

## اثرات بازنشانی تصادفی بر دینامیک یک گشت تصادفی غیرمارکوف

حمید وزینی حکمت و فرهاد جعفرپور همدانی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان

پست الکترونیکی: f.jafarpour@basu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۱۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۱۱/۰۴)

### چکیده:

بازنشانی یا راه‌اندازی مجدد در فیزیک فرایندهای تصادفی به اشکال متفاوت تعریف می‌شود. در این پژوهش یک گشت تصادفی یک-بعدي غیرمارکوف را در نظر می‌گیریم. در اینجا بازنشانی دینامیک سامانه را به نحوی تغییر می‌دهد که سامانه پس از بازنشانی ضمن از دست دادن تمام حافظه، به نقطه مشخصی در فضای پیکربندی می‌رود تا از آن نقطه مجدداً شروع به تحول کند. در راستای مطالعه این سامانه غیرمارکوف به محاسبه تحول زمانی ممان‌ها و نیز رفتار زمان‌بلند آنها خواهیم پرداخت و اثرات بازنشانی را بررسی خواهیم کرد. محاسبات تحلیلی زمان‌بلند نشان می‌دهند که تابع توزیع احتمال در فضای پیکربندی به یک حالت پایا می‌رسد. از سوی دیگر حالت پایای سامانه هرگز به ازای هیچ مقداری از احتمال بازنشانی، توزیع گوسی نخواهد داشت. نشان خواهیم داد که بر خلاف حالت بدون بازنشانی ممان‌ها در زمان‌های بلند اشباع می‌شوند. این موضوع با انجام شبیه‌سازی مونت‌کارلو نیز تأیید شده است.

**واژه‌های کلیدی:** بازنشانی، گشت تصادفی، فرایند غیرمارکوف، پابرجایی، معادله اصلی

آنها بازنشانی رخ می‌دهد از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است.

### ۱. مقدمه

در این مقاله به بررسی نقش بازنشانی در یک گشت تصادفی غیرمارکوف یک-بعدي که در آن احتمال برداشتن هر گام به کل تاریخچه تحول بستگی دارد می‌پردازیم. فرایند غیرمارکوف، فرایندی است که در آن گذشته سامانه نقش تعیین‌کننده‌ای در تحول سامانه در آینده دارد. این مدل از گشت تصادفی غیرمارکوف بدون حضور بازنشانی، مدلی است که قبلاً توسط شوتر و تریمپر معرفی و مطالعه شده است و از معدود مدل‌های غیرمارکوف است که حل تحلیلی دارد [۵]. در این مدل، متحرک (که از این پس ذره می‌نامیم) یک گشت تصادفی بر روی فضا-زمان گسسته انجام می‌دهد. ذره برای برداشتن هر قدم به قدم‌های قبلی خود نگاه و از میان قدم‌هایی که در حافظه

بازنشانی<sup>۱</sup> که در دهه‌های اخیر مورد توجه محققان در حوزه مکانیک آماری و فیزیک فرایندهای تصادفی قرار گرفته [۱]، پدیده‌ای است که در بسیاری از رخداد‌های روزانه دیده می‌شود. برای مثال بحران‌های مالی ممکن است منجر به سقوط بازار سهام شود و در نتیجه قیمت‌ها به سطوح گذشته بازگردند که این خود مثال بارزی از بازنشانی در اقتصاد است [۲]. بازنشانی بخش جدایی‌ناپذیر فرایندهای جستجو است. به عنوان مثال شرایط آب و هوایی نامناسب تیم‌های جستجو را مجبور به بازگشت به پایگاه می‌کند [۳]. همچنین گرسنگی و خستگی حیوانات جستجوگر را به پناهگاه‌های خود باز می‌گرداند [۴]. از این رو مطالعه فرایندهایی که در

زمان‌های بلند متوسط جابه‌جایی به سمت صفر میل می‌کند یعنی ذره به‌طور متوسط در نقطه شروع باقی می‌ماند. در نقطه گذار  $\alpha_c = 0$  (که دینامیک ذره معادل با یک گشت تصادفی مارکوف معمولی است) متوسط جابه‌جایی مستقل از زمان و برابر  $\beta \equiv 2q - 1$  است. همچنین رابطه بازگشتی برای ممان اول جابه‌جایی به‌صورت زیر به‌دست آمده است [۵]:

$$\langle x_{t+1} \rangle = \langle x_t \rangle \left( 1 + \frac{\alpha}{t} \right). \quad (4)$$

با توجه به آن که برای اولین گام داریم  $\langle x_1 \rangle = \langle \sigma_1 \rangle = \beta$  می‌توان رابطه بازگشتی بالا را حل کرد و به نتیجه زیر رسید:

$$\langle x_t \rangle = \beta \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(t)}. \quad (5)$$

برای ممان دوم جابه‌جایی رابطه بازگشتی به‌صورت زیر به‌دست آمده است [۵]:

$$\langle x_{t+1}^2 \rangle = \langle x_t^2 \rangle \left( 1 + \frac{2\alpha}{t} \right) + 1. \quad (6)$$

متوسط مربع جابه‌جایی برای اولین گام مستقل از  $\beta$  است. با توجه به این که  $\langle x_1^2 \rangle = \langle \sigma_1^2 \rangle = 1$  است می‌توان رابطه بازگشتی بالا را حل کرد و به نتیجه زیر رسید:

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{t}{2\alpha-1} \left( \frac{\Gamma(t+2\alpha)}{\Gamma(t+1)\Gamma(2\alpha)} - 1 \right). \quad (7)$$

در رژیم فرار  $\alpha > 0$  دو زیر-رژیم داریم که در آن به ازای  $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}$  یا  $\frac{3}{4} < p < \frac{1}{2}$  رفتار مجانبی ممان دوم جابه‌جایی به‌صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد در حالی که به ازای  $\frac{1}{4} > \alpha$  یا  $p > \frac{3}{4}$  سریع‌تر از خطی افزایش می‌یابد [۶]. نمای هرست  $H$  که یک ویژگی مهم و جهان‌شمول هرگشت تصادفی محسوب می‌شود، نحوه پابرجایی<sup>۵</sup> پخش ذره را توصیف می‌کند. نمای هرست را می‌توان با استفاده از رفتار مقیاسی متوسط مربع جابه‌جایی با زمان به صورت  $\langle x_t^2 \rangle \sim t^{2H}$  تعیین کرد. برای پخش معمولی  $H = \frac{1}{2}$  و برای رفتار ابرپخش<sup>۶</sup>  $H > \frac{1}{2}$  است که منجر به پابرجایی می‌شود [۷ و ۸]. در مرجع [۷] نشان داده شده‌است در صورتی که ذره تمام حافظه خود را به یاد آورد فقط به ازای  $\alpha > 0$  (رفتار سنت‌گرا)، پابرجایی را می‌توان مشاهده کرد و هرگز به ازای  $\alpha < 0$  (رفتار اصلاح‌طلب) پابرجایی مشاهده نمی‌شود. این در حالی است که

خود ثبت کرده یک قدم را با توزیع یکنواخت انتخاب می‌کند. سپس قدم انتخاب شده را با احتمال  $p$  می‌پذیرد و در جهت قدم انتخاب شده حرکت می‌کند یا با احتمال  $1-p$  در خلاف جهت قدم انتخاب شده قدم برمی‌دارد. با این تعاریف معادله تحول سامانه به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$X_{t+1} = X_t + \sigma_{t+1}, \quad (1)$$

که در آن مکان ذره در زمان  $t$  و  $\sigma_{t+1} = \pm 1$  یک متغیر تصادفی است. حافظه سامانه تا گام  $t$  از مجموعه متغیرهای تصادفی  $\sigma_{t'} (t' \in \{1, 2, 3, \dots, t\})$  مربوط به تمام قدم‌های قبلی که ذره به یاد می‌آورد، تشکیل شده‌است. حال مقدار  $\sigma_{t'}$  به شرح زیر تعیین می‌شود:

۱- در گام  $t+1$  قدم  $t'$  از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, t\}$  به صورت تصادفی با احتمال  $\frac{1}{t}$  انتخاب می‌شود.

۲- مقدار  $\sigma_{t+1}$  با دستور زیر تعیین می‌شود:

$$\sigma_{t+1} = \begin{cases} \sigma_{t'} & \text{با احتمال } p \\ -\sigma_{t'} & \text{با احتمال } 1-p \end{cases}. \quad (2)$$

فرض می‌کنیم ذره در  $t=0$  از نقطه  $X$  شروع به حرکت می‌کند و گام اول در  $t=1$  را با احتمال  $q$  به سمت راست و با احتمال  $1-q$  به سمت چپ برمی‌دارد. با تعریف  $\alpha \equiv 2p - 1$  احتمال شرطی حضور ذره در لحظه  $t+1$  در مکان  $Y$  از معادله اصلی<sup>۱</sup> زیر به‌دست می‌آید [۵]:

$$P(Y, t+1 | X_0, 0) = \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{t} (Y - X_0 + 1) \right] P(Y+1, t | X_0, 0) + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{t} (Y - X_0 - 1) \right] P(Y-1, t | X_0, 0).$$

نشان داده شده‌است که تابع توزیع بالا به ازای  $\alpha > 0$  گوسی نیست [۶]. جابه‌جایی ذره نسبت به مکان اولیه را به صورت  $x_t \equiv Y - X$  تعریف می‌کنیم. در بررسی ممان اول جابه‌جایی به نتایج زیر رسیده‌اند:

به ازای  $\alpha > 0$  (رفتار سنت‌گرا<sup>۲</sup>) متوسط جابه‌جایی تا بی‌نهایت افزایش می‌یابد. به ازای  $\alpha < 0$  (رفتار اصلاح‌طلب<sup>۳</sup>) در

۱. Master Equation
۲. Traditionalist
۳. Reformer
۴. Escape Regime
۵. Persistent
۶. Superdiffusive

معادله مادر در حضور بازنشانی بسیار پیچیده‌تر از حالت بدون بازنشانی است و لذا یافتن حل تحلیلی برای آن تقریباً غیرممکن است. با این حال بررسی تابع توزیع احتمال جابه‌جایی ذره برای تمام مقادیر  $\alpha$  نشان می‌دهد که این تابع توزیع شکل گوسی ندارد و نیز در زمان‌های طولانی به حالت پایا می‌رسد. در عدم حضور بازنشانی ماهیت گسسته بودن فضا باعث صفر شدن احتمال حضور ذره در برخی مکان‌ها می‌شود (برای مثال اگر  $t$  زوج باشد احتمال حضور در مکان‌های فرد برابر صفر است). این در حالی است که حضور بازنشانی باعث می‌شود احتمال حضور در این جایگاه‌ها مقدار پیدا کند. همچنین احتمال حضور در جایگاه‌هایی که از مکان بازنشانی دور هستند در تمام زمان‌ها بسیار ناچیز است. در بخش بعدی به مطالعه تحول زمانی تابع توزیع احتمال جابه‌جایی ذره خواهیم پرداخت.

## ۲.۱. تحول زمانی تابع توزیع احتمال مکان ذره

برای به دست آوردن احتمال حضور ذره در مکان  $Y$  در زمان  $t+1$  باید به زمان آخرین بازنشانی توجه کنیم. در ادامه  $P_r$  (به معنای تابع توزیع احتمال در عدم حضور بازنشانی (حضور بازنشانی) در دینامیک ذره است. در این صورت خواهیم داشت:

۱- اگر آخرین بازنشانی در زمان  $t+1 = t^*$  رخ دهد، احتمال آن که ذره در مکانی به غیر از  $Y = X'$  باشد صفر است لذا:

$$P_r(Y, t+1 | X_0, \circ) = r \delta_{Y, X'} \quad (11)$$

۲- اگر آخرین بازنشانی در زمان  $t^* = t$  باشد حافظه کاملاً پاک شده و ذره نمی‌تواند قدمی را از گذشته خود انتخاب کند لذا:

$$P_r(Y, t+1 | X_0, \circ) = r(1-r) \times [qP_r(Y-1, t) + (1-q)P_r(Y+1, t)], \quad (12)$$

که در آن برای زمان  $t$  داریم  $P_r(Y+1, t) = \delta_{Y+1, X'}$  و نیز  $P_r(Y-1, t) = \delta_{Y-1, X'}$

۳- اگر آخرین بازنشانی در هر زمان دیگری باشد:

$$P_r(Y, t+1 | X_0, \circ) = \sum_{t'=1}^{t-1} r(1-r)^{t-t'+1} \times \quad (13)$$

$$\left[ \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{\alpha}{t-t'} (Y - X' + 1) \right] P_0(Y+1, t | X', t') + \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{\alpha}{t-t'} (Y - X' - 1) \right] P_0(Y-1, t | X', t') \right].$$

۴- در صورتی که در طول فرایند بازنشانی رخ نداده باشد:

اگر ذره فقط کسر کوچک آغازین از حافظه خود را به یاد آورد می‌توان پابرجایی را با رفتار اصلاح طلب هم مشاهده کرد. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که بازنشانی که حافظه ذره را نیز پاک می‌کند، چه اثری بر پابرجایی می‌گذارد؟ آیا پابرجایی مشاهده شده در رفتار سنت‌گرا را از بین می‌برد یا باعث می‌شود پابرجایی در رفتار اصلاح طلب هم مشاهده شود؟ در بخش‌های بعدی به این سؤالات پاسخ خواهیم داد.

## ۲.۲. دینامیک ذره تحت اثرات بازنشانی

در غیاب بازنشانی، ذره یک گشت تصادفی غیرمارکوف همانند مرجع [۵] انجام می‌دهد. حال فرض می‌کنیم هر بار که بازنشانی رخ می‌دهد ذره حافظه‌اش پاک می‌شود و از نقطه بازنشانی تحول خود را آغاز می‌کند. در حضور بازنشانی معادله تحول مکان ذره به صورت زیر داده می‌شود:

$$X_{t+1} = \begin{cases} X' & \text{با احتمال } r \\ X_t + \sigma_{t+1} & \text{با احتمال } 1-r \end{cases} \quad (8)$$

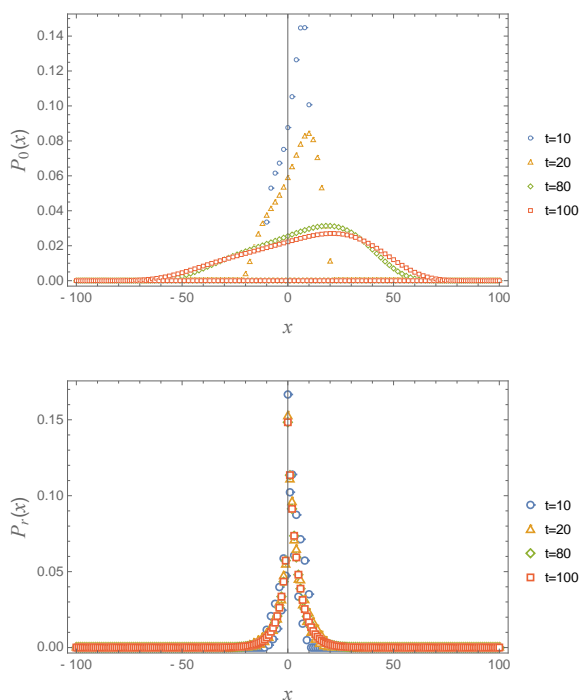
که در آن  $X'$  مکانی است که ذره به آنجا بازنشانی می‌شود. در گام نخست  $t=1$  در صورتی که بازنشانی رخ ندهد، ذره از نقطه  $X$  شروع به حرکت می‌کند و با احتمال  $(1-r)q$  به سمت راست و با احتمال  $(1-r)(1-q)$  به سمت چپ قدم بر می‌دارد. برای سایر گام‌ها در صورتی که در گام مورد نظر بازنشانی رخ ندهد، زمان آخرین بازنشانی نقش اساسی دارد. اگر  $t^*$  زمان آخرین بازنشانی باشد در این صورت دو حالت زیر پیش می‌آیند:

۱- اگر  $t^* = t$  باشد:

$$\sigma_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{با احتمال } (1-r)q \\ -1 & \text{با احتمال } (1-r)(1-q) \end{cases} \quad (9)$$

۲- اگر  $t^* \neq t$  باشد: حافظه فقط شامل قدم‌های بعد از  $t^*$  است. بنابراین قدم  $t'$  از مجموعه  $\{t^*+1, t^*+2, \dots, t\}$  به صورت تصادفی با احتمال  $\frac{1}{t-t^*}$  انتخاب می‌شود و مقدار  $\sigma_{t+1}$  با دستور زیر تعیین می‌شود:

$$\sigma_{t+1} = \begin{cases} \sigma_{t'} & \text{با احتمال } (1-r)p \\ -\sigma_{t'} & \text{با احتمال } (1-r)(1-p) \end{cases} \quad (10)$$



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) رسم تابع توزیع (۱۵) به ازای  $\alpha = 0/6$  و  $\beta = 0/5$  در عدم حضور بازنشانی (شکل بالا) و در حضور بازنشانی  $r = 0/1$  (شکل پایین).

تقلیل می‌یابد. رفتار مجانبی متوسط جابه‌جایی در زمان‌های بلند با حضور بازنشانی در هر سه فاز به صورت زیر است:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_t \rangle_r = \frac{(1-r)}{r\alpha} \beta \quad (17)$$

نتیجه غیرمنتظره ناشی از تأثیرات بازنشانی در فاز  $\alpha < 0$  آن است که باعث می‌شود متوسط جابه‌جایی در زمان‌های بلند، در مقایسه با حالت بدون بازنشانی، افزایش یابد. به بیان دیگر متوسط جابه‌جایی در زمان‌های بلند که در غیاب بازنشانی به صفر میل می‌کند، در حضور بازنشانی به نقطه شروع  $X' = X_0$  به مقداری غیر صفر میل می‌کند (به شکل ۲ مراجعه شود). بررسی متوسط جابه‌جایی زمان بلند بر حسب بازنشانی نیز حائز اهمیت است. در فاز  $\alpha < 0$  بیشترین مقدار جابه‌جایی در زمان‌های بلند با عبارت (۱۷) به ازای  $r^*$  داده می‌شود که در آن  $r^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  حال به سادگی می‌توان مشاهده کرد که به ازای مقادیر  $r < r^*$  متوسط جابه‌جایی افزایش و به ازای مقادیر  $r > r^*$  متوسط جابه‌جایی کاهش می‌یابد.

$$P_r(Y, t + 1 | X_0, 0) = (1-r)^{t+1} \times \quad (14)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{t} (Y - X_0 + 1) \right] P_0(Y + 1, t | X_0, 0) + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{t} (Y - X_0 - 1) \right] P_0(Y - 1, t | X_0, 0) \right]$$

با کمک نتایج ۴-۱ معادله اصلی ذره در حضور بازنشانی به صورت زیر داده می‌شود:

$$P_r(Y, t + 1 | X_0, 0) = r \delta_{Y, X'_t} + \quad (15)$$

$$r(1-r)[qP_r(Y-1, t) + (1-q)P_r(Y+1, t)] + \sum_{t'=1}^{t-1} r(1-r)^{t-t'+1} \times \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{t-t'} (Y - X'_t + 1) \right] P_0(Y + 1, t | X'_t, t') + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{t-t'} (Y - X'_t - 1) \right] P_0(Y - 1, t | X'_t, t') \right] + (1-r)^{t+1} \times \left[ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{t} (Y - X_0 + 1) \right] P_0(Y + 1, t | X_0, 0) + \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{t} (Y - X_0 - 1) \right] P_0(Y - 1, t | X_0, 0) \right]$$

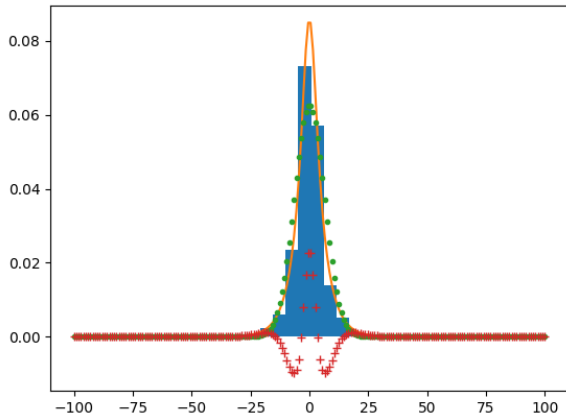
که  $P_0$  از رابطه (۳) به دست می‌آید. در شکل ۱ با توجه به این که  $P_r(Y, t + 1 | X_0, 0) = P_r(x)$  تابع توزیع (۱۵) در دو حالت حضور و عدم حضور بازنشانی رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تابع توزیع احتمال شرطی حضور ذره در مکان  $Y$  در حالت بدون بازنشانی و در زمان‌های بلند اشباع نمی‌شود در حالی که در حضور بازنشانی تابع توزیع در مدت زمان کوتاهی به حالت پایا می‌رسد و اشباع می‌شود.

## ۲.۲. تحول زمانی متوسط جابه‌جایی

با استفاده از معادله اصلی (۱۵) و با فرض  $X' = X_0$ ، متوسط جابه‌جایی در حضور بازنشانی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\langle x_{t+1} \rangle_r = (1-r)^{t+1} \langle x_{t+1} \rangle_0 + \quad (16)$$

$\sum_{t^*=1}^{t-1} r(1-r)^{t-t^*+1} \langle x_{t-t^*+1} \rangle_0 + r(1-r)\beta$ ، که  $\langle x_t \rangle_0$  از رابطه (۵) به دست می‌آید. بازنشانی به نقطه شروع حرکت باعث می‌شود متوسط جابه‌جایی با گذشت زمان هم در فاز  $\alpha < 0$  و هم در فاز  $\alpha > 0$  اشباع شود (به شکل ۲ مراجعه شود). همچنین این کمیت، در فاز  $\alpha = 0$  که در عدم حضور بازنشانی مستقل از زمان و برابر  $\beta$  بود، به مقدار کمتر از  $\beta$



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار تابع توزیع احتمال جابه‌جایی بر حسب مکان حاصل از ۱- شبیه‌سازی مونت‌کارلو (نمودار میله‌ای آبی رنگ) ۲- بهترین منحنی برازش به نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو (منحنی نارنجی) ۳- نمودار گوسی برازش شده به مقادیر میانگین و واریانس حاصل از نتایج شبیه‌سازی (نقاط سبز رنگ) ۴- نمودار باقی‌مانده (نقاط + قرمز رنگ) به ازای  $\beta = 0, \alpha = 0/6$  و  $r = 0/1$ .

همانطور که مشاهده می‌شود وجود بازنشانی متوسط مربع جابه‌جایی را که در عدم حضور بازنشانی نامحدود بود، در زمان‌های بلند اشباع می‌کند. همچنین شکل مقیاسی متوسط مربع جابه‌جایی در حضور بازنشانی، بیانگر این است که به ازای تمام مقادیر  $\alpha$  هرگز پابرجایی مشاهده نمی‌شود؛ یعنی بازنشانی باعث می‌شود تا پابرجایی مشاهده شده در رفتار سنت‌گرا از بین برود.

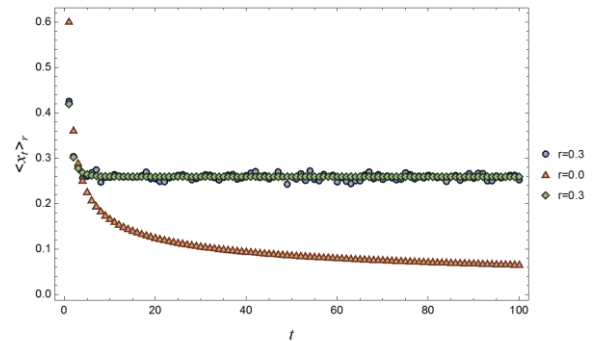
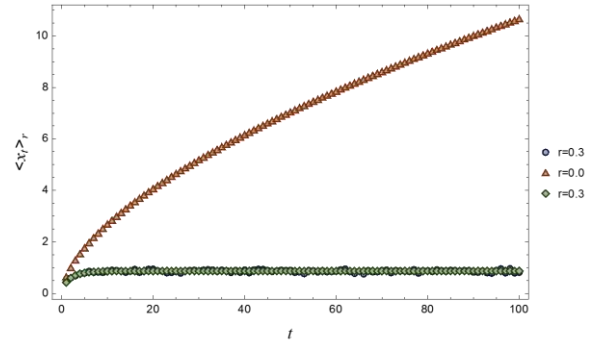
محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که در حالت کلی هر ممان دلخواه در حضور بازنشانی را می‌توان با داشتن ممان‌ها در عدم حضور بازنشانی محاسبه کرد:

$$\langle x_t^n \rangle_r = (1-r)^t \langle x_t^n \rangle_0 + \sum_{t'=1}^{t-1} r(1-r)^{t-t'} \langle x_{t'}^n \rangle_0. \quad (19)$$

مقدار به‌دست آمده برای هر یک از ممان‌ها در رابطه بالا با مقدار به‌دست آمده با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو کاملاً همخوانی دارند (به شکل ۲ مراجعه شود).

#### ۲.۴. تأثیر بازنشانی بر کومولان‌ها

قبلاً اشاره کردیم که در مرجع [۶] نشان داده شده‌است که تنها در فاز  $\alpha > 0$  تابع توزیع جابه‌جایی شکل گوسی به‌خود



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار متوسط جابه‌جایی به ازای  $\beta = 0/6$  و  $\alpha = -0/4$  (بالا) و  $\alpha = 0/6$  (پایین) در حضور و عدم حضور بازنشانی رسم شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی در حضور بازنشانی با نماد دایره توخالی مشخص شده است.

#### ۲.۱. تحول زمانی متوسط مربع جابه‌جایی

متوسط مربع جابه‌جایی یا ممان دوم با استفاده از معادله اصلی (۱۵) و با فرض  $X' = X$  در حضور بازنشانی به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\langle x_{t+1}^2 \rangle_r = (1-r)^{t+1} \langle x_{t+1}^2 \rangle_0 + \sum_{t'=1}^t r(1-r)^{t-t'} \langle x_{t'}^2 \rangle_0 + r(1-r). \quad (18)$$

همانطور که مشاهده می‌شود متوسط مربع جابه‌جایی در حضور بازنشانی را می‌توان با داشتن متوسط مربع جابه‌جایی در عدم حضور بازنشانی به‌دست آورد. محاسبات در زمان‌های بلند نشان می‌دهند که رابطه (۱۸) به ازای مقادیر مختلف  $p$  رفتارهای زیر را از خود نشان می‌دهد:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_t^2 \rangle_r = \frac{(1-r)r^{-(1+\alpha)}(r^{2\alpha} - 2\alpha r)}{1-2\alpha}, p = \frac{3}{4}$$

و نیز:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x_t^2 \rangle_r = \frac{(1-r)}{r} (1 - \ln r), p \neq \frac{3}{4}$$

که دیده می‌شود در حضور بازنشانی، تابع توزیع احتمال جابه‌جایی غیر گوسی است.

### ۳. نتیجه‌گیری

برای سامانه‌ای که تحت بازنشانی قرار می‌گیرد این امکان وجود دارد که مشاهده‌پذیرهای فیزیکی آن به طور قابل توجهی تغییر پیدا کنند. در این پژوهش یک گشت تصادفی یک-بعدي غیرمارکوف تحت بازنشانی تصادفی مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که در زمان‌های بلند بر خلاف این انتظار که متوسط جابه‌جایی می‌بایست کاهش یابد، این کمیت ممکن است افزایش یابد. همچنین تابع توزیع احتمال در حضور بازنشانی تحت هیچ شرایطی شکل گوسی نخواهد داشت و پابرجایی مشاهده شده در رفتار سنت‌گرا در حضور بازنشانی هرگز مشاهده نمی‌شود. از سوی دیگر نشان داده شد که تمامی ممان‌ها در حضور بازنشانی را می‌توان با کمک ممان‌ها در عدم حضور بازنشانی تعیین کرد.

نمی‌گیرد. در حضور بازنشانی می‌توان به کمک رابطه (۱۹) کومولان‌ها را به‌طور تحلیلی محاسبه کرد و بررسی کرد که آیا امکان مشاهده رفتار گوسی برای تابع توزیع احتمال جابه‌جایی وجود دارد یا خیر. حضور بازنشانی باعث می‌شود تا با گذشت زمان کومولان‌های زوج افزایش یابند تا در نهایت اشباع شوند. همچنین کومولان‌های فرد با گذشت زمان کاهش می‌یابند تا در نهایت اشباع شوند. مطالعه دقیق کومولان‌ها هم به صورت تحلیلی و هم با کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو، به عنوان تابعی از  $r$  و  $\alpha$ ، نشان می‌دهد که در حضور بازنشانی، صرف‌نظر از مقدار این کمیت‌ها، تابع توزیع احتمال برای جابه‌جایی رفتار گوسی ندارد. در شکل ۳ نتیجه شبیه‌سازی مونت‌کارلوی سامانه برای یافتن تابع توزیع احتمال جابه‌جایی به صورت نمودار میله‌ای و بهترین منحنی برازش برای آن به صورت منحنی نارنجی رسم شده است. از سوی دیگر با محاسبه میانگین و واریانس این داده‌ها بهترین منحنی برازش گوسی نیز به صورت نقطه‌ای (نقاط سبز رنگ) رسم شده است. در نهایت اختلاف این نتایج (انحراف نتایج شبیه‌سازی از توزیع گوسی) به صورت نقاط قرمز + مشخص شده است (منحنی باقی‌مانده). همانطور

### مراجع

1. M R Evans, S N Majumdar, and G Schehr, *J. Phys. A: Math Theor.* **53** (2020) 193001.
2. D Sornette, *Phys. Rep.* **378** (2003) 1.
3. A Pal and S Reuveni, *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 030603.
4. G M Viswanathan, G E M da Luz, E P Raposo, and H E Stanley, "*The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*", Cambridge University Press (2011).
5. G M Schütz and S Trimper, *Phys. Rev. E* **70** (2004) 045101R.
6. M A A da Silva, J C Cressoni, G M Schütz, G M Viswanathan, and S Trimper, *Phys. Rev. E* **88** (2013) 022115.
7. J C Cressoni, M A A da Silva, and G M Viswanathan, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070603.
8. M A A da Silva, G M Viswanathan, A S Ferreira, and J C Cressoni, *Phys. Rev. E* **77** (2008) 040101R.