	OCT	HEX	تعداد بوزونها
Cd(N=۶۰)	/۹۰۴۴	/۰۰۵۴	-/۱۰۰۰	-۱/۴۹۰۳	-/۰۰۹۰	-/۰۰۰۲	۶
N=۶۲	۱/۰۴۶۱	/۰۰۴۸	-/۰۸۱۷	-۱/۳۴۸۵	-/۰۰۹۳	-/۰۰۸۸	۷
N=۶۴	/۹۷۰۰	/۰۰۳۳	-/۰۶۶۷	-۱/۰۱۳۶	-/۰۰۵۸	-/۰۱۱۰	۸
N=۶۶	/۹۶۲۰	/۰۰۱۹	-/۰۵۷۸	-/۷۶۷۶	-.۰۰۳۸	-/۰۱۱۷	۹
N=۶۸	/۷۹۸۰	/۰۰۱۰	-/۰۶۶۷	-/۶۰۳۷	-.۰۰۰۷	-/۰۰۵۵	۸
Sn(N=۶۰)	۱/۲۲۸۰	/۰۰۴۵	-/۰۰۳۵	-/۶۰۰۰	-/۰۰۹۳	-/۰۰۸۸	۵
N=۶۲	۱/۲۳۲۰	/۰۰۵۰	-/۰۰۱۴	-/۶۵۰۰	-/۰۰۸۰	-/۰۱۵۵	۶
N=۶۴	۱/۱۳۰۱	/۰۰۴۷	-/۰۰۱۳	-/۶۵۰۰	-/۰۱۴۹	-/۰۱۷۰	۷
N=۶۶	۱/۳۹۵۰	/۰۰۹۲	-/۰۰۱۰	-/۶۵۰۰	-/۰۱۴۸	-/۰۲۰۰	۸
N=۶۸	۱/۲۳۲۰	/۰۰۵۰	-/۰۰۱۴	-/۶۵۰۰	-/۰۰۸۰	-/۰۱۵۵	۷
N=۷۰	۱/۲۲۱۰	/۰۰۵۰	-/۰۰۱۳	-/۷۰۰۰	-/۰۰۵۴	-/۰۱۵۳	۶
N=۷۲	۱/۳۱۹۰	/۰۰۵۴	-/۰۰۱۳	-/۷۵۰۰	-/۰۰۷۸	-/۰۱۵۰	۵
Te (N=۶۲)	۱/۰۴۳۹	/.۰۰۲۴	-.۰۴۳۱	-۲,۶۹۰۱	-/۰۰۸۳	-/۰۱۰۵	۷
N=۶۴	/۹۸۰۰	/۰۰۲۳	-/۰۳۳۳	-۲/۳۵۵۳	-/۰۰۷۲	-/۰۱۱۸	۸
N=۶۶	/۹۴۰۰	/۰۰۱۵	-/۰۳۱۱	-۲/۱۰۹۳	-/۰۰۳۸	-/۰۱۲۴	۹
N=۶۸	/۸۲۴۱	/۰۰۰۹	-/۰۳۳۳	-۱/۹۴۵۴	-/۰۰۱۸	-/۰۰۶۵	۸
N=۷۰	/۷۳۹۴	/۰۰۰۸	-/۰۴۲۹	-۱/۵۶۵۲	-/۰۰۰۴	/۰۰۰۶	۷

در انرژیهای برانگیختگی نقش دارد.

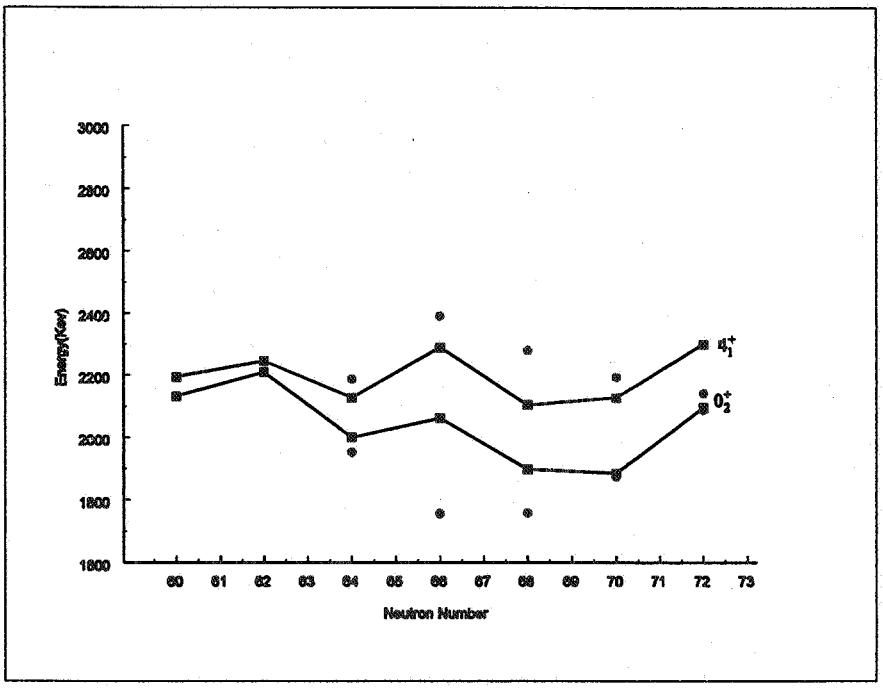
چند تراز 2^+ و 4^+ در محدودهٔ ۲ تا $3MeV$ در چارچوب IBM-۱ برای ایزوتوپهای قلع قابل توصیف نیستند. با بررسی شواهد تجربی برای ایزوتوپهای مجاور ، مانند ایزوتوپهای ایندیم $(Z=49, N=113-119)$ و همین‌طور ایزوتوپهای A فرد قلع مانند $^{111}_{50}Sn_{61}$ می‌توان دریافت که انرژی لازم جهت برانگیزش جفت نوکلئون از پوستهٔ $Z=50$ حدود $2\ MeV$ است. به بیان دیگر محاسبات با فرض پایسته بودن بوزونها انجام شده است، حال آن که از حدود انرژی $2MeV$ دو بوزون به تعداد بوزونها افزوده می‌شود. لازم به ذکر است که این موضوع در مورد ایزوتوپهای Cd نیز دیده شده است [۱۱]. در این مورد نیز دو تراز 0^+ و 2^+ در نزدیکی انرژی برانگیختگی ارتعاشات دو فونونی به وسیلهٔ IBM-2 قابل توصیف نبودند. منشأ این ترازها نیز ناشی از برانگیختگی جفت پروتون زیر پوستهٔ $Z=50$ و رفتن آنها به پوستهٔ بعدی می‌باشد.

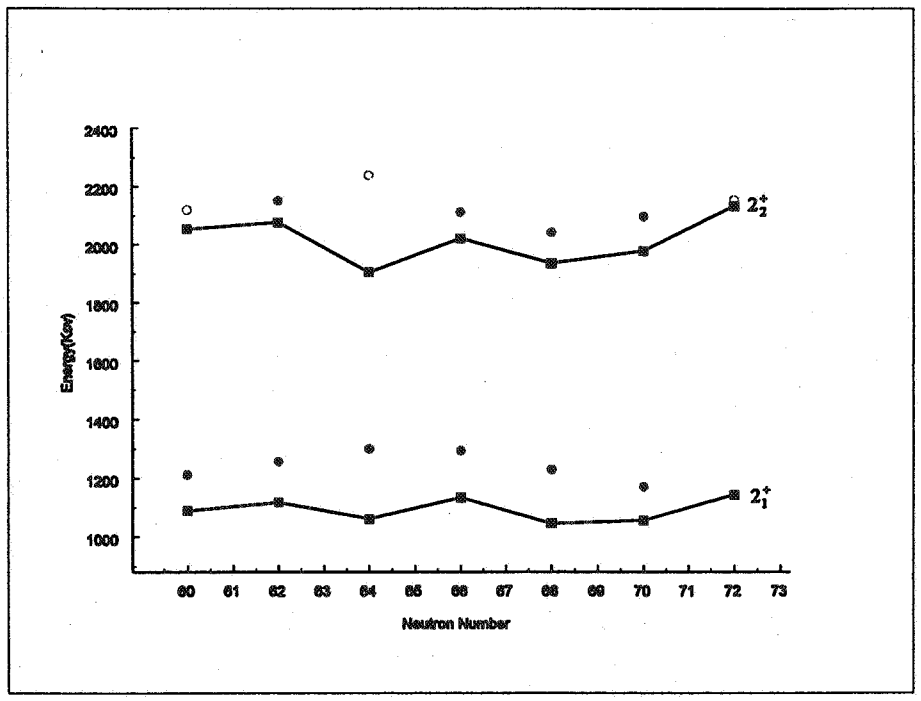
در مجموع از این محاسبات می توان این نتایج را بیان کرد:

۱- تقریبا در تمامی این ایزوتوپها برانگیختگیهای چهار قطبی دیده می‌شود، و تقارن آنها به حد $U(5)$ نزدیک است.

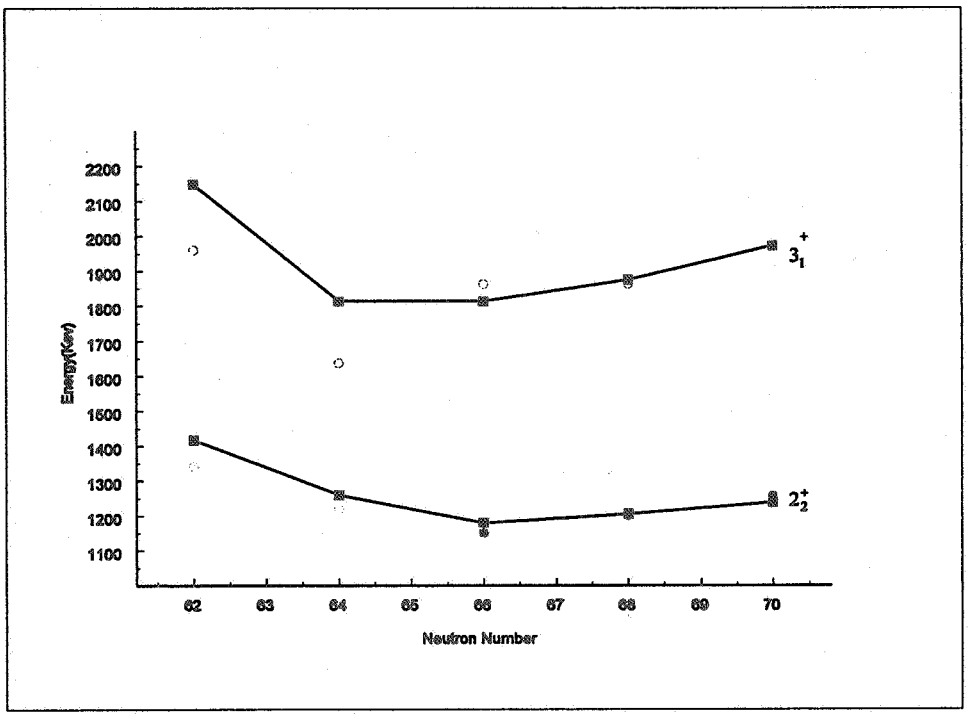


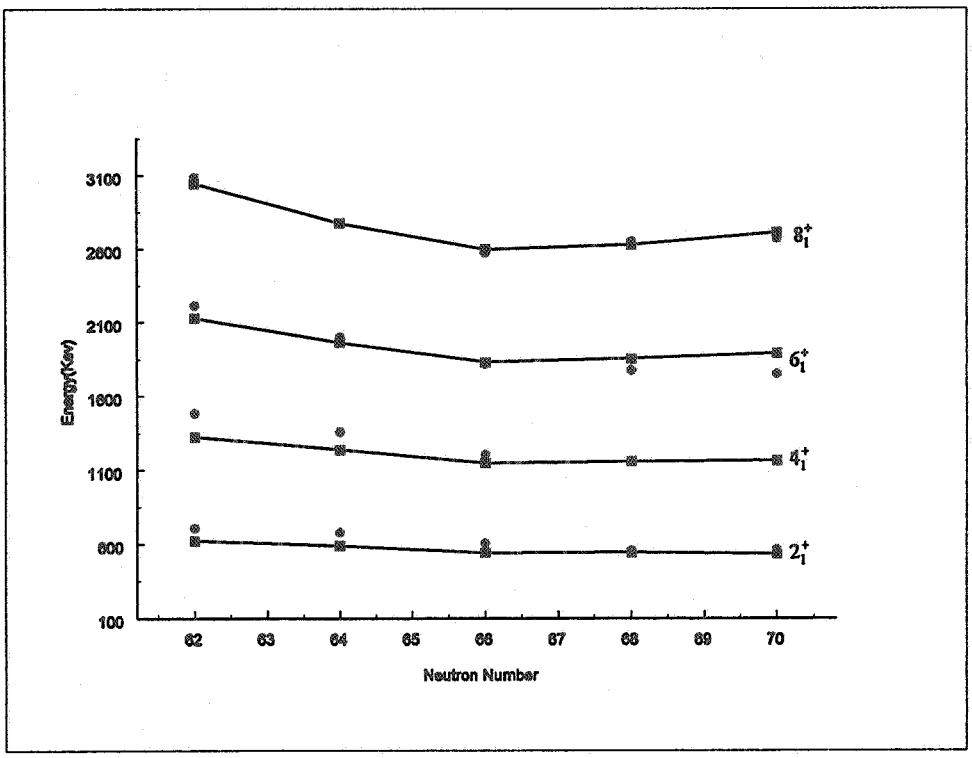
شکل۱. مقایسهٔ ترازهای نظری وتجربی در ایزوتوپهای کادمیم- نقاط به هم متصل شده: داده‌های نظری، نقاط پر: مقادیر تجربی که با قطعیت گزارش شده‌اند، نقاط توخالی: داده‌هایی که با قطعیت گزارش نشده‌اند [۱۰].



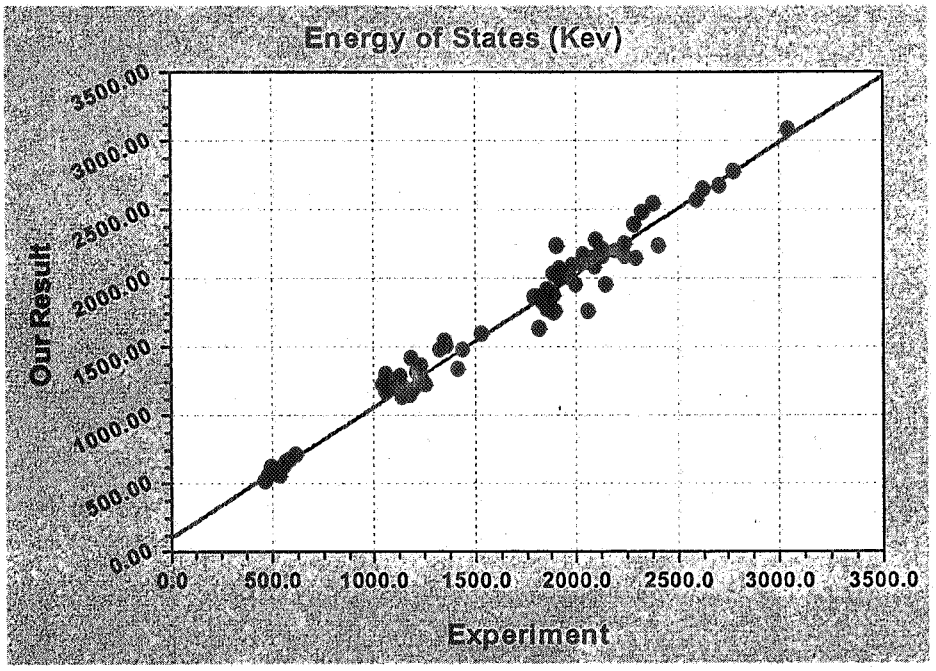


شکل۲. مقایسهٔ ترازهای نظری وتجربی در ایزوتوپهای قلع ـ نقاط به هم متصل شده: داده‌های نظری، نقاط پر: مقادیر تجربی که با قطعیت گزارش شده‌اند، نقاط تو خالی: داده‌هایی که با قطعیت گزارش نشده‌اند [۱۰].





شکل۳. مقایسهٔ ترازهای نظری و تجربی در ایزوتوپهای تلور ـ نقاط به هم متصل شده: داده‌های نظری، نقاط پر: مقادیر تجربی که با قطعیت گزارش شده‌اند، نقاط توخالی: داده‌هایی که با قطعیت گزارش نشده‌اند [۱۰].



شکل۴. انرژی ترازها ـ داده‌های نظری (نتایج ما) بر حسب داده‌های تجربی.

جدول۳. مقادیر پارامتر EtSD.

ایزوتوپ	Cd(N=۶۰)	Cd(N=۶۲)	Cd(N=۶۴)	Cd(N=۶۶)	Cd(N=۶۸)	Sn(N=۶۶)	Sn(N=۶۸)	Sn(N=۷۰)	Sn(N=۷۲)	Te(N=۷۰)
EtSD	۰/۹۵	۰/۸۵۲	۰/۸۰۴۵	۰/۷۸۵	۰/۸۸۵	۰/۴۲۵	۰/۵۰۴۸	۰/۷۱۳۱	/۸۴۷۸	۱/۱۲۵۷

جدول۴. مقادیر $B(E2)$ بر حسب $10^{-2}e^2b^2$.

ایزوتوپ	$B(E2;2_1^+ \to 0_1^+)$ Exp, Our result, IBM۲	$B(E2;2_2^+ \to 0_1^+)$ Exp, Our result, IBM۲	$B(E2;4_1^+ \to 2_1^+)$ Exp, Our result, IBM۲	$B(E2;2_2^+ \to 2_1^+)$ Exp, Our result, IBM۲
Cd(N=۶۰)†	۸/۹±/۳ , ۹/۰ , ۹/۱	---, ۰/۲۳ , ---	۱۲/۵±۱/۲, ۱۳/۶۶ , ۱۳/۷	۵/۶±,۶ , ۶/۲۷ , ۸/۵
N=۶۲*	۸/۱۱ , ۹/۸ , ۹/۹	۰/۳۹۷ , ۰/۲۴ ,---	۱۳/۷ , ۱۵/۴ , ۱۵/۷	۸/۸۴ , ۱۰/۳ , ۷/۷
N=۶۴*	۹/۱۶ , ۹/۷۸ , ۱۰/۳	۰/۱۸ , ۰/۱۷۷ , ۰ /۰۲	۱۸/۵ , ۱۵/۲۶ , ۱۷/۴	۴/۵۸ , ۹/۱۶ , ۱۲/۳
N=۶۶*	۹/۶۲ , ۱۰/۹۵ , ۱۱/۹	۰/۱۵, ۰/۱۴۵ , ۰ /۰۰۲	۲۰/۷۸, ۱۷/۱ , ۲۰/۴	۸,۸۵ , ۱۲/۳ , ۱۴/۰
N=۶۸*	۹/۱۶ , ۱۰/۸۳ , ۱۰/۷	۰/۵۴, ۰ /۰۸۸ ,---	۱۸/۱۲ , ۱۷/۱۷ , ۱۷/۹	۱۰/۶۶ , ۱۳/۳ , ۱۵/۱
Sn(N=۶۶) ‡	۳/ ۶۸, ۱/۴۵ , ---	--- ,/۰۰ ,---	۲/۵۴ , ۲/۵۴ , ---	۲/۵۴ , ۲/۵۴ , ---
N=۶۸ ‡	۴/۰۸ , ۱/۸ ,---	--- ,/۰۰ , ---	≤۲/۶ , ۳/۰۸ , ---	≤۳/۵۷ , ۳/۰۸ , ---
N=۷۰ ‡	۳/ ۷۸, ۳/۰۷ , -- -	--- ,/۰۰ , ---	۴/۲ (+۳/-۱/۷), ۵/۱۱ , ---	۶(+۲/۷/-۲/۳) , ۵/۱۱, ---
N=۷۲ ‡	۳/۶۷, ۳/۶۱ , ---	--- , /۰۰ , ---	۴/۴۲ , ۵/۷۷, ---	۷/۱ , ۵/۷۷ ,---
Te(N=۷۰)†	۱۳/۲±۱, ۱۲/۷۳, ۱۲/۷	--- ,/۱۴ , ---	۱۹/۵±۴/۹ , ۲۰/۷ , ۱۹/۹	۱۷/۱±۴/۱ , ۱۵/۶ , ۱۵

† داده‌های تجربی استخراج شده از مرجع [۱۱]، * داده‌های تجربی استخراج شده از مرجع [۱۲] ، ‡ داده های تجربی استخراج شده از مرجع [۱۳]

۲- هرچه تعداد نوکلئونها نسبت به پوستهٔ بسته زیادتر باشد، توصیف آن هسته در چار چوب مدل بهتر صورت می گیرد. به عبارت دیگر این مدل برای شکل‌بندیهای دور از پوستهٔ بسته مناسبتر است.

۳- در محاسبات ترازهای انرژی پایین IBM-1 کارآیی خوبی دارد.

مراجع

1. A Arima and F Iachello, *Phys. Rev. Lett.* 35 (1975) 1069.
2. S Kuyucak , Frontiers in Nuclear Physics *(World Scientific* , 1999) .
3. R F Casten and D D Warner, *Rev. Mod. Phys.* 60 (1988) 389.
4. F Iachello and A Arima, The Interacting Boson Model *(Cambridge University Press, Cambridge* 1987).
5. O scholten, Interacting Boson - Boson and Boson - Fermion Systems *(World Scientific,* 1984) .
6. K Langanke, J A Maruhn and S E Koonin, Computational Nuclear Physics 1- Nuclear Structure *(Springer - Verlag, Berlin and Heidelberg* , 1991) .
7. A Arima and F Iachello, *Ann. Phys.* 99 (1976) 253.
8. B Bayman and A Lande, *Nucl. Phys.* 77 (1966) 1.
9. G de Angelis et al , *Phys. Rev.* C 60 (1999) 014313-1.
10. R B Firestone and V S Shirley, *Table of Isotopes,* Vol.1, 8th ed. (*Wiley*, 1996).
11. M Sambataro, *Nucl. Phys.* A 380 (1982) 365.
12. J Kotila, J Suhonen and D S Delion, *Phys. Rev. C* 68 (2003) 014307.
13. L I Gover, A M Demidov and I V Mikhailov, *Sov. J Nucl.Phys.* 53 (1991) 1.