

## واهمتننده‌های موضعی برای هم‌ارزی کدهای کوانتومی توپولوژیکی دوبعدی

محسن رحمانی حقیقی و محمد حسین زارعی\*

بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: mzarei92@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳/۰۸/۱۴۰۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۶/۱۱/۱۴۰۲)

### چکیده

یکی از مهم‌ترین رهیافت‌ها در دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی توپولوژیکی، یافتن کلاس‌های هم‌ارزی تحت تبدیلات یکانی موضعی است. این مسئله به خصوص برای کدهای کوانتومی توپولوژیکی با توجه به اهمیتشان در رایانش کوانتومی، مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. به ویژه، نشان داده شده است که نوعی از تبدیلات یکانی موضعی وجود دارد که تحت اثر آنها، هر کد رنگ D بعدی می‌تواند به تعدادی نسخه از کدهای چنبره D بعدی نگاشته شود. در این مقاله، ما به بررسی چنین تبدیلاتی برای کدهای توپولوژیکی دوبعدی می‌پردازیم و تبدیلات یکانی واهمتننده گرین برگر - هورن - زایلینگر (GHZ) را بدین منظور معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای یک کد رنگ تعریف شده بر شبکه سه رنگ پذیر لانه زنبوری، با اعمال چنین تبدیلی به شکل موضعی روی کیوبیت‌های متناظر با یکی از رنگ‌ها، دو رنگ دیگر واهمتنیده شده و دو کد چنبره تولید می‌شود. علاوه بر این، ما تبدیلات بالا را برای کدهای رنگ، روی دیگر شبکه‌های سه رنگ پذیر تعمیم می‌دهیم، به طوری که با اعمال تبدیلات GHZ مذکور متناظر با یکی از رنگ‌ها، کد رنگ به دو نسخه از کد چنبره بر روی شبکه‌های دوگان متناظر با دو رنگ دیگر تبدیل می‌شود. این نتیجه امکان مقایسه بین کدهای رنگ دوبعدی مختلف را بر اساس تفاوت بین دوگان‌های آنها فراهم می‌کند.

**واژه‌های کلیدی:** تبدیلات موضعی، کلاس‌های هم‌ارزی توپولوژیکی، کد کوانتومی رنگ، کد کوانتومی چنبره، فاز توپولوژیکی

### ۱. مقدمه

الگوی درهم‌تنیدگی بلند برد متفاوتی دارند [۹ و ۱۰] را به یکدیگر تبدیل کرد. با این وجود، فازهایی که در یک کلاس توپولوژیکی قرار دارند به وسیله عمل‌های یکانی موضعی به هم مربوط می‌شوند.

در سال‌های اخیر از میان سامانه‌های کوانتومی توپولوژیکی مختلف، کدهای کوانتومی توپولوژیکی به خاطر کاربردهایشان در رایانش کوانتومی، توجهات زیادی را به خود جلب کرده است [۱۰-۱۴]. در میان این کدها، کد چنبره<sup>۱</sup> و کد رنگ<sup>۲</sup> به دلیل استحکام و ویژگی‌های مقاومشان در برابر خطا، بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. کد چنبره [۱۵] با نظم توپولوژیکی  $Z_2$  [۱۶] به عنوان اولین مثال از مدل‌های کوانتومی تصحیح خطا

یکی از موضوعات مهم در فیزیک ماده چگال، شناخت روش‌های دسته‌بندی فازهای کوانتومی توپولوژیکی [۲، ۳] و شناسایی سامانه‌هایی است که در یک کلاس توپولوژیکی قرار می‌گیرند. در این راستا، مطالعه هم‌ارزی یکانی موضعی سامانه‌های کوانتومی توپولوژیکی یک روش مهم و کارآمد برای دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی است [۴-۷]. با توجه به این که فازهای توپولوژیکی نظم غیرموضعی به همراه یک الگوی درهم‌تنیدگی بلند برد دارند [۸] لذا به وسیله اعمال موضعی نمی‌توان دو سامانه توپولوژیکی که در دو فاز مختلف هستند و

<sup>1</sup> Toric code

<sup>2</sup> Color code

صراحت معرفی نشده‌اند. این که این تبدیلات چه هستند و به خصوص چه میزان در دره‌متنیدگی حالت‌های توپولوژیکی تأثیر می‌گذارند به درک ما از تفاوت‌های بین کدهای توپولوژیکی کمک می‌کند.

در این مقاله، ما تبدیلات واهمتننده<sup>۲</sup> GHZ<sup>۳</sup> را معرفی می‌کنیم که به وسیله یک تبدیل پایه از پایه محاسباتی به پایه‌ای ساخته شده از حالت‌های GHZ توصیف می‌شود. برای یک کد رنگ روی شبکه سه رنگ‌پذیر<sup>۴</sup> لانه زنبوری، این واهمتننده‌ها را به شکل موضعی بر روی کیوبیت‌های متناظر با یکی از رنگ‌ها اعمال می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چنین تبدیلی عملاً دو رنگ دیگر را از یکدیگر واهمتنیده کرده و دو کد چنبره تولید می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که این عملیات برای کد رنگ روی دیگر شبکه‌های سه رنگ‌پذیر نیز به همین شکل قابل اعمال است. به خصوص برای یک شبکه سه رنگ‌پذیر، متناظر با هر رنگ، یک شبکه دوگان تعریف می‌کنیم که کد چنبره بر روی هر یک از آنها تعریف می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که تبدیلات GHZ بر روی یکی از رنگ‌ها، دو کد چنبره را روی شبکه‌های دوگان متناظر با دو رنگ دیگر تولید می‌کند. به این ترتیب تفاوت در قابلیت‌هایی که کدهای رنگ متناظر با شبکه‌های سه رنگ‌پذیر مختلف دارند [۱۲، ۴۳ و ۴۴]، در تفاوت بین دوگان‌های مختلف این شبکه‌ها نمود پیدا می‌کند. ساختار مقاله به این صورت خواهد بود که در بخش دوم مقاله کد چنبره و کد رنگ را به عنوان دو کد کوانتومی توپولوژیکی معرفی کرده و برخی از تفاوت‌هایشان را مرور خواهیم کرد. در بخش سوم و چهارم مقاله با معرفی واهمتننده‌های GHZ نشان خواهیم داد که پایدارسازهای کد رنگ تعریف شده بر روی یک شبکه لانه زنبوری به ضرب تانسوری از پایدارسازهای دو کد چنبره تعریف شده بر روی دو شبکه مثلثی تبدیل خواهد شد. در بخش پنجم نیز با معرفی تبدیل GHZ به عنوان یک نگاشت دوگان بین کد رنگ دو بعدی و کد چنبره دو بعدی نشان خواهیم داد که این روش قابل تعمیم به حالت‌های کد رنگ روی هر شبکه دو بعدی سه رنگ‌پذیر دلخواه است.

توسط کیتائف معرفی شد. این کد، حافظه محافظت شده‌ای است که اطلاعات در حالت‌های تبهگن آن (که به صورت موضعی قابل شناسایی نیست) ذخیره می‌شود و از نظر توپولوژیکی در مقابل اختلال‌های موضعی مستحکم است [۱۷-۲۹]. چنین استحکامی نتیجه این واقعیت است که تبهگنی حالت پایه تنها به شرایط مرزی وابسته بوده و به تقارن بستگی ندارد. کد توپولوژیکی رنگ [۱۲، ۱۳ و ۳۰] کلاس دیگری از کدهای تصحیح خطای کوانتومی است. در مقایسه با کد چنبره، اضافه شدن عنصر رنگ منجر به بروز قابلیت‌های بیشتری برای کد رنگ شده است [۱۲ و ۱۳]. به عنوان مثال این ویژگی، باعث افزایش تبهگنی حالت پایه کد رنگ در مقایسه با کد چنبره در شرایط مرزی یکسان می‌شود. از دیگر قابلیت‌های کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌توان به توان محاسباتی بالاتر اشاره کرد به طوری که مجموعه‌ای از دروازه‌های جهانشمول کلیفورد<sup>۱</sup> را می‌توان بر روی آن اعمال کرد [۱۲ و ۳۱]. البته این قابلیت در ابعاد بالاتر افزایش یافته به طوری که کدهای رنگ با ابعاد بیشتر از دو بعد قابلیت تحقق دروازه‌های غیر کلیفورد را که جزو ضروری محاسبات کوانتومی متحمل خطاست، نیز دارند [۳۲ و ۳۳].

در حالی که هر یک از کدهای مذکور، ویژگی‌ها و کاربردهای متمایزی دارند اما وجود یک ارتباط جالب بین آنها در قالب هم‌ارزی یکانی موضعی بین کد رنگ و تعداد محدودی از کدهای چنبره موضوع پژوهش‌های اخیر بوده است [۳۴-۴۲]. به خصوص نشان داده می‌شود که کد رنگ تعریف شده روی شبکه دو بعدی از نظر توپولوژیکی معادل با دو نسخه از کدهای چنبره دو بعدی بوده و در نتیجه متعلق به فاز توپولوژیکی  $Z_2 \times Z_2$  است [۳۴، ۳۸، ۴۰ و ۴۲]. علی‌رغم چنین هم‌ارزی، وجود تفاوت‌هایی مهم بین قابلیت‌های کد رنگ و کد چنبره، اهمیت بررسی دقیق‌تر و صریح‌تر تبدیلات موضعی بین این دو کد را بیشتر می‌کند. به خصوص، مطالعاتی که تاکنون در مورد هم‌ارزی‌های یکانی موضعی بین کدهای مذکور صورت گرفته غالباً بر مبنای روش‌های جبری بوده و تبدیلات یکانی به

۱. Clifford universal gates

۲. Disentangler

۳. Greenberger-Horne-Zeilinger

۴. Three-colorable

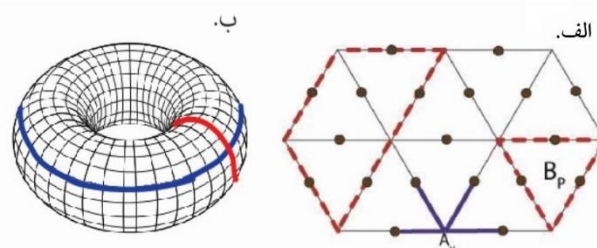
عملگر وجه متناظر با یک حلقه مثلثی است، هر حاصل ضربی از عملگرهای وجه می‌تواند به صورت یک پیکربندی از حلقه‌هایی با ساختارهای مثلثی نمایش داده شود (شکل ۱. الف). در این رابطه ما می‌توانیم حالت پایه یک کد چنبره را در قالب یک برهم‌نهی از همه ساختارهای حلقه مثلثی به صورت زیر نمایش دهیم:

$$|GS\rangle = \sum_{\Delta} |\Delta\rangle, \quad (4)$$

که  $|\Delta\rangle$  اشاره به همه ساختارهای حلقه مثلثی دارد که می‌تواند در شبکه مثلثی پدیدار شود. به عبارتی دیگر حالت پایه کد چنبره مثلثی یک برهم‌نهی از همه ساختارهای حلقه مثلثی اسپین‌های پایین  $|1\rangle$  در دریایی از اسپین‌های بالا  $|0\rangle$  است.

کد چنبره با شرط مرزی دوره‌ای نظم توپولوژیکی مستحکمی دارد که ناشی از تبهگنی حالت پایه است. استحکام خواص توپولوژیکی کد چنبره در مقابل اختلالات موضعی، آن را به عنوان یک حافظه کوانتومی ارزشمند، معرفی می‌کند. تبهگنی حالت پایه، بستگی به عدد جنس<sup>۱</sup> منیفولد<sup>۲</sup> دارد که شبکه بر روی آن تعریف شده است. مثلاً کد چنبره تعریف شده بر روی رویه‌ای با توپولوژی چنبره، تبهگنی چهارگانه خواهد داشت که یکی از حالت‌های تبهگن آن در رابطه (۳) آورده شده است. با اثر عملگرهای توپولوژیکی غیربدهی که به صورت ضرب عملگرهای نوع  $X$  در امتداد حلقه‌های غیرجمع‌پذیر روی یک چنبره تعریف می‌شود، سه حالت تبهگن دیگر بازتولید خواهد شد (شکل ۱. ب).

یکی دیگر از کدهای کوانتومی توپولوژیکی مهم، کد رنگ است. برخلاف کد چنبره که کیوبیت‌ها بر روی یال‌های شبکه تعریف می‌شدند در اینجا، کیوبیت‌ها بر روی رأس‌های شبکه قرار می‌گیرند. به طور کلی کد رنگ در  $d$  بعد بر روی هر شبکه  $d+1$  رنگ پذیر، قابل تعریف است. شبکه لانه زنبوری در دو بعد می‌تواند یک مثال از چنین شبکه‌ای باشد که وجوه آن سه رنگ آبی، قرمز و سبز دارد، به طوری که هیچ دو وجه مجاور رنگ یکسان ندارند و وجوهی با یک رنگ خاص توسط یال‌هایی با همان رنگ به یکدیگر متصل می‌شوند (شکل ۲. ب).



شکل ۱. الف) کد چنبره بر روی یک شبکه مثلثی.  $A_v$  عملگر رأس و عملگر  $B_p$  نشان دهنده یک حلقه مثلثی است که با خط چین قرمز نشان داده شده است. حاصل ضربی از  $B_p$  ها به یک ساختار حلقه‌ای منجر می‌شود که با خط چین دوزنقه‌ای قرمز نشان داده شده است. ب) کد چنبره با شرایط مرزی دوره‌ای. دایره‌های قرمز و آبی نماینده عملگرهای توپولوژیکی غیربدهی است که به صورت ضرب عملگرهای نوع  $X$  نوشته می‌شود.

## ۲. کد چنبره و کد رنگ

کد کوانتومی توپولوژیکی چنبره با نظم توپولوژیکی  $Z_2$  یکی از مهم‌ترین کدهای تصحیح خطای کوانتومی است که بر روی هر شبکه دلخواه، قابل تعریف است. برای مثال یک شبکه مثلثی را در نظر بگیرید که کیوبیت‌ها روی یال‌های آن قرار گرفته‌اند (شکل ۱. الف). هامیلتونی آن بر حسب عملگرهای رأس  $A_v$  و عملگرهای وجه  $B_p$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{TC} = -J \sum_v A_v - J \sum_p B_p, \quad (1)$$

که  $J$  انرژی همبستگی و  $A_v$  و  $B_p$  به ترتیب عملگرهای رأس و وجه هستند.

$$B_p = \prod_{i \in \partial p} X_i, \quad A_v = \prod_{i \in v} Z_i, \quad (2)$$

که  $X$  و  $Z$  عملگرهای پاولی هستند و  $i \in v$  به کیوبیت‌هایی اشاره دارد که بر روی یال‌هایی زندگی می‌کنند که به رأس  $v$  وارد می‌شوند. همچنین  $i \in \partial p$  به کیوبیت‌هایی اشاره دارد که بر روی یال‌هایی که وجه  $p$  را احاطه کرده، قرار دارند (شکل ۱. الف). عملگرهای دلخواه  $A_v$  و  $B_p$  یا هیچ کیوبیت مشترکی ندارند یا در دو کیوبیت اشتراک خواهند داشت. به همین دلیل عملگرهای رأس و وجه با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. بنابراین حالت پایه کد چنبره صرف نظر از ضریب بهنجارش را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$|GS\rangle = \prod_v (1 + B_p) |0\rangle^{\otimes n}, \quad (3)$$

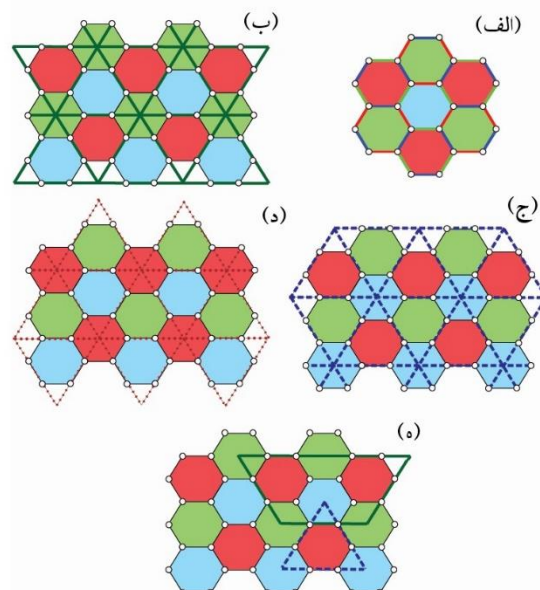
که در اینجا  $n$  تعداد کیوبیت‌ها است. با توجه به این که هر

که یال‌های شبکه مثلثی بر یال‌های سبز رنگ شبکه اولیه منطبق باشد. با توجه به این که هر مثلث از شبکه مثلثی متناظر با یک وجه از شبکه لانه زنبوری است، لذا عملگر  $B_p^x$  را می‌توان بر حسب یک حلقه مثلثی نمایش داد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که یک نمایش حلقه برای کد رنگ همانند کد چنبره وجود دارد؛ با این تفاوت که در کد رنگ به خاطر وجود عنصر رنگ (سه رنگ در دو بعد)، نیاز به حلقه دیگری با رنگی متفاوت برای نمایش تمام پایدارسازهای نوع  $X$  است.

به عنوان مثال همان طور که در شکل ۲. ب می‌بینید، حلقه سبز رنگ تنها و جوهی با دو رنگ را پوشش می‌دهد، و برای نمایش پایدارسازهای متناظر با جوهی با رنگ سبز نیاز به حلقه دیگری با یکی از دو رنگ قرمز یا آبی خواهد بود. بنابراین حالت پایه کد رنگ را می‌توان به وسیله برهم‌نهی از حلقه‌هایی با دو رنگ متفاوت نمایش داد (شکل ۲. ه).

اضافه شدن رنگ در این مدل منجر به بروز ویژگی‌هایی متفاوت از کد چنبره می‌شود. در مورد کد چنبره با شرط مرزی دوره‌ای به علت وجود دو نوع حلقه غیربیدیهی غیرجمع‌پذیر در دو راستای مختلف تبهگنی چهارگانه داشتیم. در مورد کد رنگ، ما چهار حلقه با دو رنگ مختلف بر روی مسیره‌های غیرجمع‌پذیر خواهیم داشت که باعث افزایش تبهگنی حالت پایه به یک تبهگنی ۱۶ گانه در کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌شود. بنابراین اضافه شدن عنصر رنگ در شرایط مرزی یکسان منجر به افزایش تبهگنی کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌شود. علاوه بر این، عنصر رنگ در کد رنگ باعث بالا رفتن توان محاسباتی کد رنگ نسبت به کد چنبره شده است [۱۲].

علی‌رغم تفاوت‌هایی که بین کد چنبره و کد رنگ وجود دارد، شباهت بین ساختار حلقه‌ها نشان دهنده وجود یک رابطه بین این دو کد است. به خصوص دیدیم که در عمل حلقه‌های تشکیل دهنده کد رنگ، مشابه کد چنبره بودند با این تفاوت که دو نوع حلقه با دو رنگ مختلف مورد نیاز بود. بر همین مبنا نشان داده می‌شود که یک تبدیل یکانی موضعی وجود دارد که حالت پایه کد رنگ را به دو نسخه از حالت پایه کد چنبره تبدیل می‌کند. در واقع، از آنجا که حالت‌های توپولوژیکی با درهم‌تنیدگی بلند برد شناخته می‌شوند، اعمال یکانی قادر به



شکل ۲. (الف) کد رنگ روی یک شبکه شش ضلعی دو بعدی. در اینجا کیوبیت‌ها روی رأس‌های وجوه قرار گرفته‌اند و یال‌هایی با یک رنگ مشخص وجوه با همان رنگ را به یکدیگر وصل می‌کنند. به عنوان مثال یال‌های سبز رنگ وجوه سبز را به یکدیگر وصل می‌کند. (ب) عملگرهای وجوه آبی و قرمز توسط شبکه مثلثی سبز رنگ توصیف می‌شود. (ج) عملگرهای وجوه قرمز و سبز توسط شبکه مثلثی آبی رنگ توصیف می‌شود. (د) عملگرهای وجوه آبی و سبز توسط شبکه مثلثی قرمز رنگ توصیف می‌شود. (ه) ضرب عملگرهای وجوه در کد رنگ منجر به ساختار حلقه‌ای می‌شود که از دو رنگ مختلف ساخته شده است.

همایلتونی کد رنگ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{CC} = -J \sum_p B_p^x - J \sum_p B_p^z, \quad (5)$$

که در آن  $P$  به وجه اشاره دارد و  $B_p^x$  و  $B_p^z$  به ترتیب عملگرهای جابه‌جاشونده وجه نوع  $X$  و نوع  $Z$  است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_p^z = \prod_{i \in P} Z_i, \quad B_p^x = \prod_{i \in P} X_i, \quad (6)$$

که  $i \in P$  به کیوبیت‌های متعلق به وجه  $P$  اشاره می‌کند (شکل ۲. الف).

همانند کد چنبره، حالت پایه کد رنگ را می‌توان بر حسب عملگرهای نوع  $X$  به صورت زیر نوشت:

$$|GS\rangle_{CC} = \prod_v (1 + B_v^x) |0\rangle^{\otimes n}, \quad (7)$$

که  $n$  تعداد رأس‌ها در شبکه لانه زنبوری است.

مطابق شکل ۲. ب یک شبکه مثلثی با رنگی دلخواه (مثلاً سبز) را می‌توان بر روی شبکه لانه زنبوری اولیه رسم کرد، به طوری

را خواهد داد. به عبارت دیگر، پایه‌های GHZ ویژه حالات مولدهای  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ ، با ویژه مقادیر مختلف هستند. به این ترتیب ما می‌توانیم همه ۲۶ پایه GHZ را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, \bar{m}_5, \bar{m}_6\rangle = \frac{1}{8} \prod_{i=1}^6 (1 + (-1)^{m_i} g_i) |++++\rangle, \quad (10)$$

که  $m_i = 0, 1$ ها معرف این پایه‌ها هستند. از آنجا که هر عملگر  $g_i$  به یک یال از شبکه منسوب می‌شود، مناسب است که متغیرهای  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, \bar{m}_5, \bar{m}_6$  به صورت نمادین با کیوبیت‌هایی که روی یال‌های شبکه زندگی می‌کنند نشان داده شوند. به این ترتیب از این به بعد کیوبیت‌های فیزیکی کد رنگ را کیوبیت‌های رأس و کیوبیت‌های متناظر با پایه جدید را کیوبیت‌های یال می‌نامیم و به صورت دایره‌هایی متناظر با رنگ یالی که کیوبیت بر روی آن قرار دارد، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. به خصوص از آنجا که هر وجه آبی با یال‌های سبز رنگ و قرمز رنگ احاطه می‌شود، کیوبیت‌های یال نیز به همین دو رنگ خواهند بود. به عنوان مثال در شکل ۳ کیوبیت‌های قرار گرفته بر روی یال‌های وجه آبی رنگ به دو دسته دایره‌های سبز و قرمز متناظر با رنگ یال‌ها تقسیم شده‌اند. به عبارت دیگر کیوبیت‌های  $\bar{m}_1, \bar{m}_3, \bar{m}_5$  و  $(\bar{m}_2, \bar{m}_4, \bar{m}_6)$  را با توجه به رنگ یالی که بر روی آن قرار داده شده‌اند با دایره‌های سبز (قرمز) نشان داده‌ایم. با توجه به این که گروه پایدارساز  $g^{(6)}$  یک زیرگروه از گروه پاولی است، بنابراین حتماً تبدیل یکانی کلیفوردی وجود خواهد داشت که پایه‌های محاسباتی را به پایه‌های GHZ تعریف شده در بالا، تغییر دهد.

#### ۴. هم‌ارزی یکانی بین کد رنگ و کد چنبره

اکنون می‌خواهیم چنین تبدیل یکانی را بر حالت کد رنگ اعمال کنیم. به این منظور بایستی پایدارسازهای کد رنگ را در پایه‌های جدید (۱۰) بازنویسی کنیم و به این ترتیب پایدارسازهای جدیدی خواهیم یافت که مشخص کننده حالت کوانتومی نهایی خواهند بود. توجه به این نکته نیز حائز اهمیت است که چون تبدیل بالا بر روی وجوه آبی رنگی که هیچ کیوبیت مشترکی با هم ندارند، اعمال شده است، نتیجه می‌شود که این تبدیل یک تبدیل موضعی است (شکل ۳).

تغییر درهم‌تنیدگی بلند برد نیستند و نظم توپولوژیکی را تغییر نمی‌دهند. در نتیجه حالت‌های کوانتومی که تحت اعمال یکانی موضعی هم‌ارز هستند، در یک کلاس توپولوژیکی قرار می‌گیرند. در رابطه زیر منظور از یک تبدیل یکانی موضعی بین دو حالت توپولوژیکی را روشن کرده‌ایم.

$$|\Psi\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_N |\Phi\rangle, \quad (8)$$

که  $|\Phi\rangle$  و  $|\Psi\rangle$  متعلق به یک فاز توپولوژیکی هستند و  $U_i$  به عمل‌های یکانی موضعی اشاره دارد. در حالی که وجود تبدیلات یکانی موضعی بین کد رنگ و دو نسخه از کد چنبره به منظور نشان دادن یکسان بودن کلاس توپولوژیکی آنها کافی است، اما این که این تبدیلات صراحتاً چه هستند و به چه میزان درهم‌تنیدگی‌های کوتاه برد را تغییر می‌دهند، کمتر مورد توجه بوده است. این مسئله می‌تواند برای درک تفاوت در قابلیت‌های محاسباتی این دو کد حائز اهمیت باشد. در بخش‌های بعدی این مقاله به معرفی چنین تبدیلاتی که آنها را واهمتنده‌های موضعی می‌نامیم، خواهیم پرداخت.

#### ۳. واهمتنده‌های موضعی GHZ

به منظور معرفی واهمتنده‌های موضعی، وجه آبی رنگ شش کیوبیتی از یک شبکه لانه زنبوری را در نظر بگیرید که کیوبیت‌های آن مطابق الگوی نشان داده شده در شکل ۳ از شماره یک تا شماره شش نامگذاری شده است. یک پایه GHZ برای این شش کیوبیت معرفی می‌کنیم.

حالت GHZ شش کیوبیتی به صورت

$$|\text{GHZ}\rangle_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000000\rangle + |111111\rangle)$$

پایدارساز با مولدهای زیر پایدار می‌شود:

$$g^{(6)} = \{Z_1 Z_2, Z_2 Z_3, Z_3 Z_4, Z_4 Z_5, Z_5 Z_6, Z_6 Z_1, \prod_{i=1}^6 X_i\}. \quad (9)$$

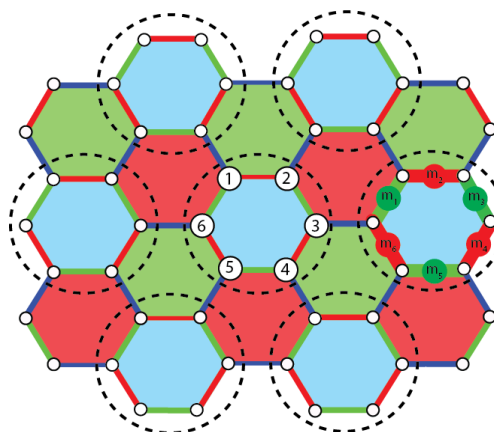
مولدهای بالا را به ترتیب  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$  می‌نامیم. به دلیل این که هر مولد  $g_i$  متناظر با یکی از یال‌های وجه آبی رنگ است ما آنها را عملگر یال  $g_i$  نامگذاری می‌کنیم. با استفاده از این مولدها قادر خواهیم بود حالت‌های دیگر GHZ را برای ایجاد یک پایه کامل شش کیوبیتی بنویسیم. برای مثال حالت  $(|111111\rangle - |000000\rangle) / \sqrt{2}$ ، یکی دیگر از حالت‌های GHZ است با این تفاوت که اثر  $g_6$  بر روی آن، ویژه مقدار -1

داده شده در شکل ۴ به صورت  $(Z_1Z_2)(Z_3Z_4)(Z_5Z_6)$  خواهد بود که عملاً معادل با  $g_1g_3g_5$  است. از طرف دیگر مطابق با رابطه (۱۲) هر  $g_i$  متناظر با عملگر پائولی  $Z_i$  روی کیوبیت یال متناظر است. بنابراین همان طور که در شکل ۴ الف نشان داده‌ایم، پایدارساز نوع  $Z(B_p^z)$  مربوط به وجه قرمز، معادل با ضرب تانسوری سه عملگر  $Z$  روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ است که ما آن را با  $B_p^z(1)$  نمایش می‌دهیم.

حال به پایدارسازهای نوع  $X(B_p^x)$  کد رنگ مربوط به وجه قرمز می‌پردازیم که برابر با ضرب تانسوری عملگرهای پائولی  $X$  روی شش کیوبیت رأس است. ابتدا اثر این عملگرها را بر کیوبیت‌های یال سبز بررسی می‌کنیم. واضح است که وجه قرمز رنگ با همه یال‌های سبز رنگ احاطه کننده آن، دو کیوبیت رأس مشترک دارد و در نتیجه عملگر  $B_p^x$  با همه  $Z_iZ_j$  های متناظر با یال‌های سبز رنگ جابه‌جا می‌شود (شکل ۴. ب) و اثر آن متناظر با عملگر واحد است. اما اثر  $B_p^x$  بر کیوبیت‌های یال قرمز رنگ نیز بایستی بررسی شود. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، وجه قرمز با شش یال قرمزی که به آن وجه وارد می‌شوند، تنها یک کیوبیت مشترک دارد و در نتیجه  $B_p^x$  با  $Z_iZ_j$  های متناظر با یال‌های قرمز پادجابه‌جا می‌شود. به این ترتیب و از آنجا که هر عملگر  $X_i$  در  $B_p^x$  اثری مشابه رابطه (۱۱) را در پایه جدید خواهد داشت نتیجه می‌شود:

$$B_p^x(1 + (-1)^{m_i}Z_iZ_j) = (1 + (-1)^{m_i+1}Z_iZ_j)B_p^x. \quad (13)$$

بنابراین عملگر  $B_p^x$  عملاً نقش عملگر  $\bar{X}$  را روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ ورودی به وجه قرمز بازی می‌کند. در نهایت  $B_p^x$  معادل با یک ضرب تانسوری شش تایی از عملگرهای  $\bar{X}$  روی کیوبیت‌های یال قرمز است که ما آن را با  $B_p^x(1)$  نشان می‌دهیم (شکل ۴. ب). به همین ترتیب یک تبدیل مشابه برای پایدارسازهای متناظر با وجه سبز وجود دارد که طبق آن پایدارسازهای نوع  $Z$  مربوط به وجه سبز معادل با یک ضرب سه تایی از عملگرهای  $Z$  روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ است که ما آن را با  $B_p^z(2)$  نشان می‌دهیم (شکل ۵. الف). پایدارسازهای نوع  $X$  مربوط به وجه سبز نیز به یک ضرب شش تایی از عملگرهای  $\bar{X}$  روی کیوبیت‌های یال سبز نگاشته می‌شود که ما آن را با  $B_p^x(2)$  نشان می‌دهیم (شکل ۵. ب).



شکل ۳. نمایش کیوبیت‌های یال که بر روی یال‌های وجوه آبی تعریف شده‌اند. دایره‌های خط چین مشکی نشانگر موضعی بودن تبدیل GHZ است.

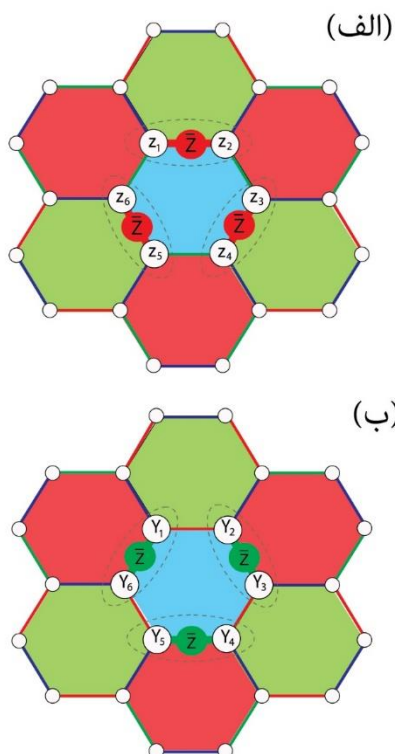
از آنجا که پایه‌های جدید را به وسیله کیوبیت‌های جدید یال نمایش داده‌ایم، به منظور بررسی تبدیل پایدارسازها، باید بررسی کنیم که اثر عملگرهای پائولی روی کیوبیت‌های رأس، در پایه جدید، متناظر با اثر چه عملگری بر کیوبیت‌های یال است. به عنوان مثال برای بررسی یک عملگر پائولی  $X_i$  بر کیوبیت رأس  $i$  ام، به این نکته توجه می‌کنیم که چون  $g_i = Z_iZ_{i+1}$  پس  $X_i g_i = -g_i X_i$  و در نتیجه اثر  $X_i$  بر عبارت  $(1 + (-1)^{m_i}g_i)$  در پایه GHZ (۱۰) به صورت زیر خواهد بود:

$$X_i(1 + (-1)^{m_i}g_i) = (1 + (-1)^{m_i+1}g_i)X_i. \quad (11)$$

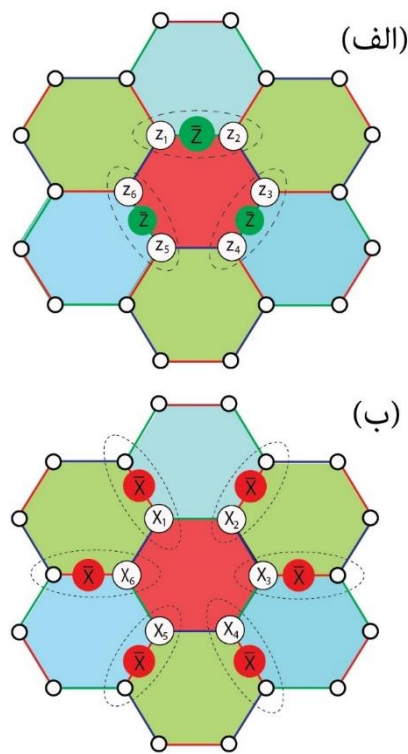
از آنجا که  $(+|+) = |++\rangle$ ، نتیجه می‌شود که اثر  $X_i$  معادل با یک عملگر بالا برنده یا یک عملگر پائولی  $\bar{X}$  بر کیوبیت یال  $(\bar{m}_i)$  است. مثال ساده دیگر اثر عملگر  $g_i = Z_iZ_{i+1}$  بر پایه (۱۰) است. از آنجا که

$$g_i(1 + (-1)^{m_i}g_i) = (-1)^{m_i}(1 + (-1)^{m_i}g_i), \quad (12)$$

به سادگی نتیجه می‌شود که اثر  $g_i$  بر پایه GHZ معادل با یک عملگر فاز یا عملگر پائولی  $Z$  بر کیوبیت یال  $(\bar{m}_i)$  است. خوشبختانه همین دو مثال ساده بالا به ما کمک خواهد کرد تا همه پایدارسازهای کد رنگ را بر حسب عملگرهای پائولی جدیدی بر کیوبیت‌های یال بنویسیم. همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده است ابتدا پایدارسازهای نوع  $Z$  و نوع  $X$  متناظر با یک وجه شش ضلعی قرمز متعلق به کد رنگ را در نظر می‌گیریم. پایدارسازهای نوع  $Z(B_p^z)$  قرمز را به صورت ضرب  $Z_iZ_j$  ها متناظر با یال‌های سبز می‌نویسیم که برای وجه نشان

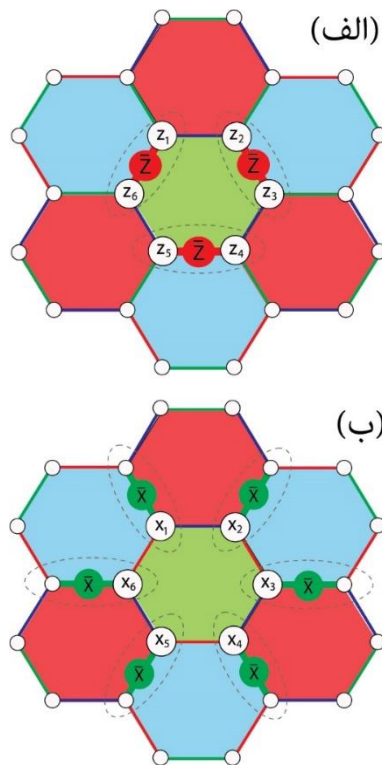


شکل ۶. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع  $Z$  مربوط به وجه آبی به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع  $Z$  روی کیوبیت‌های سبز (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع  $Y$  مربوط به رأس آبی به ضرب ۳ تایی از عملگرهای پاولی نوع  $Z$  روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ.



شکل ۴. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع  $Z$  مربوط به وجه قرمز به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع  $Z$  روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ و (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع  $X$  مربوط به رأس قرمز به ضرب ۶ تایی از عملگرهای پاولی نوع  $X$  روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ.

در نهایت تبدیلی مشابه را برای پایدارسازهای متناظر با وجه آبی رنگ در نظر می‌گیریم. در مورد پایدارساز نوع  $Z$  برای وجه آبی رنگ، نداشت پایدارسازها شبیه به دیگر وجوه است، به این معنا که پایدارسازهای نوع  $Z$  مربوط به وجه آبی رنگ معادل با یک ضرب سه تایی از عملگرهای نوع  $Z$  روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ است که با  $B_p^Z(3)$  مشخص می‌کنیم (شکل ۶. الف). با این حال اثر پایدارساز نوع  $X$  بدیهی است، به این معنا که به دلیل این که این نوع پایدارساز با همه عملگرهای  $g_i$  جابه‌جا می‌شود، به عملگر یکانی روی کیوبیت‌های یال نگاشته خواهد شد. اما می‌دانیم که یک ضرب از پایدارسازهای نوع  $X$  و نوع  $Z$  که  $B_p^Y$  نامیده می‌شود یک عضو از گروه پایدارساز مربوط به کد رنگ است. اگر چنین عملگری را به شکل  $(Z_2 Z_3)(Z_4 Z_5)(Z_6 Z_1 B_x^p)$  بنویسیم، معادل با  $g_2 g_4 g_6$  خواهد بود. در چنین شرایطی، اثر این عملگر بر روی پایه‌های  $GHZ$ ، معادل با حاصل ضرب سه عملگر  $Z$  روی کیوبیت‌های قرمز رنگ است که ما آن را با  $B_p^Y(3)$  نشان می‌دهیم (شکل ۶. ب). در نتیجه اگر تبدیل مورد نظرمان را به همه پایدارسازهای کد



شکل ۵. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع  $Z$  مربوط به وجه سبز به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع  $Z$  روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ و (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع  $X$  مربوط به وجه سبز به ضرب ۶ تایی از عملگرهای پاولی نوع  $X$  روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ.

روی شبکه لانه زنبوری به دو نسخه واهمیتیده از کدهای چنبره روی دو شبکه مثلثی (قرمز و سبز) تبدیل می شود به طوری که رأس های شبکه های مثلثی در وسط وجوه شش ضلعی با رنگی غیر از آبی (در اینجا سبز و قرمز) قرار گرفته اند. با توجه به تقارن مسئله واضح است که اگر وجهی با رنگی دیگر مثلاً رنگ قرمز را انتخاب کرده و این تبدیل را انجام می دادیم کدهای چنبره به وجود آمده همانند قبل بر روی شبکه های مثلثی تعریف می شدند که رأس های شبکه، این بار درون وجوهی با رنگی غیر از قرمز قرار می گرفتند. همین روند برای وجه شش ضلعی سبز رنگ نیز صادق است که تبدیل GHZ بر روی کیوبیت های واقع بر شش ضلعی سبز، کد رنگ را به دو نسخه از کدهای چنبره مثلثی تبدیل می کند که رأس شبکه های مثلثی در وسط وجوه با رنگ های قرمز و آبی قرار دارند. دوباره یادآور می شویم که چون شبکه های مثلثی نهایی هیچ کیوبیت مشترکی ندارند لذا کدهای چنبره تعریف شده بر روی آنها کاملاً از هم واهمیتیده هستند. شبکه های ثانویه ایجاد شده بر روی شبکه اولیه را شبکه های دوگان می نامیم. شبکه دوگان تعریف شده بر روی کد رنگ شبکه ای است که رأس های آن در وسط وجوه شبکه اولیه با یک رنگ خاص قرار گرفته و یال های آن منطبق بر یال هایی با همان رنگ از شبکه اولیه است. شبکه دوگانی را که بر روی یک کد رنگ دو بعدی تعریف می شود با سه رنگ مختلف، متناظر با رنگ وجوهی که رأس های شبکه دوگان در آن قرار گرفته، رنگ آمیزی می کنیم. همان طور که در شکل ۲ می بینید شبکه لانه زنبوری سه شبکه دوگان مثلثی خواهد داشت که با سه رنگ آبی، قرمز و سبز مشخص شده است. رأس های هر کدام از شبکه های دوگان درون وجوه شش ضلعی با همان رنگ واقع شده است. متناظر با این که تبدیل GHZ ما بر روی کدام رنگ از وجوه شش ضلعی کد رنگ اعمال شده، کد چنبره بر روی شبکه های دوگانی با رنگ های دیگر تعریف می شود. با توجه به این که روش ما مبتنی بر تغییر پایه است، این روش، قابل تعمیم به حالت های کد رنگ روی هر شبکه دو بعدی سه رنگ پذیر دلخواه خواهد بود.

رنگ اعمال کنیم، پایدار سازها به دو دسته متناظر با کیوبیت های یال قرمز و سبز تبدیل می شوند که در آن  $B_p^z(1)$ ،  $B_p^x(2)$  و  $B_p^z(3)$  به کیوبیت های یال سبز و  $B_p^x(1)$ ،  $B_p^z(2)$  و  $B_p^y(3)$  به کیوبیت های یال قرمز اعمال می شوند. این بدین معنی است که تحت تبدیل یکانی انجام شده، حالت کد رنگ به یک حالت ضربی از دو حالت پایدار ساز متناظر با کیوبیت های یال قرمز و سبز تبدیل شده است.  $B_p^z(1)$ ،  $B_p^x(2)$  و  $B_p^z(3)$  پایدار سازهای یک حالت پایدار شده متناظر با کیوبیت های یال سبز است.

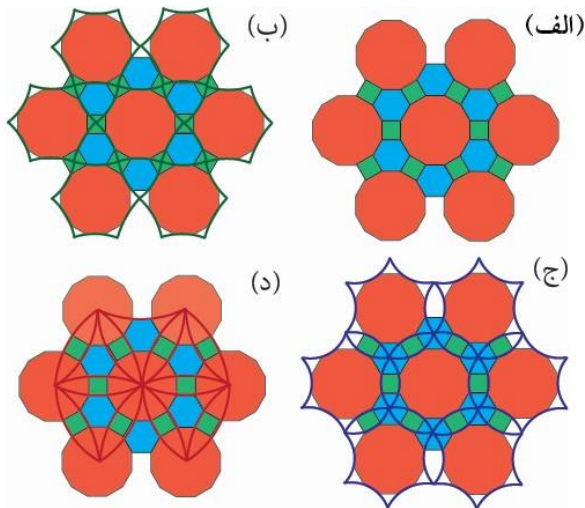
همان طور که در شکل ۲. ب مشاهده می کنید، کیوبیت های یال سبز رنگ بر روی یال های یک شبکه مثلثی قرار دارند که رأس های این شبکه مثلثی در مرکز وجوه سبز شبکه لانه زنبوری اولیه واقع شده است.  $B_p^z(1)$  و  $B_p^z(3)$  متناظر با پایدار سازهای وجه کد چنبره تعریف شده بر روی شبکه مثلثی و  $B_p^x(2)$  متناظر با پایدار سازهای رأس کد چنبره روی شبکه مثلثی است. بنابراین حالت پایدار ساز روی کیوبیت های یال سبز رنگ با حالت کد چنبره روی شبکه مثلثی یکسان است. به روشی مشابه به آسانی می توان نشان داد که حالت پایدار ساز متناظر با کیوبیت های یال قرمز رنگ نیز با حالت کد چنبره روی شبکه مثلثی که رئوس آن در مرکز وجوه قرمز رنگ شبکه لانه زنبوری اولیه قرار دارد، یکسان است (شکل ۲. ج و ۲. د).

این کدهای چنبره ایجاد شده بر روی شبکه مثلثی سبز (شامل کیوبیت های یال سبز) و شبکه مثلثی قرمز (شامل کیوبیت های یال قرمز) هیچ کیوبیت مشترکی با هم ندارند بنابراین این دو کد چنبره کاملاً از هم واهمیتیده هستند. با این روش، ما به سادگی اثبات کردیم که یک حالت کد رنگ روی شبکه لانه زنبوری معادل با دو نسخه واهمیتیده از کدهای چنبره تعریف شده روی شبکه های مثلثی است.

## ۵. تبدیل GHZ به عنوان یک نگاشت دوگان بر روی کدهای کوانتومی

همان طور که در قسمت قبل نشان دادیم با انتخاب یک وجه با رنگی دلخواه (در اینجا وجه آبی رنگ) از شبکه لانه زنبوری و اعمال تبدیل GHZ روی کیوبیت های متعلق به آن، کد رنگ



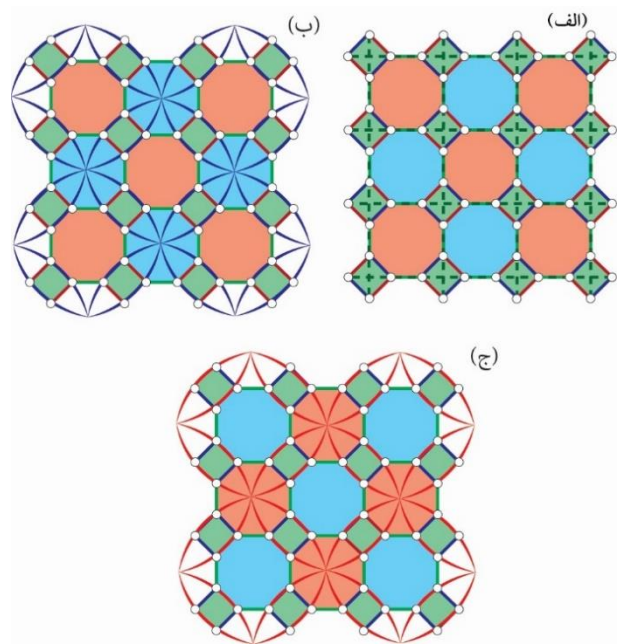


شکل ۸. (الف) شبکه ۴.۶.۱۲ با وجوه سبز، آبی و قرمز، (ب) شبکه دوگان سبز رنگ با رأس‌هایی واقع در وجوه سبز، (ج) شبکه دوگان آبی با رأس‌هایی واقع در وجوه آبی و (د) شبکه دوگان قرمز با رأس‌هایی واقع در وجوه قرمز رنگ.

به عبارت دیگر در اینجا نیز اگر تبدیل GHZ را به عنوان یک نگاشت دوگان در نظر بگیریم با توجه به این که شبکه ۴.۸.۸ سه شبکه دوگان (یک شبکه مربعی و دو شبکه ستاره‌ای) دارد بسته به این که تبدیل GHZ بر روی کیوبیت‌های متعلق به کدام وجه اعمال می‌شود، کد رنگ به نسخه‌هایی از کد چنبره تبدیل می‌شود به طوری که رأس‌های کد چنبره بر روی وجوهی با رنگی متفاوت از رنگ وجهی که تبدیل GHZ بر روی آن اثر کرده، قرار می‌گیرند.

به عنوان یک مثال دیگر در شکل ۸، شبکه ۴.۶.۱۲ که سه شبکه دوگان با سه ساختار مختلف است را نشان داده‌ایم [۴۵]. در اینجا نیز همانند قبل با اعمال تبدیل GHZ روی کیوبیت‌های واقع بر یک نوع از وجوه، کد چنبره‌ای روی شبکه دوگان ایجاد خواهد شد. متناظر با این که تبدیل GHZ بر روی کدام وجه اعمال شده است کد چنبره بر روی دو تا از سه نوع شبکه دوگان قابل تعریف بر روی شبکه اولیه ۴.۶.۱۲ ایجاد می‌شود (شکل ۸).

بنابراین تبدیل GHZ یک نگاشت دوگان بین کد رنگ دو بعدی و کد چنبره دوبعدی است، به طوری که از ساختار دوگان شبکه‌ها تبعیت می‌کند. این مسئله به خصوص از این نظر مهم است که امکان مقایسه الگوی درهم‌تنیدگی بین کدهای رنگ روی شبکه‌های مختلف را فراهم می‌کند. به بیان دیگر در حالی



شکل ۷. (الف) شبکه دوگان مربعی سبز رنگ با رأس‌هایی واقع در وجوه سبز رنگ شبکه اولیه، (ب) و (ج) شبکه دوگان ستاره‌ای آبی (قرمز) با رأس‌هایی واقع در وجوه آبی (قرمز).

به عنوان مثال کد رنگ در شکل ۷ بر روی یک شبکه ۴.۸.۸ که دو نوع ساختار هشت ضلعی و مربعی دارد تعریف شده است [۱۲، ۴۳ و ۴۴]. همانند قبل در اینجا نیز با اعمال تبدیل GHZ که متناظر با یک الگوی خاص از تبدیلات یکانی موضعی بر روی یک وجه با رنگی خاص است، کد رنگ به دو نسخه از کدهای چنبره نگاشته می‌شود.

با این حال بسته به این که تبدیل GHZ به کدام نوع وجه (هشت ضلعی یا مربعی) اعمال شود کد چنبره بر روی شبکه‌های مختلفی از نظر ساختار ایجاد می‌شود.

به عنوان مثال اگر تبدیل GHZ به کیوبیت‌های متعلق به وجه مربعی اعمال شود کد چنبره بر روی شبکه‌های ستاره‌ای با رنگ‌های قرمز و آبی واقع خواهد شد که این شبکه‌ها، دوتا از سه شبکه دوگان قابل تعریف بر روی شبکه اولیه ۴.۸.۸ است. از طرفی از آنجا که دو نوع وجه هشت ضلعی با دو رنگ مختلف در شبکه ۴.۸.۸ وجود دارد، اگر تبدیل GHZ را به وجوه هشت ضلعی متناظر با یکی از رنگ‌ها اعمال کنیم، این الگو، کد رنگ را به دو کد چنبره بر روی شبکه مربعی سبز و شبکه ستاره‌ای با رنگی دیگر تبدیل می‌کند.

امکان مقایسه درهمنیدگی کوتاه برد در کد چنبره با کد رنگ را فراهم می‌کند که به منظور بررسی تفاوت‌های مهم این دو کد کوانتومی مفید است. قابل ذکر است که این کار می‌تواند برای یافتن مدارهای کوانتومی به منظور تبدیل کدهای کوانتومی رنگ و چنبره به یکدیگر نیز به کار آید. ما نشان دادیم که این روش قابل تعمیم به انواع شبکه‌های دو بعدی سه رنگ‌پذیر مثل شبکه‌های ۴.۸.۸ و ۴.۶.۱۲ نیز است. به خصوص، با معرفی سه نوع شبکه دوگان متناظر با سه رنگ از شبکه‌های سه رنگ‌پذیر مربوط به کد رنگ، نشان دادیم که تبدیل بین کد رنگ و کد چنبره به نوعی می‌تواند به عنوان یک نگاشت دوگان تلقی شود. در همین راستا دیدیم که تبدیل GHZ بر روی کد رنگ لانه زنبوری آن را به نسخه‌هایی از کد چنبره بر روی سه ساختار یکسان تبدیل می‌کند. این در حالی است که این تبدیل، کد رنگ روی شبکه ۴.۸.۸ را به دو ساختار متفاوت و شبکه ۴.۶.۱۲ را به سه ساختار متفاوت می‌نگارد. این تفاوت در ساختارهای دوگان برای کدهای رنگ لانه زنبوری و ۴.۸.۸ و ۴.۶.۱۲ می‌تواند برای درک تفاوت‌های بین این کدها نیز راهگشا باشد.

که همه کدهای رنگ توسط واهمتتنده‌ها در نهایت به دو کد چنبره تبدیل می‌شوند اما ساختار شبکه‌های دوگان مربوط به کدهای چنبره با یکدیگر تفاوت دارند و در نتیجه الگوی درهمنیدگی، متفاوت خواهد بود. این مسئله می‌تواند توضیحی برای تفاوت بین قابلیت‌های کدهای رنگ روی شبکه‌های مختلف دو بعدی باشد [۱۲].

## ۶. نتیجه‌گیری

در حالی که اثبات وجود تبدیلاتی موضعی بین کدهای کوانتومی توپولوژیکی، در فهم مشابه بودن نظم توپولوژیکی آنها راهگشا است، اما شناخت و معرفی صریح این تبدیلات به منظور درک تفاوت‌های بین این کدها ضروری است. بر این اساس، در این مقاله به بررسی هم‌ارزی بین کدهای کوانتومی توپولوژیکی چنبره و کد رنگ پرداختیم و با معرفی واهمتتنده‌های GHZ نشان دادیم که کد رنگ با اعمال چنین تبدیلاتی به دو کد چنبره تبدیل می‌شود. به ویژه، با توجه به ماهیتی با پیشینه درهمنیدگی برای حالت‌های GHZ، نتیجه ما

## مراجع

1. H Jiang, Z Wang, and L Balents, *Nature Phys.* **8** (2012) 902.
2. S Sachdev, "*Quantum Phase Transition*", Cambridge University Press. (2011) 2nd ed.
3. L Carr, "*Understanding Quantum Phase Transitions*". CRC Press. (2010).
4. B Kraus, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 020504.
5. B Kraus, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 032121.
6. B Liu, J L Li, X Li, and C F Qiao, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 050501.
7. M Grassl, M Rotteler, and T Beth, *Phys. Rev. A* **58** (1998) 1833.
8. X -G Wen, *ISRN Condensed Matter Physics*, (2013). Article ID 198710, 20 pages.
9. M Levin and X G Wen, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 11 (2006) 110405.
10. E Dennis, A Kitaev, A Landahl, and J Preskill, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 4452.
11. A Y Kitaev, *Ann. Phys.* **303** (2007) 160502.
12. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 160502.
13. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 180501.
14. B J Brown, D Loss, J K. Pachos, C N Self, and J R Wootton, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 045005.
15. A Y Kitaev, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2** (2003) 303.
16. C L Kane and E J Male, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 14.
17. S Trebst, P Werner, M Troyer, K Shtengel, and C Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070602.
18. J Vidal, S Dusuel, and K P Schmidt, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 033109.
19. J Vidal, R Thomale, K P Schmidt, and S Dusuel, *Phys. Rev. B* **80** (2009) 081104.
20. I S Tupitsyn, A Kitaev, N V Prokofev, and P C E Stamp, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 085114.
21. F Wu, Y Deng, and N Prokof'ev, *Phys. Rev. B* **85** (2012) 195104.
22. M H Zarei, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 022319.
23. M H Zarei, *Phys. Rev. B* **96** (2017) 165146.
24. M H Zarei and A Montakhab, *Phys. Rev. A* **99** (2019) 052312.
25. C Castelnovo and C Chamon, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 054433.
26. A Jamadagni, H Weimer, A Bhattacharyya, *Phys. Rev. B* **98** (2018) 235147.

27. A Hamma and D A Lidar, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 030502.
28. S Dusuel, M Kamfor, R Orus, K P Schmidt, and J Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 107203.
29. S.S. Jahromi, M. Kargarian, S. F. Masoudi and K.P. Schmidt, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 094413.
30. H Bombin and M A Martin-Delgado, *J. Phys. A: Math. Theor* **42** (2009) 095302.
31. H Bombin, *New J. Phys.* **17** (2015) 083002.
32. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. B* **75** (2007) 075103.
33. S Bravyi and R Konig, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 170503.
34. A Kubica, B Yoshida, and F Pastawski, *New J. Phys.* **17** (2015) 083026.
35. A B Alosious and P K Sarvepalli, *Phys. Rev. A* **98** (2018) 012302.
36. A Kubica and N Delfosse, Efficient color code decoders in  $d \leq 2$  dimensions from toric code decoders, arXiv preprint arXiv:1905.07393 (2019).
37. H Bombin, G Duclos-Cianci, and D Poulin, *New J. Phys.*, **14** (2012) 073048.
38. N Delfosse, *Phys. Rev. A* **89** (2014) 012317.
39. A B Alosious and P K Sarvepalli, *Phys. Rev. A* **100** (2019) 042312.
40. A Bhagoji and P Sarvepalli, *2015 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, **1** (2015) 1109.
41. M H Zarei, *Phys. Rev. A* **93**(4) (2016) 042306.
42. M H Zarei and M R Haghighi, *Phys. Rev. B* **108** (2023) 035116.
43. P Parrado-Rodriguez, M Rispler, and M Muller, *Phys. Rev. A* **106** (2021) 032431.
44. A J Landahl and C Ryan-Anderson, *arXiv: 1407.5103* (2014).
45. D Amaro, J Bennett, D Vodola and M Muller, *Phys. Rev. A* **101** (2020) 032317.