مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۸، شمارهٔ ۱، بهار ۱۳۸۷

مطالعهٔ حالت شوک روی درخت کیلی به وسیلهٔ روش بازهٔ پُر

لاله فرهنگ متین

دانشگاه الزهرا، گروه فیزیک، تهران

(دریافت مقاله: ۸۶/۳/۱۶ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۸۷/۲/۷)

چکیده

عمومی‌ترین مدل پخش و بر هم‌کنش روی درخت کیلی، با برهم‌کنش نزدیکترین همسایگی ارائه می‌شود و حالت شوک روی درخت کیلی تعریف می‌گردد. با فرض این‌که هر جایگاه بانزدیکترین همسایگیهایش حق برهم‌کنش دارد، حالت شوک مطالعه می‌گردد. این مدل توسط روش بازه– پُر به‌طور دقیق حل‌خواهد شد. معادلهٔ تحول زمانی آن بسته است و نتایج حاصل از بررسی این مدل در حالت پایا به صورت شبکهٔ کاملاً پر خواهد بود. همچنین این مدل در حالت دینامیکی نیز بررسی خواهد شد و طیف هامیلتونی متناظرش گسسته خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: درخت کیلی، پخش و برهم‌کنش، روشِ بازه– پر، حالت شوک

۱. مقدمه

به تازگی در توجه زیادی به حالت شوک در مدلهای پخش و برهم‌کنش یک بعدی معطوف شده است[۱-۷]. نتایج دقیق حاصل از بررسی حالت شوک در مدلهای پخش و برهم‌کنش یک بعدی و همچنین نتایج حاصل از شبیه‌سازی و محاسبات عددی مربوطه، در مقالهٔ [۶] یافت می‌شود. در مقالهٔ [۸]، عمومی‌ترین مدل پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی با برهم‌کنش نزدیکترین همسایگی معرفی و به‌طور دقیق با روش بازه خالی حل شده است و حلهای پایا و دینامیکی آن مورد بحث قرار گرفته است.

در این مقاله در ابتدا سیستمهای تصادفی و سیستمهای پخش و برهم‌کنش و سپس حالت شوک معرفی می‌شوند و در ادامه، حالت شوک روی درخت کیلی با برهم‌کنش نزدیکترین همسایگی مطالعه می‌گردد و در آخر، این مدل توسط روش بازه– پر در حالت پایا و دینامیکی حل می‌شود.

۲. سیستمهای تصادفی

اگر یک سکه را بیاندازیم ممکن است شیر یا خط بیاید. معین کردن حالت سکه قبل از انداختن سکه با داشتن شرایط اولیه دقیق امکان‌پذیر است، اما تعیین شرایط اولیهٔ سکه عملاً کار آسانی نیست. قبل از انداختن سکه می‌توان راجع به احتمال آمدن شیر یا خط صحبت کرد. مثلاً اگر سکه سالم و متقارن باشد احتمال آمدن شیر $\frac{1}{2}$ و احتمال آمدن خط نیز $\frac{1}{2}$ است. به چنین سیستمهایی که تحولشان تصادفی است و با احتمال توصیف می‌شود، سیستمهای تصادفی می‌گوییم. منظور از تحول سیستم، تغییر حالت آن با گذشت زمان است. تحول سیستم می‌تواند زمان پیوسته یا زمان گسسته باشد. مثلاً برای سکه، هر بار انداختن سکه را می‌توانیم یک پلهٔ زمانی در نظر بگیریم و تحول آن را به صورت زمان گسسته توصیف کنیم. سکه یک سیستم تصادفی دو حالتی است (شیر و خط). یک شبکه در نظر بگیرید. هر جایگاه می‌تواند پر یا خالی باشد. پُر و خالی بودن

هر جایگاه، دو حالتی است که هر جایگاه می‌تواند به خود بگیرد. تاس نیز یک سیستم تصادفی شش حالتی است. یک سیستم تصادفی N حالتی در هر زمان با احتمال $P_i\ (t)$ در حالت i ام اش است. توجه داریم که همواره:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i\left(t\right)=1.$$

۳. سیستمهای پخش و برهم‌کنش

یک دسته از سیستمهای تصادفی، سیستمهای پخش و برهم‌کنش هستند. در این سیستمها تعدادی ذره از یک یا چند نوع، روی یک شبکه یا پیوستار حرکت می‌کنند و پخش می‌شوند و به دلیل برهم‌کنش با یکدیگر تعدادشان ممکن است تغییر کند. علاوه بر برهم‌کنش دو جایگاهی که می‌تواند منجر به تغییر تعداد ذرات شود، ورود و خروج ذره از مرزهای سیستم هم می‌تواند تعداد ذرات را تغییر دهد.

٤. شبکهٔ دو جایگاهی

ساده‌ترین مثال، شبکهٔ دو جایگاهی است، با این فرض که هر جایگاه یا خالی است یا حداکثر با یک ذره پـُر است. این که فقط یک ذره جایگاه را اشغال می‌کند، موسوم به فرآیند طرد است. اگر تنها پـُر و خالی بودن جایگاه مورد نظر باشد برای هر جایگاه ۲ حالت وجود دارد، اما اگر نوع ذرهٔ اشغال کننده هم مهم باشد، در این صورت بسته به نوع ذرهٔ درون جایگاه حالتهای متفاوتی خواهیم داشت. با فرض ۲ حالتی بودن هر جایگاه، شبکهٔ ما یک سیستم ۴ حالتی خواهد بود. این ۴ حالت با فرآیندهای گذار که تعداد آنها در کلی‌ترین حالت ۱۲ فرآیند است، به یکدیگر تبدیل می‌شوند. فرآیندهای ذکر شده و نرخهای مربوطه ω_{ij} عبارتند از:

۱- پخش به راست (Diffusion to the right) $\omega_{23}: \bullet\circ \to \circ\bullet$

۲- پخش به چپ (Diffusion to the left) $\omega_{32}: \circ\bullet \to \bullet\circ$

۳- انعقاد به راست (Coalescence to the right) $\omega_{24}: \bullet\bullet \to \circ\bullet$

۴- انعقاد به چپ (Coalescence to the left) $\omega_{34}: \bullet\bullet \to \bullet\circ$

۵- اشتقاق به راست (Branching to the right) $\omega_{43}: \bullet\circ \to \bullet\bullet$

۶- اشتقاق به چپ (Branching to the left) $\omega_{42}: \circ\bullet \to \bullet\bullet$

۷- خلق در راست $\omega_{21}: \circ\circ \to \circ\bullet$

۸- خلق در چپ $\omega_{31}: \circ\circ \to \bullet\circ$

۹- فنا در راست $\omega_{12}: \circ\bullet \to \circ\circ$

۱۰- فنا در چپ $\omega_{13}: \bullet\circ \to \circ\circ$

۱۱- خلق $\omega_{41}: \circ\circ \to \bullet\bullet$

۱۲- فنا $\omega_{14}: \bullet\bullet \to \circ\circ$

۵. شوک

۵. ۱. بردار احتمالِ شبکهٔ L جایگاهی

۵. ۱. ۱. بردار احتمال

یک شبکهٔ L جایگاهی در نظر می‌گیریم، هر جایگاه یا خالی است و یا حداکثر با یک ذره پـُر است. همهٔ ذرات در شبکه همنوع هستند و آنها را A می‌نامیم. $\left|0\right\rangle$ به حالت خالی و $\left|1\right\rangle$ به حالت پـُر یک جایگاه نسبت داده می‌شود. $\left|0\right\rangle$ و $\left|1\right\rangle$، پایهٔ فیزیکی فضای‌برداری جایگاه مورد نظر را تشکیل می‌دهند:

$$\left|0\right\rangle=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\ ,\ \left|1\right\rangle=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

اگر احتمال حضور ذره در جایگاه i ام ρ_i باشد، حالت جایگاه i ام که با u_i نشان داده می‌شود، به صورت زیر است:

$$u_i=\rho_i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\left(1-\rho_i\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\rho_i\\ \rho_i\end{pmatrix}$$

شبکهٔ مورد نظر، یک سیستم 2^L حالتی است که حالتهایش با $E_i\left(i=1,2,\ldots,2^L\right)$ نشان داده می‌شود. در حالت کلی بردار احتمال سیستم ترکیبی خطی از E_i ها است.

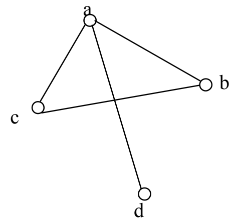
$$\left|P\right\rangle=\sum_{i=1}^{2^L} P^i\,E_i\ ,$$

P^iها اعداد حقیقی نامنفی هستند و در کلی‌ترین حالت تنها قیدی که بین آنها وجود دارد، این است که:

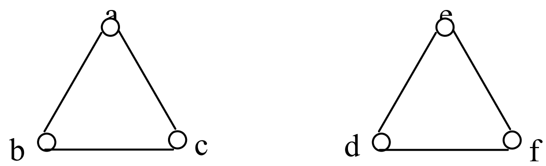
$$\sum_{i=1}^{2^L} P^i=1$$

۵. ۲. حالت‌های برنولی و شوک در شبکهٔ L جایگاهی

فرض کنید P^i ها به گونه‌ای باشند که بردار احتمال سیستم،



شکل ۱. گراف



شکل ۳. گراف ناهمبند.

حاصل‌ضرب تانسوری بردار احتمال تک تک جایگاهها باشد. این حالت، حالت خاصی است که در آن قیدهای بیشتری بین P^iها برقرار است، به طوری که $|P\rangle$ حاصل‌ضرب تانسوری L بردار دو بعدی است. اگر احتمال حضور ذره در جایگاه i ام ρ_i باشد، حالت مورد نظر به شکل زیر است:

$$|P\rangle = \bigotimes_{i=1}^{L} u_i ,$$

در این صورت:

$$\langle n_i \rangle = \rho_i ,$$

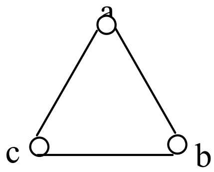
و توابع N نقطه‌ای حاصل‌ضرب N تابع تک نقطه‌ای خواهند بود، یعنی حضور ذره در هر جایگاه مستقل از جایگاههای دیگر است و به عبارتی همبستگیِ n_i ها صفر هستند.

$$\langle n_i n_j \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle = \rho_i \rho_j ,$$
$$\langle n_i n_j n_k \rangle = \langle n_i \rangle \langle n_j \rangle \langle n_k \rangle = \rho_i \rho_j \rho_k .$$
$$\vdots$$

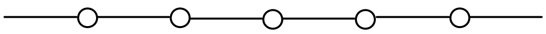
در این وضعیت اگر احتمال حضور ذره در همهٔ جایگاهها برابر با مقدار ρ باشد، بردار احتمال سیستم را حالت برنولی می‌گوییم و آن را با $|P\rangle_B$ نشان می‌دهیم.

$$P_n^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon}(t) \left[b(t) \right]^{n-1} .$$

اگر احتمال حضور ذره در m جایگاه اول ρ_1 و در بقیهٔ



شکل ۲. مدار بسته به طول ۳.



شکل ۴. نمایشی از درخت کیلی با ۲= ξ، شبکهٔ یک بعدی.

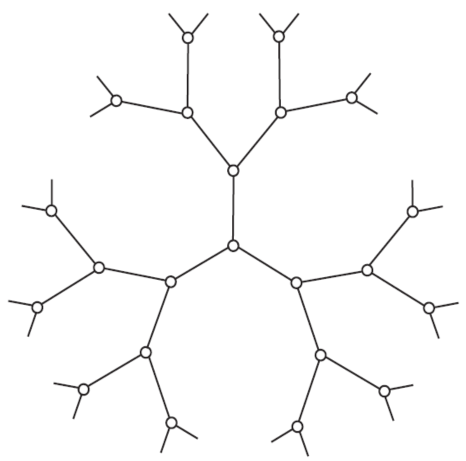
جایگاهها ρ_2 باشد، بردار احتمال سیستم را که به حالت شوک موسوم است با e_m نشان می‌دهیم.

$$e_m(\rho_1, \rho_2) = u^{\otimes m} \otimes v^{\otimes (L-m)} ,$$
$$u = \begin{pmatrix} 1-\rho_1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} , \quad v = \begin{pmatrix} 1-\rho_2 \\ \rho_2 \end{pmatrix} .$$

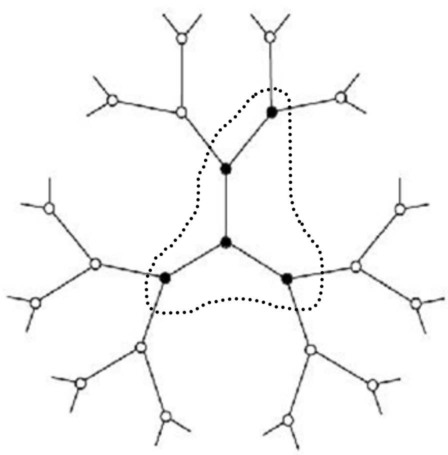
٦. حالت شوک روی درخت کیلی

گراف از مجموعه‌ای از رأسها و یالها تشکیل می‌شود، V معرف رأس و E معرف یال است. به‌طور مثال، شکل ۱ یک گراف است: که a ، b ، c و d رأسها هستند و ab ، ac ، cb و ad یالها هستند.

منظور از مدار در شکل ۲ مشخص می‌شود: که به آن مدار بسته به طول ۳ گفته می شود. چنانچه در یک گراف، بین هر دو رأس حداقل یک مسیر داشته باشیم، آن گراف را همبند می‌گویند مانند شکل ۲. اما در شکل ۳ هر دو گراف به طور مستقل همبند هستند، اما از آنجا که بین رأسهای c و d مسیری وجود ندارد، در کل تشکیل یک گراف همبند نمی‌دهند و به آن ناهمبند می‌گویند. درخت به عنوان گرافی همبند، که فاقد دور است تعریف می‌شود. در این بخش مدلهای پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی بررسی خواهد شد. درخت کیلی با عدد ξ از یک گره اصلی شروع می‌شود که ξ همسایه به آن وصل هستند، هر همسایه خودش ξ همسایه دارد و در درخت کیلی مدار بسته‌ای وجود ندارد(شکل ۴).



شکل ۵. نمایشی از درخت کیلی با $\xi=3$.



شکل ۶. درخت کیلی با $\xi=3$ و $n=5$

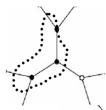
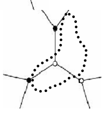
و درخت کیلی با $\xi=3$، به صورت زیر است (شکل ۵):
دو جایگاه روی درخت کیلی هرگاه توسط یک رابط به یکدیگر وصل شوند، همسایه نامیده می‌شوند، در اینجا پـر(خـالی) بـا • (∘) نشان داده می‌شود.

درخت کیلی با عدد $\xi \geq 3$ را در نظر بگیـرید. بـه هـر گـره روی درخت کیلی یک جایـگاه نـسبت داده مـی‌شـود. چنانچـه خوشهٔ nتایی از جایگاهـهای متصل به هم، روی درخت کیلـی، با احتمال $\rho=1$ پـُر باشـند و بقیـهٔ جایگاههـای روی درخـت کیـلی خالـی باشـند، آنگـاه به این آرایش خـاص روی درخـت کیلی، حالت شـوک مـی‌گویند(شکل ۶).

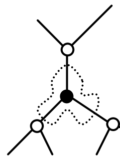
به طور کلی تغیرات ناپیوستهٔ چگالی، به‌طـور مرسـوم حالتِ شوک نامیده مـی‌شـود. بـرای مثـال بـرای$\xi=3$، تـابعِ احتمالِ وابسته به زمانِ $P_n(t)$، معرف احتمال آن اسـت کـه یـک مجموعهٔ n تایی متصلِ به هم در زمان t روی درخت کیلی پـُـر و بقیهٔ شبکه خالی باشد.

در اینجا تحول زمانی تـابع احتمـال وابـسته بـه زمـان $P_n(t)$ بررسی خواهد شد. به عبارت دیگـر شـوک هماننـد خوشـه در درخت کیلی است و بررسـی تحـول خوشـه در درخـت کیلـی مورد نظراست. در ابتدا باید معادلهٔ تحول زمانی مربوط به چنین آرایشی نوشته شود. معادلهٔ تحول به شرط آن که کلیـهٔ جمـلات این معادله را بتوان بر حسب P_nها بیان نمود، بسته خواهد بود.

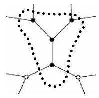
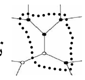
تعدادی از برهم‌کنشها، معادلـهٔ تحـول زمـانی را بـسته نگـه نخواهند داشت، برای مثال برهم‌کنشی بـه صـورت $\circ\circ \to \bullet\bullet$ ، سبب می‌شود داخل خوشهٔ n تایی از جایگاههـای پـُـر بـه هـم متصل، جایگاههای خالی ایجاد شود کـه دیگـر تعریـف اصـلی شوک را نقض می‌کند و این آرایشهای خاص بـر حـسب P_nهـا قابل بیان نمی‌باشند. از میان دوازده بـرهم‌کـنشی کـه بـه عنـوان برهم‌کنشهای مجاز بین دو جایگاه مجاور به هم، معرفی شد، ده برهم‌کنش به شرح زیر غیر مجازند:

برهم‌کنـشهای $\circ\circ \to \bullet\circ$ و $\circ\circ \to \circ\bullet$ غیرمجازنـد، زیـرا آرایشی مانند  یا به طور کلی آرایش $(\bullet \cdots \bullet\bullet)$ به آرایـش  یـا بـه طـور کلـی $(\bullet\circ \cdots \bullet\bullet)$ تبـدیل می‌گردد. این برهم‌کنشها سبب شده‌اند شبکهٔ پیوسته‌ای کـه شامل n جایگاه متصل بـه هـم و پـُـر بـود بـه دو قـسمت بشکند و دیگر مفهوم شوک برقرار نمی‌باشـد، زیـرا شـوک در شبکه‌ای قابل تعریف بود که یک ناحیه با یـک چگـالی ρ_1 پـُر باشد و بقیهٔ شبکه بـا چگـالی ρ_2 خـالی باشـد. در نتیجه دیگر معادلهٔ مادر بسته نمـی‌مانـد و برحـسب P_nهـا قابل بیان نمی‌باشد. برای نوشتن معادلهٔ تحول زمـانی $P_n(t)$ باید برهم‌کنشهایی را انتخاب کنیم که یک مجموعـهٔ کـاملاً پـُر را به یک مجموعهٔ پـُر بزرگتر یا کوچکتر تبدیل کند.

همچنین برهم‌کنشهای $\circ\circ \to \bullet\bullet$ ، $\bullet\circ \to \bullet\bullet$ و $\circ\bullet \to \bullet\bullet$ غیـر



شکل ۷. درخت کیلی با ۳= ξ و n=۱.

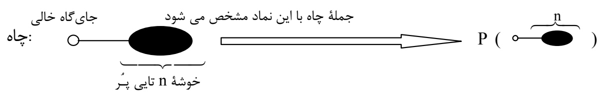
قابل قبول هستند، زیرا مجموعهٔ n تایی متـصل بـه هـم و پـُـر (•• · · · •) را به آرایشهایی به ترتیب، بـه صـورت (••○○•• · · · •) و یا (••○•• · · · ••) تبدیل می‌کنند که باز مشکل فوق تکرار می‌شـود. برهم‌کنشهای ○• → ○○ و •○ → ○○ ، غیـر قابـل قبـول هـستند، زیرا آرایش (•• · · · •) را به آرایش (••○•• · · · ••) تبدیل مـی‌کنـد و همچنین بـرهم‌کنـشهای ○• → •○ و •○ → ○• غیرمجازنـد زیـرا برای مثال آرایش یـک پارچـهٔ  بـه آرایـش دو پارچـهٔ  تبدیل می‌شود.

و در آخر، برهم‌کنش •• → ○○ غیرقابل قبول است. زیرا بـه طـور مثـال آرایـش (○·· · ○ ○ ○•• ··· •○ ○ · · ·○ ○) را بـه آرایـش (○·· · ○ ○ ○•• ··· •○ ○ · · · ○••○ ○ · · ·○ ○) تبدیل می‌کند.

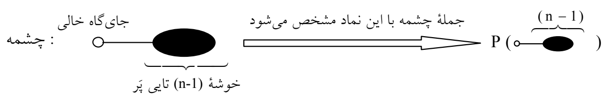
.و با توجه به توضیحات فوق تنها برهم‌کنش مجاز به شرح زیـر می‌باشد:

$$\circ\bullet \rightarrow \bullet\bullet \quad r_1 \;,$$
$$\bullet\circ \rightarrow \bullet\bullet \quad r_1 \;.$$

برای نوشتن معادلهٔ تحول زمانی، نیاز اسـت جمـلات چـشمه و چاه مشخص شود.



$P(\circ\!-\!\overset{n}{\bullet})$، معرف احتمال آن است‌که یک جایگاه خـالی به مجموعهٔ n تایی کاملاً پـُر وصل باشد.



$P(\circ\!-\!\overset{(n-1)}{\bullet})$، معرف احتمال آن است که یـک جایگـاه خـالی به مجموعهٔ (n–۱) تایی کاملاً پـُر وصـل باشـد. در نتیجـه معادلـهٔ تحول زمانی خوشه روی درخت کیلی، به صورت زیر است:

$$\frac{d P_n}{dt} = -r_1 R_n \, P(\circ\!-\!\overset{n}{\bullet}) + r_1 R_{n-1} \, P(\circ\!-\!\overset{n-1}{\bullet}) \quad (1)$$

R_n ، تعداد همسایگیهای متصل به شبکهٔ n تایی متـصل بـه هـم کاملاً پـُر می‌باشد. R_{n-1}، تعداد همسایگیهای متصل بـه شـبکهٔ (n–۱) تایی متصل به همِ کاملاً پـُر مـی‌باشـد. در نتیجـه معادلـهٔ تحول زمانی $P_n(t)$ به شکل بسته در می‌آید:

$$\frac{dP_n}{dt} = -r_1 R_n P_n(t) + r_1 R_{n-1} P_{n-1}(t) \,. \qquad (2)$$

۷. حل معادلهٔ تحول تابع احتمال Pn(t)

۷. ۱. جواب حالت ایستا

ابتدا حل ایستای معادلهٔ تحول زمانی $P_n(t)$ بررسی خواهد شـد، به طوری‌که:

$$\frac{d P_n^s}{dt} = 0$$

در نتیجه :

$$-R_n \; P_n^s + R_{n-1} \; P_{n-1}^s = 0 \quad , \qquad n > 1 \qquad (3)$$

جواب معادلهٔ فوق $P_n^s = \dfrac{C}{R_n} \, , n > 1$ می‌باشد، زیرا این پاسخ در معادلهٔ (۳) صدق می‌کند. برای تعیین ثابت C، معادلهٔ مربـوط به n=۱، بررسی می‌شود. برای نوشتن معادلهٔ تحـول n=۱ ، ابتـدا باید چشمه و چاههای مربوطـه معرفـی گـردد. شـکل ۷ حالـت ۳= ξ و n=۱ را نشان می‌دهد.

تنها جملهٔ موجود، چاه می‌باشد:

$$\text{چاه :} \quad P(\circ\!-\!\overbrace{\bullet}^{(n-1)}) \,,$$

در نتیجه:

$$\frac{d P_1(t)}{dt} = -r_1 R_1 \{ P(\circ\!-\!\overset{n=1}{\bullet}) \} \,,$$

که این معادله دارای فرم بستهٔ زیر می‌باشد:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -r_1 \, \xi \, P_1 \,,$$

حل ایستای این معادله، $P_1 = 0$ اسـت. از مقایـسهٔ پاسـخ حالـت n=۱ و n>۱، نتیجه می‌شود که C=۰ است و:

$$P_n^s = 0 \,,$$

تنها جواب قابل قبـول بـرای چنـین شـبکه‌ای در حالـت ایـستا $P_n^s = 0$ است، که این نتیجه با توجه به شرطی کـه روی نرخهـا

بود، قابل قبول است و احتمال پُر بودن هر مجموعهٔ n تایی صفر است و کل شبکه پر می‌باشد زیرا در برهم‌کنش مورد قبول، ذره خلق می‌گردد.

۷. ۲. جواب حالت دینامیکی

برای بررسی حالت دینامیکی معادلهٔ (۲)، پاسخی به صورت زیر که وابستگی زمانی آن به صورت نمایی باشد، حدس زده می‌شود:

$$P_n^{\varepsilon}(t) = P_n^{\varepsilon} e^{\varepsilon t} .$$

با جایگذاری در معادلهٔ تحول (۲):

$$\left\{r_1\left[n(\xi-2)+2\right]+\varepsilon\right\}P_n^{\varepsilon} - \left\{r_1\left[(n-1)(\xi-2)+2\right]\right\}P_{n-1}^{\varepsilon} = 0$$

به‌دست خواهد آمد.

به عنوان مثال برای n=۱.

$$\frac{dP_1}{dt} = -r_1 \xi P_1 .$$

چنانچه $P_1 \neq 0$ فرض شود و جواب حدسی $P_1^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t}$ باشد، $\varepsilon_1 = -r_1\xi$ خواهد بود. حال n=۲ بررسی می‌شود، با فرض اینکه $P_2 \neq 0$ و $P_1 = 0$:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -r_2 R_2 P_2(t) ,$$

در اینجا $\varepsilon_2 = -r_1 R_2$ به‌دست خواهد آمد. اما چنانچه فرض شود: $P_2 \to 0$ و $P_1 \neq 0$ می‌باشد، آنگاه معادلهٔ تحول مربوطه به فرم زیر است:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -r_1 R_2 P_2(t) + r_1 R_1 P_1(t) .$$

پاسخ کلی برایِ $P_2^{\varepsilon}(t)$ دارای دو جزء است، جواب خاص و جواب همگن. برای بخش همگن معادلهٔ مربوطه به شرح زیر است:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + r_1 R_2 P_2(t) = 0 ,$$

که پاسخ آن $P_2(t) = P_2^{\varepsilon_2} e \to^{r_1 R_2 t}$ است. اما برای محاسبهٔ جواب خاص، باید معادلهٔ زیر حل شود:

$$\frac{dP_2}{dt} + r_1 R_2 P_2 = r_1 R_1 P_1 e^{-r_1 R_1 t} .$$

جواب حدسی برای چنین معادله‌ای $P_2^{\varepsilon}(t) = P_2^{\varepsilon} e^{-r_1 R_2 t} + B e^{-r_1 R_1 t}$ می‌باشد، با جایگذاری این جواب حدسی در معادلهٔ فوق به‌دست خواهد آمد:

$$B = \frac{P_1 \xi}{\xi - 2} \quad , \quad \xi \geq 3$$

در نتیجه پاسخ کلی برای n=۲ به فرم زیر است:

$$P_2^{\varepsilon}(t) = P_2^{\varepsilon_2} e^{-r_1 R_2 t} + P_1^{\varepsilon_1} \frac{\xi}{\xi - 2} e^{-r_1 R_1 t} .$$

بدین ترتیب می‌توان برای محاسبهٔ ε_k و P_k، این فرآیند را ادامه داد. چنانچه جواب عمومی معادلهٔ (۲) به شرح زیر باشد:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} e^{-r_1 R_k t} \tag{4}$$

با جایگذاری معادلهٔ (۴) در معادلهٔ تحول (۲) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} A_{n,k} = \dfrac{R_{n-1}}{R_n - R_k} A_{n-1,k} & , \ k \neq n \\ A_{k,k} = P_k^{\varepsilon} & , \ k = n \end{cases} \tag{5}$$

ابتدا به چند جمله‌ای P_2 و P_3 توجه می‌شود:

$$P_2(t) = \sum_k A_{2,k} e^{-r_1 R_k t} ,$$

$$P_2(t) = A_{2,1} e^{-r_1 R_1 t} + A_{2,2} e^{-r_1 R_2 t} ,$$

$$P_2(t) = P_1^{\varepsilon} \frac{\xi}{\xi - 2} e^{-r_1 R_1 t} + A_{2,2} e^{-r_1 R_2 t} .$$

با توجه به پاسخی که در محاسبهٔ قبل برای $P_2(t)$ ارائه شد و مقایسهٔ با پاسخ فوق نتیجه می‌شود:

$$A_{2,2} = P_2^{\varepsilon} .$$

همچنین P_3 به صورت زیر است:

$$P_3 = A_{3,1} e^{-r_1 R_1 t} + A_{3,2} e^{-r_1 R_2 t} + A_{3,3} e^{-r_1 R_3 t} ,$$

$$A_{3,2} = \frac{R_2}{R_3 - R_2} A_{2,2} = \frac{R_2}{R_3 - R_2} P_2^{\varepsilon} ,$$

$$A_{3,1} = \frac{R_2}{R_3 - R_1} A_{2,1} = \frac{R_2}{R_3 - R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2 - R_1} P_1^{\varepsilon} .$$

پاسخ کلی برای P_n به شرح زیر است:

$$P_n(t) = \sum_k A_{n,k} e^{-r_1 R_k t}$$

$$= A_{n,1} e^{-r_1 R_1 t} + A_{n,2} e^{-r_1 R_2 t} + \cdots + P_n^{\varepsilon} e^{-r_1 R_n t} ,$$

به طوری‌که:

$$A_{3,1} = \frac{R_{n-1}}{R_n - R_k} \times \frac{R_{n-2}}{R_{n-1} - R_k} \times \cdots \times \frac{R_k}{R_{k+1} - R_k} \times P_k ,$$

که به صورت ساده‌تر شدهٔ زیر می‌توان $A_{n,k}$ را نمایش داد:

$$A_{n,k} = \left[\prod_{i=0}^{n-1} \frac{R_{n-(i-1)}}{R_{(n-i)} - R_k} \right] \times P_k .$$

با جایگذاری R_n (تعداد همسایگی در یک مجموعهٔ n تایی)، بـه دست خواهد آمد:

$$A_{n,k} = \left[\prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{(n-i-1)(\xi-2)+2}{(n-i-k)(\xi-2)} \right] \times P_k .$$

با استفاده از رابطهٔ $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$؛ $A_{n,k}$ به صورت زیر است:

$$A_{n,k} = \prod_{i=0}^{n-k-1} \frac{\Gamma\left(n-i-\frac{2}{\xi-2}\right)}{\Gamma\left(n-i-1-\frac{2}{\xi-2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(n-i-k)}{\Gamma(n-i-k+1)} . p_k$$

$$= \frac{\Gamma\left(n+\frac{2}{\xi-2}\right)}{\Gamma(n-k+1)\ \Gamma\left(k+\frac{2}{\xi-2}\right)} . p_k$$

از طرف دیگر جواب حدسی و خاص دیگـری نیـز بـرای حـل دینامیکی معادلهٔ تحول زمانیِ $P_n(t)$ می‌تـوان ارائـه داد، کـه ایـن پاسخ حالت خاصی از پاسخ عمومی اسـت، کـه بـرای $P_n(t)$ در روابط فوق معرفی گردید.

$$P_n^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon}(t)\ \left[b(t) \right]^{n-1} .$$

خاصیتی که این جواب خاص دارد این است که در t=۰ احتمال پیدا کـردن شـوک بـه سـایز مجموعـهٔ nتـایی بـستگی دارد. بـا جایگذاری ایـن پاسـخ خـاص در معادلـهٔ تحـول، معادلـهٔ زیـر به‌دست خواهد آمد:

$$b^{n-1}(t)\frac{d P_1^{\varepsilon}(t)}{dt} + P_1^{\varepsilon}(t)\,(n-1)\, b^{n-2}(t)\,\frac{d}{dt}\, b(t)$$
$$= -r_1 R_n P_1^{\varepsilon}(t)\, b^{n-1}(t) + r_1 R_{n-1} P_1^{\varepsilon}(t) b^{n-2}(t).$$

در نتیجه دو دسته معادله حاصل می‌شود:

$$\frac{d P_1^{\varepsilon}(t)}{dt} = 0 . \qquad (6)$$

$$(n-1)\frac{d}{dt} b(t) = \left[-r_1 R_n b(t) + r_1 R_{n-1} \right], \qquad (7)$$

پاسخ معادلهٔ (۶) : $P_1^{\varepsilon}(t) = P_1^{\varepsilon}(0)$ است و پاسخ معادلهٔ (۷):

$$P_n^{\varepsilon}(t) = P_1(0)\left[b_0\ e^{-r_1 R_n t} \right] + \frac{P_1(0)\ R_{n-1}}{R_1},$$

است که $r_1 R_n$ همان ε_n است که در بخش دینامیکی به‌دست آمد. در $t \to \infty$ ، پاسخ دینامیکی تبدیل به حالت ایستا می‌شود.

۸. نتیجه‌گیری

حالت شوک روی درخت کیلی ارائه گردید. معادلهٔ تحول زمانی تابع احتمال وابسته به زمان $P_n(t)$ (معرف احتمال آن اسـت کـه یک مجموعهٔ n تایی متصل به هم در زمان t روی درخت کیلـی پـُر و بقیهٔ شبکه خالی باشد.)، توسط روش بازه–پر به‌طور دقیق حل و بررسی شد و معادلهٔ تحول برای این سیستم به فرم بـسته درآمـد و همچنـین بـه‌طـور دقیـق حالـت پایـای چنـین مـدلی بررسی‌شد و نتیجه حاصل این است که در آرایـش حالـت پایـا، احتمال پر بودن هر مجموعـهٔ nتـایی محـدود، صـفر اسـت در نتیجه کل شبکهٔ پر می‌باشد. و بعد از بررسی حالت دینامیکی آن طیف هامیلتونی این سیـستم محاسـبه گردیـد و طیـف گسـستهٔ هامیلتونی به‌دست آمد.

قدردانی

نویسنده مقاله از راهنماییها و زحمـات اسـاتید ارجمنـد آقایـان دکتر آقا محمدی به عنوان استاد راهنما و دکتر خرمی به عنـوان استاد مشاور در دوره دکتری، کمال تشکر را دارد.

مراجع

1. B Derrida, L Lebowitz, and E R Speer, *J. Stat. Phys.* **89** (1997) 135.
2. V Popkov, and G M Schütz; *J. Stat. Phys.* **112** (2003) 523.
3. V Belistsky. and G M Schütz; Electronic Journal of Probablity **7** (2002)1.
4. K Krebs, F H Jafarpour, and G M schütz; *New Journal of Physics,* **5** (2003) 1451.
5. C Pigorsch and G M Schütz; *J. Phys.* **A33** (2000) 7919.
6. F H Jafarpour; *Physics Letters* A **326** (2004) 14-19.
7. M Arabsalmani and A Aghammohamadi; *Phys. Rev.* E **74** (2006).
8. L F Matin, A Aghamohamadi and M Khorrami; *Eur. Phys. J.* B **56** (2007) 243-246.