

کنترل پذیری در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی: مدل بخش بندی جمعیتی

زینب مردی قشلاقی و فریناز روشنی

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهراء، تهران، ایران

پست الکترونیکی: farinaz@alzahra.ac.ir

چکیده:

کنترل سیستم‌های غیرخطی و رساندن آن به حالت پایدار، یکی از موضوعات مهم در سیستم‌های پیچیده است. سیستمی کنترل پذیر است که بتوان آن را از هر حالتی به حالت مطلوب، در بازه زمانی محدود رساند. مدل بخش بندی جمعیتی یک روش استاندارد ریاضی است که برای تحلیل تحول زمانی سیستم پیچیده بکار می‌رود. سیستم غیرخطی سه بعدی با استفاده از استراتژی کنترل سیستم‌های دینامیکی چند بعدی، تبدیل کانونیک را پیشنهاد دادیم که از آن تابع کنترل به دست آمد. برای اثبات اینکه نقاط ثابت سیستم پایدار هستند از روش پایداری خطی و قضیه دایره‌های گرشگورین استفاده کردیم. با حل عددی معادلات دیفرانسیل پس از کنترل، سیستم در بازه زمانی محدود به نقاط ثابت مطلوب رسیدند. با رسم فضای حالت برای نقاط ثابت مختلف، پنج منطقه به دست آمد. نقاط ثابتی را یافتیم که تابع کنترل می‌تواند سیستم را در مدت زمان محدود به حالت پایدار برساند. نشان دادیم که بعضی از نقاط ثابت غیر فیزیکی هستند.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های پیچیده، سیستم‌های دینامیکی غیرخطی، کنترل پذیری، قضیه دایره‌های گرشگورین، مدل بخش بندی جمعیتی

۱. مقدمه

پایدار (تعادل) یا ناپایدار سیستم هستند. نوع نقاط ثابت در سیستم‌های خطی و غیرخطی با روش پایداری خطی مشخص می‌شود [۲]. مدل‌های واکنش-پخش [۳]، پخش بیماری‌های مسری [۴]، شایعه [۵] دینامیک غیرخطی دارند. کنترل پخش بیماری‌های مسری، با توجه به اثرات مخربی که بر جوامع انسانی دارند اهمیت ویژه‌ای دارد. بر اساس نظریه کنترل، یک سیستم دینامیکی کنترل پذیر است که بتوان آن را از هر حالت اولیه به هر حالت نهایی مطلوب در مدت زمان محدود رساند [۶]. در واقع هدف نهایی کنترل این است که یک سیستم از حالت فعلی اش به سمت حالت نهایی مطلوب هدایت شود. مفهوم حالت را، "رودلف کالمن" ریاضی دان در نظریه کنترل وارد کرد که همان متغیر سیستم در سیستم‌های دینامیکی است. فضای متغیر حالت

برای درک مکانیسم حاکم بر رفتار یک سیستم، باید متغیرهای آن را مشخص و سپس آن را مدل سازی کرد [۱]. یک سیستم N بعدی شامل N متغیر فضای فاز سیستم را می‌سازند. مدل سازی ریاضی، مکانیسم حاکم بر سیستم را تابع $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ معین می‌کند. دینامیک سیستم با مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل نسبت به زمان $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ بیان می‌شود. در فضای فاز دینامیک سیستم توسط مسیرهای جهت دار نشان داده می‌شود. روی این مسیر، نقاطی که در $f(x^*) = 0$ صدق می‌کنند نقاط ثابت نامیده می‌شوند و متناظر با حالت

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\alpha x(t) y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \alpha x(t) y(t) - \mu y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \mu y(t)\end{aligned}\quad (1)$$

و قید $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ وجود دارد. برای متغیرها، $0 \leq x(t), y(t), z(t) \leq 1$ را داریم. متغیر حالت $x(t)$ با آهنگ α به متغیر حالت $y(t)$ و متغیر حالت $y(t)$ با آهنگ μ به متغیر $z(t)$ تبدیل می‌شود. این معادلات دیفرانسیل به طور تحلیلی جواب ندارند و برای حل آنها از روش‌های عددی استفاده می‌شود. رابطه صریح بین $x(t), y(t)$ را با استفاده از معادلات (1) به دست می‌آید. کافی است که معادله وسط را به معادله اول تقسیم کنیم. انتگرال گیری از نتیجه به دست آمده:

$$y = 1 - x + \frac{\mu}{\alpha} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad (2)$$

با وجود قید مساله، می‌توانیم سیستم را دو بعدی در نظر بگیریم. نقاط ثابت از حل معادلات $\dot{x} = 0$ و $\dot{y} = 0$ به دست می‌آیند. در نتیجه نقاط ثابت برای این سیستم $(x^*, y^* = 0)$ و $(x^*, y^* = 0)$ هستند. برای تعیین مقدار x^* در نقطه ثابت $(x^*, y^* = 0)$ و با توجه به اینکه این نقطه ثابت باید در معادله (2) صدق کند، داریم:

$$x^* - 1 = \frac{\mu}{\alpha} \ln\left(\frac{x^*}{x_0}\right) \quad (3)$$

بنابراین x^* ریشه معادله غیر خطی (3) است. با استفاده از روش پایداری خطی، اختلال کوچک $x(t) = x^* + \varepsilon_x(t)$ و $y(t) = y^* + \varepsilon_y(t)$ حول نقطه ثابت را اعمال می‌کنیم. با توجه به اینکه هر دو نقطه ثابت روی محور x قرار دارند کافی است که اختلال را حول نقطه ثابت $(x^*, y^* = 0)$ اعمال کنیم. بسط تیلور دو متغیره حول نقطه ثابت داده و تا مرتبه اول بسط را نگه می‌داریم. دینامیک اختلال به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_x(t)}{dt} &= -\alpha x^* \varepsilon_y(t) \\ \frac{d\varepsilon_y(t)}{dt} &= (-\mu + \alpha x^*) \varepsilon_y(t)\end{aligned}\quad (4)$$

با استفاده از جبر خطی شکل ماتریسی رابطه بالا به دست می‌آید:

نیز همان فضای فاز سیستم‌های دینامیکی است که الهام گرفته از مکانیک آماری می‌باشد [1].

در بخش روش، سیستم دینامیکی سه بعدی با متغیر حالت $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ و پارامترهای سیستم α و μ و تابع غیر خطی $f = f(\mathbf{x}(t); \alpha, \mu)$ معرفی می‌شوند. متغیر حالت $x(t)$ با آهنگ α به متغیر حالت $y(t)$ تبدیل می‌شود. متغیر حالت $y(t)$ با آهنگ μ به متغیر حالت $z(t)$ تبدیل می‌شود. دینامیک سیستم به قراری است که در $\alpha > \mu$ رفتار $y(t)$ صعودی است و قله‌ای ایجاد می‌شود. در غیر این صورت $y(t)$ رفتار نزولی دارد. این سیستم در $\alpha = \mu$ آستانه گذار دارد. سیستم دارای یک نقطه ثابت پایدار است که در زمان طولانی به آن می‌رسد. ما فرض می‌کنیم حالت مطلوب ما تنها نقطه ثابت سیستم نیست. می‌خواهیم دینامیک سیستم را با ایده اولیه‌ی استراتژی کنترل سیستم‌های دینامیکی چند بعدی [7-9]، پیش از آنکه متغیر حالت $y(t)$ به قله برسد آن را به نقطه ثابت مطلوب $(x^*, y^* = 0)$ برسانیم و آن را با تابع کنترل به دست آمده از استراتژی، در این حالت نگه داریم. تبدیل کانونیکی پیشنهادی می‌کنیم که با روش تحلیلی سیستم را کنترل می‌کند. در بخش نتایج با حل عددی معادلات جدید دیفرانسیل و رسم فضای متغیر حالت سیستم نشان می‌دهیم که سیستم به سمت نقطه ثابت مطلوب می‌رود و همچنین نشان می‌دهیم که در این نقطه سیستم در حالت پایدار است. در بخش آخر جمع بندی و نتیجه گیری می‌کنیم. مدل بخش بندی جمعیتی یک روش استاندارد ریاضی است. حالت خاص سه نوع جمعیت مختلف برای تحلیل تحول زمانی در شاخه‌های مختلف ریاضی کاربرد دارد [10].

۲. روش

سیستم سه بعدی با دینامیک غیرخطی با حالت‌های $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ با معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

ماتریس $A_{n \times n} = \{a_{ij}\}$ فقط درون ناحیه بسته، شامل دایره‌های D_i در صفحه xy قرار می‌گیرند. این دایره‌ها با مرکز $C_i = a_{ii}$ و شعاع زیر هستند:

$$R_i = \sum_{j=1, i \neq j} |a_{ij}| \quad (10)$$

بنابراین قضیه، ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبی سیستم را با این روش بررسی می‌کنیم. اولین سطر ماتریس ژاکوبی مشتق از \dot{x} نسبت به متغیر x, y است. دایره D_1 ، مرکز C_1 و شعاع R_1 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_1 = 0, \quad R_1 = |-\alpha x^*| = \alpha x^* \quad (11)$$

مجموع مرکز و شعاع مثبت است $C_1 + R_1 \geq 0$ این دایره گوشگورین به طور کامل در سمت چپ دستگاه مختصات قرار نگرفته است. دومین سطر ماتریس ژاکوبی مشتق از \dot{y} نسبت به متغیر x, y است. دایره D_2 با مرکز C_2 و شعاع R_2 به دست می‌آید:

$$C_2 = \alpha x^* - \mu, \quad R_2 = 0 \quad (12)$$

شعاع دایره گوشگورین D_2 صفر است. در واقع نقطه $(\alpha x^* - \mu, 0)$ طبق شرط پایداری در تابع لیاپانوف در سمت چپ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. برای انتقال دایره گوشگورین D_2 به سمت چپ دستگاه مختصات از روش کنترل سیستم‌های دینامیکی چند بعدی [7] استفاده می‌کنیم. تبدیل کانونیکی زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$\tilde{x} = x + y, \quad \tilde{y} = y - x \quad (13)$$

از این تبدیلات نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و با استفاده از معادله (1) معادلات را بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\frac{\mu}{\nu} \tilde{x} - \frac{\mu}{\nu} \tilde{y} \quad (14)$$

$$\dot{\tilde{y}}(t) = \alpha \frac{\tilde{x}^2}{\nu} - \alpha \frac{\tilde{y}^2}{\nu} - \frac{1}{\nu} \mu \tilde{x} - \frac{1}{\nu} \mu \tilde{y}$$

با حل $\dot{\tilde{x}}(t) = 0$ و $\dot{\tilde{y}}(t) = 0$ نقاط ثابت $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ که

$$\tilde{y}^* = -\tilde{x}^*$$

را با روش پایداری خطی به صورت زیر است:

$$\tilde{x} \quad \tilde{y}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon x(t) \\ \varepsilon y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x^* \\ 0 & \alpha x^* - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon x(t) \\ \varepsilon y(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ماتریس مربعی 2×2 ماتریس ژاکوبی J است:

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha x^* \\ 0 & \alpha x^* - \mu \end{bmatrix} \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} \quad (6)$$

دو نقطه ثابت یافت شده را در ماتریس ژاکوبی قرار می‌دهیم.

ویژه مقادیر در $(x^* = 0, y^* = 0)$ و $(x^* = 0, y^* = 0)$ به ترتیب

$$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \alpha x^* - \mu) \quad \text{و} \quad (\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\mu)$$

می‌آید. دو نقطه ثابت ویژه مقدار صفر دارد، بنابراین نمی‌توان

پایداری و ناپایداری نقاط را مشخص کرد. روش تابع لیاپانوف

برای اینگونه سیستم‌ها کاربرد دارد. تابع لیاپانوف تابع مشخصی

نیست اما شروطی برای درستی پایداری هر تابع پیشنهادی

$V(x, y)$ دارد. اگر نقطه (x^*, y^*) نقطه ثابت سیستم دینامیکی

باشد و دو شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول - برای همه نقاط به جز نقطه ثابت $V(x, y) > 0$

شرط دوم - برای همه نقاط به جز نقطه ثابت $\frac{d}{dt} V(x, y) < 0$

بنابراین (x^*, y^*) پایدار است [2]. برای این سیستم تابع

پیشنهادی به صورت زیر است:

$$V(x, y) = (x - x^*)^2 + 2x^*(y - y^*) \quad (7)$$

مشتق آن نسبت به زمان را به دست می‌آوریم و با جایگذاری از

معادلات (1) و اضافه کردن $-2\alpha x^* y + 2\alpha x^* y$ به

معادلات نتیجه می‌شود:

$$\frac{d}{dt} V(x, y) = -2\alpha(x - x^*)^2 y - 2x^*(-\alpha x^* + \mu)y \quad (8)$$

در معادله بالا، جمله اول منفی است. و اگر در جمله دوم شرط

$$-\alpha x^* + \mu > 0 \quad (9)$$

برقرار باشد نتیجه می‌شود که $\frac{d}{dt} V(x, y) < 0$. بنابراین با این

شرط دو نقطه ثابت پایدار می‌شوند.

برای یافتن تابع کنترل از قضیه گوشگورین [8] استفاده می‌کنیم.

این قضیه محدوده قرار گیری ویژه مقادیر در صفحه xy را

معلوم می‌کند. طبق این قضیه، ویژه مقادیر $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

۳. نتایج

کنترل پذیری سیستم در حالت مطلوب را با استراتژی کنترل سیستم‌های چند بعدی نشان می‌دهیم. حالت مطلوب کنترل شده در اینجا، یک نقطه ثابت معین سیستم نیست. استراتژی کنترل در این سیستم رفتاری دینامیک دارد. به این معنی که اجازه می‌دهیم متغیر حالت بعد از تحول سیستم، در یک نقطه از مسیر کنترل شده و به حالت مطلوب مورد نظر برسد. علامت قسمت حقیقی ویژه مقادیر سیستم را با ماتریس ژاکوبی و قضیه دایره‌های گرشگورین، تعیین می‌کنیم. با حل معادلات دیفرانسیل پیش از کنترل و پس از کنترل، دینامیک سیستم را در طول زمان نشان می‌دهیم. همچنین فضای حالت سیستم را به ازای نقاط ثابت مختلف رسم می‌کنیم. نقطه ثابت را در تابع کنترلی (۱۸) و شرط (۱۹) به عنوان نقطه ثابت مطلوب $(x^{C*}, y^{C*} = 0)$ در نظر می‌گیریم. برای برقراری قید سیستم، تابع $\beta((y(t) - (x(t) - x^{C*})))$ را به \dot{x} اضافه می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل بعد از کنترل به صورت هستند:

$$\begin{aligned} \frac{dx^c(t)}{dt} &= -\alpha x^c(t) y^c(t) + \beta(y^c(t) - (x^c(t) - x^{C*})) \\ \frac{dy^c(t)}{dt} &= \alpha x^c(t) y^c(t) - \mu y^c(t) - \beta(y^c(t) - (x^c(t) - x^{C*})) \quad (20) \\ \frac{dz^c(t)}{dt} &= \mu y^c(t) \end{aligned}$$

که $x^c(t), y^c(t), z^c(t) \leq 1$ هستند. این سیستم را هم به دلیل وجود قید، دو بعدی در نظر می‌گیریم. با حل $\dot{x}^c(t) = 0$ و $\dot{y}^c(t) = 0$ نقطه ثابت سیستم جدید $(x^{*c}, y^{*c} = 0)$ است. و همچنین نقطه ثابت دیگری ندارد. اختلال کوچکی را حول نقطه ثابت سیستم اعمال می‌کنیم. ماتریس ژاکوبی J این سیستم را با روش پایداری خطی به دست می‌آید:

$$J^c(x^{C*}, y^{C*}) = \begin{bmatrix} -\beta & -\alpha x^{C*} + \beta \\ \beta & \alpha x^{C*} - \mu - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}^c \\ \dot{y}^c \end{bmatrix} \quad (21)$$

مرکز اولین دایره D^c_1 و دومین دایره گرشگورین D^c_2 به ترتیب، $C^c_1 = -\beta$ و $C^c_2 = \alpha x^{*c} - \mu - \beta$ است که هر دو منفی هستند.

$$J(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*) = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{2} & -\frac{\mu}{2} \\ \alpha \tilde{x}^* - \frac{\mu}{2} & -\alpha \tilde{y}^* - \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} \quad (15)$$

با توجه به اینکه نقطه ثابت $\tilde{y}^* = -\tilde{x}^*$ است و آن را در معادله (۱۵) قرار دهیم، مرکز \tilde{C}_1 و شعاع \tilde{R}_1 دایره گرشگورین \tilde{D}_1 مربوط به مشتق از \tilde{x} به دست می‌آید:

$$\tilde{C}_1 = -\frac{\mu}{2} \quad (16)$$

$$\tilde{R}_1 = \left| -\frac{\mu}{2} \right| = \frac{\mu}{2}$$

مرکز دایره منفی و $\tilde{C}_1 + \tilde{R}_1 = 0$. بنابراین این دایره در سمت چپ دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. دایره گرشگورین \tilde{D}_1 مربوط به مشتق از \tilde{y} و وارون تبدیلات (۱۳) استفاده می‌کنیم و به دست می‌آید:

$$\tilde{C}_2 = \alpha x^* - \frac{\mu}{2} \quad (17)$$

$$\tilde{R}_2 = \left| \alpha x^* - \frac{\mu}{2} \right|$$

مرکز C_2 به ازای مقادیر $\alpha x^* < \frac{\mu}{2}$ منفی است و دایره در سمت چپ دستگاه مختصات قرار می‌گیرند. $\alpha x^* = \frac{\mu}{2}$ تنها یک نقطه در مبدا مختصات داریم. در غیر این صورت دایره در سمت راست دستگاه مختصات قرار می‌گیرد. برای انتقال این دایره به سمت چپ، به معادله \tilde{y} در معادله (۱۴)، جمله $-\beta(\tilde{y} - \tilde{y}^*)$ اضافه می‌کنیم. β در اینجا پارامتر کنترل و مثبت است. با خطی کردن دوباره مرکز \tilde{D}_2 به اندازه $-\beta$ جابه جا شود. این معادل این است که به سمت راست معادله \tilde{y} در معادله (۱) جمله

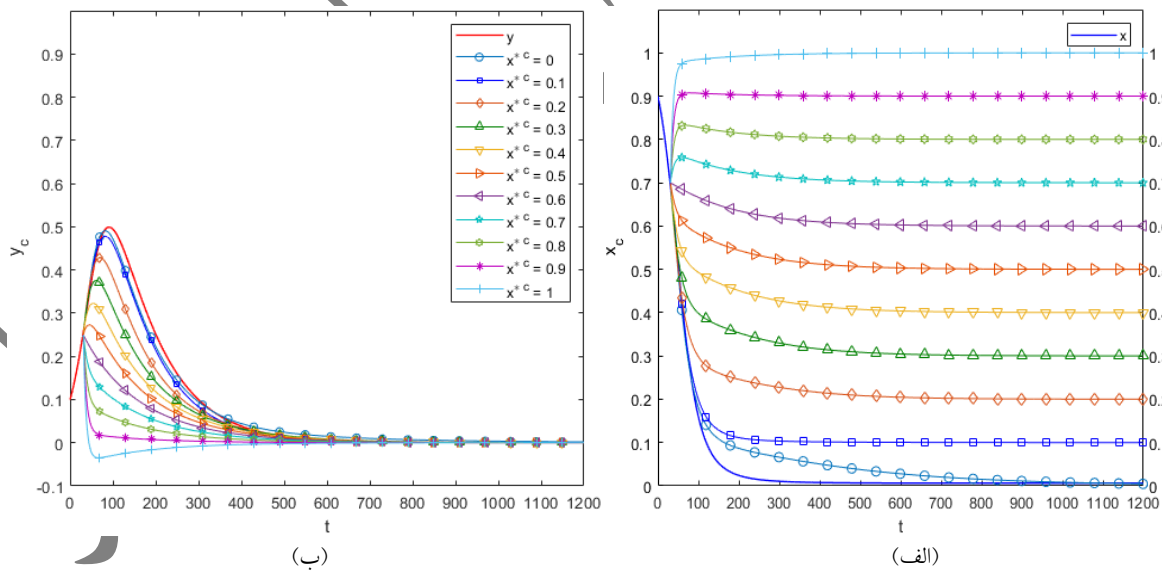
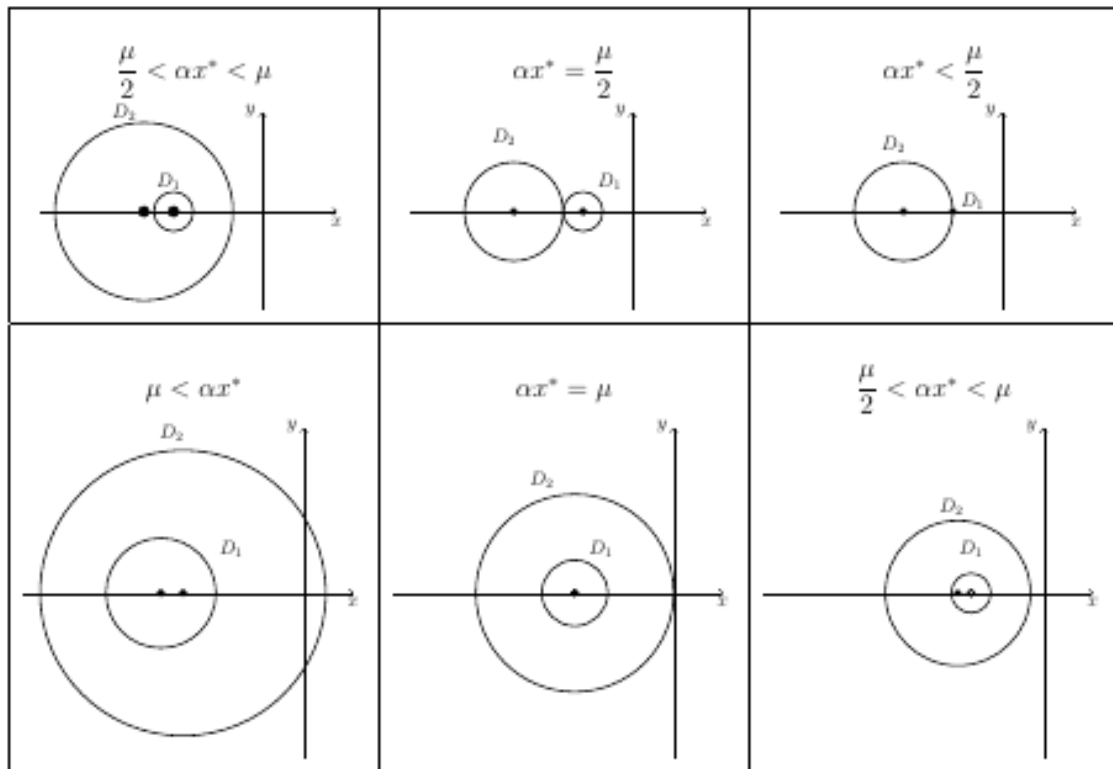
$$-\beta((y - y^*) - (x - x^*)) \quad (18)$$

اضافه شود [۷]. برای β شرط زیر باید برقرار باشد:

$$2\alpha x^* - \mu + \varepsilon \leq \beta \quad (19)$$

مقدار خطا $\varepsilon = 0.05$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱. دایره‌های گرشگورین سیستم بعد از کنترل. سیستم برای x^* های مختلف بررسی شده است. با توجه به مقادیر مختلف x^* مقدار β از معادله (۱۹) محاسبه می‌شود. دایره D_1^c در همه نقاط ثابت در سمت چپ قرار گرفته است. دایره D_2^c برای نقاط ثابت $\mu < \alpha x^*$ قسمتی از آن در سمت چپ قرار گرفته است.



شکل ۱. حل عددی معادلات دیفرانسیل قبل از کنترل (خط ممتد) و بعد از کنترل (خطوط با علامت) به ازای نقاط ثابت مختلف. ($x^{c*} = 0, y^{c*} = 0$)

(الف) متغیر حالت $y(t)$ بیش از کنترل و $y^c(t)$ پس از کنترل. (ب) متغیر حالت $x(t)$ پیش از کنترل و $x^c(t)$ پس از کنترل. تابع کنترلی در گام زمانی $t_c = 30$ وارد سیستم شده است. شرط اولیه برای سیستم پیش از کنترل ($x(0) = 0.9, y(0) = 0.1$) و پس از کنترل ($x(t_c), y(t_c)$) می‌باشد. پارامترها در سیستم پیش از کنترل به گونه‌ای انتخاب شدند که قله را مشاهده کنیم $\alpha = 0.5$ و $\mu = 0.1$. معادلات دیفرانسیل به روش عددی رانک-کوتا مرتبه چهارم حل شده است.

در جدول (۱) دایره‌های گریشگورین این سیستم به عنوان نمونه نشان داده شده است. یک دایره به طور کامل به سمت چپ منتقل شد. به عبارت دیگر قسمت حقیقی یک ویژه مقدار، منفی است و دایره دیگر، قسمتی از آن در سمت راست قرار می‌گیرد که نمی‌توان قسمت حقیقی ویژه مقدار دیگر را با قضیه گریشگورین تعیین علامت کرد.

برای سیستم دو بعدی، رابطه بین ویژه مقادیر با رد ماتریس ژاکوبی $\text{Tr}(J) = \lambda_1 + \lambda_2$ و دترمینان $\det(J) = \lambda_1 \lambda_2$ را داریم [۲].

$$\begin{aligned} \tau &= \lambda_1 + \lambda_2 = C_1 + C_2 \\ \Delta &= \lambda_1 \lambda_2 = C_1 C_2 - R_1 R_2 \end{aligned} \quad (22)$$

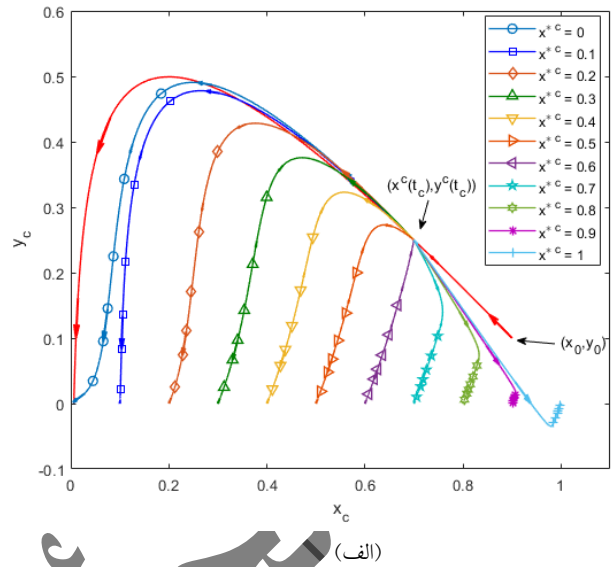
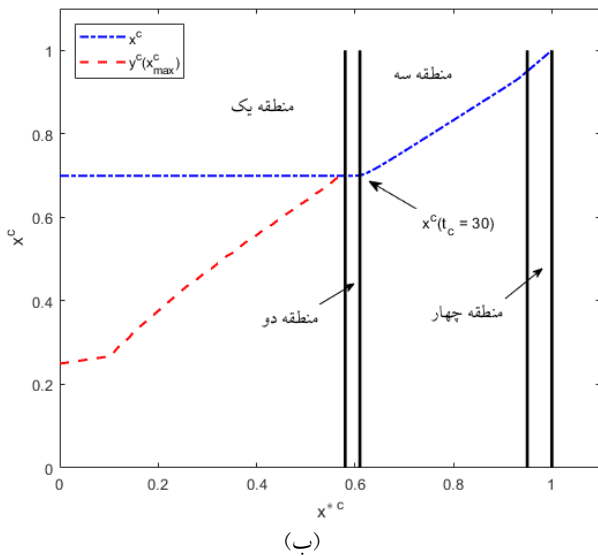
مرکز دایره‌ها منفی هستند پس از رابطه (۲۲) مجموع ویژه مقادیر نیز منفی است. قسمت حقیقی یکی از ویژه مقدارها نیز منفی است اما نمی‌توان از این رابطه به علامت قسمت حقیقی دومین ویژه مقدار پی برد. سمت راست رابطه (۲۲) مثبت است بنابراین سمت چپ رابطه نیز باید مثبت باشد. می‌دانیم علامت قسمت حقیقی ویژه مقدار دیگر منفی است در نتیجه قسمت حقیقی ویژه مقدار با علامت نامعلوم باید منفی باشد. برای تشخیص حقیقی بودن $\tau^2 - 4\Delta > 0$ با محاسبات ساده درستی این شرط ثابت می‌شود.

در شکل (۱) حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل پیش از کنترل (۱) و پس از کنترل (۲۰) را نشان می‌دهد. در شکل (الف) متغیر حالت $x(t)$ به طور یکنواخت افت می‌کند و در نهایت به مقدار ثابت $x^* = 0$ می‌رسد و این مقدار ثابت از رابطه (۳) نیز به دست می‌آید. در شکل (ب) متغیر حالت $y(t)$ در ابتدا بالا می‌رود و بعد پایین می‌آید و در نهایت به $y^* = 0$ می‌رسد. خطوط علامتدار، سیستم بعد از کنترل را برای نقاط ثابت مختلف نشان می‌دهند. تابع کنترل را در زمان $t_c = 30$ وارد سیستم می‌کنیم. بنابراین معادلات دیفرانسیل (۲۰) با شرط اولیه $(x^c, y^c) = (x(t_c), y(t_c))$ در نقاط ثابت مختلف، حل می‌شود. در شکل (الف)، در وضعیت $x^c < x(t_c)$ متغیر حالت $x^c(t)$ بعد از ورود تابع کنترل پایین می‌رود و در نهایت به مقدار ثابت $x^* = 0$ می‌رسد. در شکل (ب) متغیر حالت

$y^c(t)$ در $x^c = 0.6$ پایین می‌رود و در نقاط ثابت دیگر بالا می‌رود و بعد پایین می‌آید و در نهایت به $y^c = 0$ می‌رسد. زمان رسیدن به حالت پایدار متغیر $y^c(t)$ در این نقاط ثابت مانند قبل از کنترل است. در وضعیت $x^c \leq x(t_c)$ متغیر حالت $x^c(t)$ بالا می‌رود و در نهایت به $x^* = 0$ می‌رسد. با افزایش x^c متغیر حالت $y^c(t)$ سریعتر پایین می‌رود تا به مقدار ثابت $y^* = 0$ برسد. در $x^c = 1$ متغیر حالت $y^c(t)$ پایین می‌رود اما وارد قسمت منفی‌ها می‌شود و تابع کنترل باعث می‌شود که به $y^* = 0$ برسد. همچنین شکل نشان می‌دهد که زمان رسیدن به حالت پایدار، با افزایش x^* کاهش می‌یابد.

برای بررسی رفتار غیر فیزیکی (ناحیه منفی) و قله $y^c(t)$ سیستم، فضای حالت سیستم قبل از کنترل و سیستم بعد از کنترل در شکل (۲) نشان شده است.

خط ممتد در شکل (الف) پیش از کنترل را نشان می‌دهد که از رابطه (۲) نیز به دست می‌آید. متغیر حالت $x(t)$ در جهت کاهشی حرکت می‌کند و متغیر $y(t)$ ابتدا افزایش می‌یابد و بعد افت می‌کند. مسیر سیستم جدید با خطوط جهت دار علامتدار برای x^c های مختلف نشان داده شده است. در شکل (۲) مسیر حرکت برای x^c های مختلف، متفاوت به دست می‌آید. مسیری که به نقاط ثابت کوچک منتهی می‌شوند، ابتدا متغیر حالت $x^c(t)$ در جهت کاهشی است و متغیر حالت $y^c(t)$ در ابتدا در جهت افزایشی است و بعد جهت کاهشی حرکت می‌کند. نقاط ثابت با این ویژگی را در منطقه اول قرار می‌دهیم. در این منطقه $\beta = \varepsilon$ و $x^c < \frac{\mu}{2\alpha}$ در این منطقه اول هستند با این تفاوت که β از رابطه (۱۹) به دست می‌آید. نقاط ثابتی که متغیر حالت $x^c(t)$ و $y^c(t)$ هر دو در جهت کاهشی هستند و در منطقه سوم قرار می‌دهیم. نقاط ثابتی که، جهت $y^c(t)$ در تمام طول مسیر کاهشی است اما متغیر حالت $x^c(t)$ در ابتدا در جهت افزایشی است و بعد تغییر جهت کاهشی می‌دهد تا به نقطه ثابت برسد را در منطقه چهارم قرار می‌دهیم.



شکل ۲. (الف) فضای حالت برای نقاط ثابت مختلف، خط ممتد مسیر سیستم پیش از کنترل و خطوط علامتدار، مسیر سیستم بعد از کنترل (ب) تقسیم فضای حالت بر حسب نقاط ثابت مختلف. نقاط به دست آمده در بازه $0 < x^{c*} \leq 1$ با فاصله $\Delta x^{c*} = 0.01$ است. ($t_c = 30$)

نقاط ثابت، مانند $x^{c*} = 1$ که از فضای حالت خارج می‌شوند را در منطقه پنجم قرار می‌دهیم. برای طبقه بندی دقیقتر نقاط ثابت بیشتری را در نظر می‌گیریم. شکل (۲) نشان می‌دهد برخی از مسیرها تععرشان به سمت محور $y^c(t)$ است. مکان $x^c(t)$ که در آن تغییر اتفاق می‌افتد را به x^{c*} نشان می‌دهیم و برای مسیرهایی که تععرشان به سمت محور $x^c(t)$ است نقطه $x(t_c)$ را در نظر می‌گیریم. در شکل (۲) این نقاط را بر حسب x^{c*} رسم کردیم. برای هر نقطه ثابت، مکان بیشترین مقدار $y^c(t)$ با خط چین نشان داده شده است. منطقه اول نشان می‌دهد نقاط ثابت این منطقه که باعث بوجود آمدن قله در $y^c(t)$ می‌شود نقاط ثابتی است که $\beta = \varepsilon$ است و شیب خط نشان می‌دهد که قله‌ها با فاصله کمتری از هم قرار دارند. در منطقه دوم نیز مکان قله‌ها رفتار خطی نشان می‌دهند و شیب قابل ملاحظه‌ای نسبت به منطقه اول دارد که در شکل (۱) نیز مشخص است. منطقه سوم در واقع نقاط ثابتی است که $x^c(t)$ و $y^c(t)$ رفتار نزولی دارند. نقطه ثابت $(x^{c*} = 0.6, y^{c*} = 0)$ در شکل (الف) متعلق به این منطقه است. در منطقه چهارم متغیر حالت $y^c(t)$ رفتار نزولی دارد. در این منطقه مسیرها در x^{c*} تغییر جهت می‌دهند و رفتار خطی با x^{c*} نشان می‌دهند. در منطقه پنجم متغیر حالت $y^c(t)$ منفی می‌شود. همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده

۴. جمع بندی و نتیجه گیری

استراتژی کنترل در مدل ریاضی، بخش بندی جمعیتی، کنترل مقدار متغیر حالت در هر نقطه از مسیر تحول و هدایت آن به سمت نقطه ثابت در حال تعادل پایدار است. سیستم دینامیکی سه بعدی غیرخطی معرفی شده را با استفاده از استراتژی کنترل سیستم‌های دینامیکی چند بعدی [۷] با روش تحلیلی و عددی بررسی کردیم. با استفاده از روش پایداری خطی و قضیه دایره‌های گرشگورین، به طور تحلیلی نشان دادیم تابع کنترل به دست آمده قسمت حقیقی ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبی سیستم جدید را، در هر نقطه ثابت مطلوب منفی می‌کند. با حل عددی معادلات دیفرانسیل پیش از کنترل و پس از کنترل دو سیستم را با هم مقایسه کردیم. با اعمال تابع کنترل، سیستم در بازه زمانی محدود به نقاط ثابت مطلوب رسید و سیستم در حالت پایدار قرار گرفت. مشاهده کردیم که برای رسیدن به حالت پایدار برخی از نقاط ثابت، رفتار مشابهی مانند پیش از کنترل را نشان می‌دهند و در نهایت به حالت پایدار می‌رسند و برخی دیگر با اعمال تابع کنترل به سرعت به حالت پایدار رسیدند. با رسم فضای حالت برای نقاط ثابت مختلف بیشتری،

ثابت را یافتیم که در سیستم قله مشاهده نمی‌شود و همچنین سیستم در این نقاط ثابت، سریعتر به حالت پایدار می‌رود.

تشکر و قدردانی

از معاونت پژوهشی دانشگاه الزهراء بابت حمایت از این کار تشکر می‌شود.

پنج منطقه به دست آمد. نقاط ثابت در منطقه اول و دوم، قله‌ای مشابه پیش از کنترل را نشان می‌دهند. نقاط ثابت در منطقه سه و چهار بعد از اعمال تابع کنترل، رفتار نزولی در سیستم مشاهده کردیم. منطقه پنج به دلیل جواب غیر فیزیکی قابل قبول نیستند. رفتار سیستم بعد از کنترل در نقطه ثابت (حالت پایدار) پیش از کنترل تفاوتی با سیستم کنترل نشده مشاهده نکردیم. ما نقاط

مراجع

1. L Yang-Yu, and A-L Barabási, Rev. Mod. Phys. 88 (2016) 035006.
2. S H Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, and Engineering", Westview Press (2001).
3. R Pastor-Satorras, C Castellano, P Van Mieghem, A Vespignani, Rev. Mod. Phys. 87(2015) 925.
4. F Roshani Int. J. Appl. Phys. 13 (2017) 17.
5. F. Roshani and Y. Naimi, Phys. Rev. E 85 (2012) 036109.
6. YY Liu , JJ Slotine, and AL Barabási, nature 473 (2011)167.
7. M Bahadorian, H Alimohammadi, T Mozaffari, M. R. R Tabar, J Peinke and K Lehnertz , Sci. Rep 9 (2019) 1.
8. Morrison, Megan, and J. Nathan Kutz., IEEE transactions on network science and engineering 8.1 (2020) 174-189.
9. Morrison, Megan, Charles Fieseler, and J. Nathan Kutz. Frontiers in Computational Neuroscience 14 (2021) 616639.
10. J. J. Bissell, C. C. S. Caiado, M. Goldstein, and B. Straughan. "Compartmental modelling of social dynamics with generalised peer incidence." Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 24, no. 04 (2014) 719-750.