

حل معادله موج آکوستیکی در ساختار لایه‌ای سه بعدی برای ایجاد فریب آکوستیکی

محمد مهدی صادقی^۱ و حمید نادگران^۲

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه جهرم

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

پست الکترونیکی: sadeghi@jahromu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۰۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۳/۲۲)

چکیده:

در این مقاله، تکنیک ایجاد یک فریب آکوستیکی ایده‌آل در سه بعد براساس تئوری آکوستیک تبدیل و برپایه حل دقیق معادلات موج آکوستیکی برحسب بسط‌های کروی ارائه شده است. در این تکنیک از یک ساختار سه بعدی که شامل پوسته‌های کروی متحدالمرکز با مواد همگن و همسانگرد است، استفاده شده است. این ساختار باعث تغییر در الگوی پراکندگی امواج آکوستیکی می‌شود. برای بررسی تغییرات در الگوی پراکندگی، با محاسبه ضرایب بسط در جواب معادله موج آکوستیکی پراکنده شده، الگوی پراکندگی در هر لایه از این ساختار محاسبه شده است. با قرار دادن یک شی داخل هسته‌ی این ساختار، فریب آکوستیکی مورد نظر تولید می‌شود. با مقایسه الگوی پراکندگی این شی داخل هسته این ساختار با الگوی پراکندگی یک شی دیگر با پارامترهای آکوستیکی و اندازه متفاوت (تبدیل یافته)، فریب آکوستیکی مورد نظر تشخیص داده می‌شود. یکی از مزایای این تکنیک، رفع محدودیت کارکرد دستگاه‌های استوانه‌ای در راستای محور z است که به دلیل ماهیت کروی بودن پارامترهای آکوستیکی ساختار و عدم وابستگی آنها به زوایای سمتی و سمت الراسی حاصل می‌شود. این تکنیک، یک روش مفید برای افزایش دقت در تصویربرداری بافت‌های پزشکی با استفاده از دستگاه‌های سونوگرافی می‌باشد. به عبارت دیگر، با بهره‌گیری از این تکنیک، می‌توان از تصاویر با کیفیت بالاتری از بافت‌های حساس در دستگاه‌های سونوگرافی بهره برد.

واژه‌های کلیدی: فریب آکوستیکی، نظریه آکوستیک تبدیل، معادله موج آکوستیکی، فرامواد آکوستیکی، ساختار لایه‌ای کروی هم مرکز، الگوی پراکندگی

۱. مقدمه

همکارانش تبدیلات فضایی خاصی را بر روی معادلات ماکسول ارائه داد [۱] و در سال ۲۰۰۶ پندری^۳ [۲] نشان داد که می‌توان هر نگاشت و تبدیل مختصات دلخواه در معادلات ماکسول را با استفاده از فرامواد الکترومغناطیسی بر حسب تانسور گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی تبدیل یافته تفسیر کرد و آن را برای ایجاد محیط نامرئی ساز استفاده کرد. به عنوان نتیجه می‌توان هر انقباض، انبساط و هر انحنائی در فضا، که با تبدیل مختصات مربوطه مشخص می‌شود، را می‌توان با به کارگیری فرامواد الکترومغناطیسی پیاده‌سازی کرد. هم زمان

از دیرباز تاکنون بشر علاقه فزاینده‌ای در ایجاد شنل‌های نامرئی و یا ایجاد فریب اپتیکی با تکنیک‌های مختلف نظیر استتار و... داشته است. این علاقه در افسانه‌های دور و فیلم‌های تخیلی امروزه نیز قابل مشاهده است. امروزه توانایی کنترل نور و ایجاد نامرئی سازها و یا ایجاد فریب اپتیکی با استفاده از نظریه اپتیکی تبدیل^۱ میسر شده است. در اصل این نظریه بر اساس تبدیلات فضایی بنا شده است که ابتدا در سال ۱۹۶۷ دولین^۲ و

^۱ Transformation optics theory

^۲ Dolin

^۳ John Pendry

با پندری [۲] لئونهاردت^۱ نیز به صورت تحلیلی این مسئله را بررسی کرد [۳]. یکی از دستگاه‌هایی که با این تبدیلات ارائه شد، سنل‌های نامرئی ساز بود که در آن از تبدیلات مختصات و پارامترهای الکترومغناطیسی تبدیل یافته برای نامرئی سازی استفاده شد [۳]

چن^۲ و همکارانش [۴] یک تحلیل پراکندگی از هارمونیک‌های کروی از پوسته پوششی کروی سه بعدی ارائه داد که در مرجع [۱] پیش‌بینی شده بود و تأیید کرد که هر شیئی که در هسته این پوسته قرار گیرد با حذف پراکندگی در همه جهات آن را نامرئی می‌کند. در ادامه در سال ۲۰۰۷ برای اولین بار کومر و شورینگ^۳ [۵] نشان دادند، یک مقایسه دقیق می‌تواند بین تبدیلات امواج الکترومغناطیسی و امواج آکوستیک به صورت دو بعدی برای مواد ناهمسانگرد در پوسته دوبعدی نامرئی‌ساز انجام شود. آنها تبدیلات فضایی را برای معادلات امواج آکوستیکی به کار بردند و نظریه آکوستیک تبدیل^۴ را بنا نهادند. آنها در این مقاله توانستند یک شی را با ایجاد یک لایه با ضرائب آکوستیکی ناهمسانگرد از دید یک حسگر آکوستیکی، نامرئی کنند. این موضوع بسیار ایده آل و بدون پراکندگی انجام شد. در این راستا دستگاه‌های بدیع و جالبی بر اساس آکوستیک تبدیل ارائه شدند که در این راستا نامرئی سازهای آکوستیکی دو بعدی [۶]، نامرئی ساز خارجی [۷]، فریب آکوستیکی [۸ و ۹] و... قابل ذکر است. بسیار ارزشمند است که به این نکته نیز اشاره شود همانند تبدیلات اپتیکی در پیاده‌سازی تبدیلات آکوستیکی به پارامترهای ناهمسانگرد آکوستیکی، یعنی پارامتر چگالی جرمی و مدول حجمی ناهمسانگرد، نیازمندیم. در عمل ساخت و تولید مواد با ضرائب آکوستیکی ناهمسانگرد بسیار سخت و هزینه‌بر و گاهی ناممکن است. لذا برای پیاده‌سازی و ساخت مواد با ضرائب ناهمسانگرد استفاده از ساختارهای ترکیبی و یا دوره‌ای با مواد همسانگرد که بتوانند ضرائب ناهمسانگرد را به صورت موثر معادل‌سازی کنند، پیشنهاد شد [۱۱-۱۳]. اخیراً در مقاله [۱۴] ساختار متشکل از لایه‌های همگن استوانه‌ای با طول

بسیار زیاد (دو بعدی) برای ایجاد پارامترهای ناهمسانگرد در راستای تولید فریب آکوستیکی با حل معادلات موج مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه با همین رویکرد از تجزیه و تحلیل معادلات موج و استخراج ضرائب پراکندگی به عنوان نقطه شروع برای استخراج مجموعه‌ای از پارامترهای آکوستیک برای پوسته‌های هم مرکز کروی سه بعدی استفاده خواهد شد و با قراردادن یک شیء کروی در مرکز دستگاه حل دقیقی برای فریب آکوستیکی ایجاد شده ارائه خواهد شد. برای تعمیم فریب آکوستیکی دو بعدی به سه بعد با استفاده از لایه‌های کروی از نظریه "می" (Mie theory) برای محاسبه ضرائب پراکندگی استفاده می‌شود. در این مقاله در راستای ایجاد فریب آکوستیکی، نظریه آکوستیک تبدیل نیاز به بررسی مجدد هم در معادلات و هم در ضرائب آکوستیکی در سه بعد خواهد داشت. در این مقاله در ادامه به ارائه هدف و صورت مسئله و در قسمت سوم به ارائه معادله موج سه بعدی برای ساختار ارائه شده در قسمت قبل پرداخته خواهد شد و جوابهای کلی مسئله ارائه خواهد شد. در قسمت چهارم با استفاده از شرایط مرزی و نظریه پراکندگی می یک کره نمونه در مرکز ساختار قرار داده خواهد گرفت و فریب آکوستیکی ایجاد شده همراه با ارائه بسط‌های جواب معادلات موج ارائه خواهد شد و در انتها در قسمت پنجم بحث در نتایج را ارائه خواهد شد.

۲. هدف

برای ارائه صورت مسئله ابتدا مطابق [۱۵] از تابع تبدیل طبق معادله (۱) ولی در مختصات کروی شروع می‌کنیم.

$$r' = f(r) = \begin{cases} \frac{a}{c}r & 0 < r < c \\ \left(\frac{r}{m_1}\right)^{\frac{1}{m_0}} & c < r < b \end{cases} \quad (1)$$

¹ Ulf Leonhardt

² HuanYang CHen

³ Cummer and Shurig

⁴ Transformation acoustic theory

$$\rho_r = \frac{m_0}{m_1 r^{(m_0-1)}} \rho_0 = \frac{m_0}{g(r')} \rho_0 \quad (4)$$

که در آن $g(r') = m_1 r'^{(m_0-1)}$ می‌باشد.

$$\rho_\theta = \rho_\varphi = \frac{1}{m_0 m_1 r^{(m_0-1)}} \rho_0 = \frac{1}{m_0 g(r')} \rho_0 \quad (5)$$

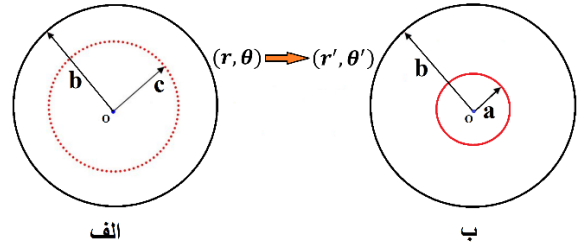
و مدل حجمی نیز به صورت معادله (6) خواهد بود،

$$\kappa(r) = \frac{1}{m_0 m_1^3 r^{3(m_0-1)}} \kappa_0 \quad (6)$$

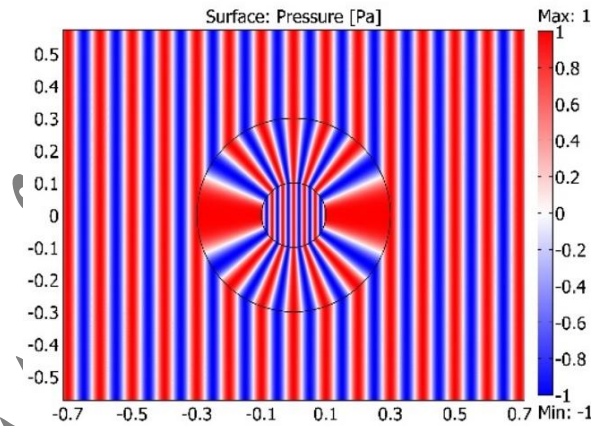
این دستگاه با این پارامترهای آکوستیکی ایده‌آل نامرئی است و همان پراکندگی را ایجاد می‌کند که فضای آزاد ایجاد می‌کند. طرح پراکندگی امواج آکوستیکی این ساختار برای امواج تخت به صورت شکل (2) می‌باشد.

در این ساختار ایده‌آل ناحیه هسته $0 < r' < a$ بخاطر همسانگرد بودن (معادلات (2) و (3)) به راحتی قابل ساخت و پیاده سازی است ولی در ناحیه $a < r' < b$ ساخت ماده با پارامترهای ناهمسانگرد معادلات (4) تا (6) چالش بر انگیز است. قابل ذکر است که این نوع مواد آکوستیکی ناهمسانگرد در طبیعت یافت نمی‌شوند لذا این نوع ساختارها را معمولاً در آزمایشگاهها با تکنیک‌ها یا چینش‌های دوره‌ای خاصی از مواد همگن می‌توان ساخت. یکی از این تکنیک‌ها استفاده از آرایش دوره‌ای به صورت لایه یا پوسته است که برای ساختار سه بعدی این مقاله استفاده خواهد شد کرد. در این مقاله تکنیک مشابه مقاله [14] ولی به صورت سه بعدی یعنی پوسته‌های کروی هم مرکز و با محاسبه مجدد نظریه آکوستیک تبدیل برای دستگاه مختصات کروی و حل دقیق معادله دیفرانسیل موج آکوستیکی سه بعدی ارائه خواهد شد.

در ادامه با استفاده از نظریه میدان موج نشان داده خواهد شد با آرایش پوسته‌ای به پارامترهای مشابه پارامترهای ناهمسانگرد معادلات (4) تا (6) نیز می‌توان رسید. این پارامترهای آکوستیکی به دست آمده نشان دهنده وجود ناهمسانگردی شدید هستند. ساختار پیشنهادی برای تولید این پارامترهای ناهمسانگرد استفاده از لایه‌های پوسته کروی هم مرکز به صورت شکل (3) خواهد بود.



شکل 1. الف. فضای مجازی با مختصات (r, θ) به شکل نمادین ب. فضای واقعی با مختصات (r', θ') به شکل نمادین



شکل 2. طرح پراکندگی موج آکوستیکی برای ساختار ایده‌آل

که در این تابع تبدیل مختصات پرایم دار، (r', θ') ، فضای واقعی و مختصات بدون پرایم، (r, θ) ، فضای مجازی را نشان می‌دهد. مطابق شکل (1) که به صورت نمادین نشان داده شده است، این تابع ناحیه بزرگتری از فضای مجازی ($0 < r < c$) را در ناحیه کوچکتری از فضای واقعی ($0 < r' < a$) منقبض می‌کند و ناحیه ($c < r < b$) از فضای مجازی را در ناحیه ($a < r' < b$) از فضای واقعی منبسط می‌کند.

قابل ذکر است این تابع تبدیل دارای شرایط مرزی $f(c) = a$ و $f(b) = b$ می‌باشد که در این صورت $m_0 = \log_b \left(\frac{b}{a} \right)$ خواهد بود. با استفاده از نظریه آکوستیک تبدیل در ناحیه هسته ($0 < r' < a$) ضرایب آکوستیکی به صورت معادلات (2) و (3) به دست خواهد آمد،

$$\rho_1 = \frac{a}{c} \rho_0 \quad (2)$$

$$\kappa_1 = \frac{a^3}{c^3} \kappa_0 \quad (3)$$

که ρ_0 و κ_0 چگالی جرمی و مدول حجمی فضای آزاد می‌باشد. برای ناحیه $a < r' < b$ نیز پارامترهای آکوستیکی به صورت معادله (4) محاسبه می‌گردد،

$$\rho_B = (\rho_\theta - \sqrt{\rho_\theta^2 - \rho_r \rho_\theta}) \quad (11)$$

با توجه به اینکه ρ_θ و ρ_r متناسب با مقدار مکان r در مکان سلول و با روابط (۴) تا (۶) در مکان میانگین هر سلول تعیین می‌گردد اما تولید این ساختار مشکل است زیرا به تعداد زیادی سلول با پارامترهای متفاوت نیاز است. قبل از حل این چالش ابتدا در راستای ایجاد بیشترین بهره و ایجاد بیشینه تمرکز انرژی حد $b \rightarrow c$ در نظر بگیرید که در این صورت $m_0 \rightarrow 0$ خواهد شد و طبق معادلات (۴) تا (۶) نیز پارامترهای آکوستیکی برای ناحیه $a < r' < b$ به صورت معادله (۱۲) خواهد بود،

$$\begin{cases} \rho_r \rightarrow 0 \\ \rho_\theta, \rho_\phi \rightarrow \infty \\ \kappa(r) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (12)$$

که با توجه به معادلات (۴) تا (۶) و حد $m_0 \rightarrow 0$ رابطه ۱۲ به صورت رابطه (۱۳) بازنویسی خواهد شد،

$$\begin{cases} \rho_r \rightarrow A\rho_0 m_0 \\ \rho_\theta, \rho_\phi \rightarrow A\rho_0 / m_0 \\ \kappa(r) \rightarrow A^3 \kappa_0 / m_0 \end{cases} \quad (13)$$

که در این معادلات $A = \frac{1}{g(r')}$ خواهد بود و با توجه به ضریب $m_0 \rightarrow 0$ وابستگی مکانی هر سلول، $g(r')$ برخلاف روابط ۱۰ و ۱۱ بی‌تاثیر می‌گردد. لذا در کل دستگاه با این ساختار و پارامترها فقط به دو نوع ماده برای ایجاد ساختار محیط موثر معادلات (۴) تا (۶) نیازمندیم. با این روش پارامترهای ρ_B, ρ_A و κ به صورت معادلات (۱۴) تا (۱۶) به دست خواهد آمد،

$$\rho_A = 2\rho_0 A / m_0 \quad (14)$$

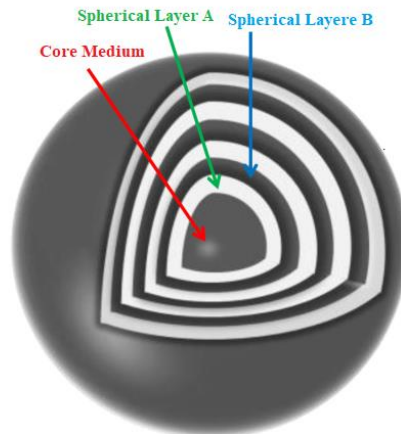
$$\rho_B = \rho_0 A m_0 / \eta \quad (15)$$

$$\kappa_A = \kappa_B = A^3 \kappa_0 / m_0 \quad (16)$$

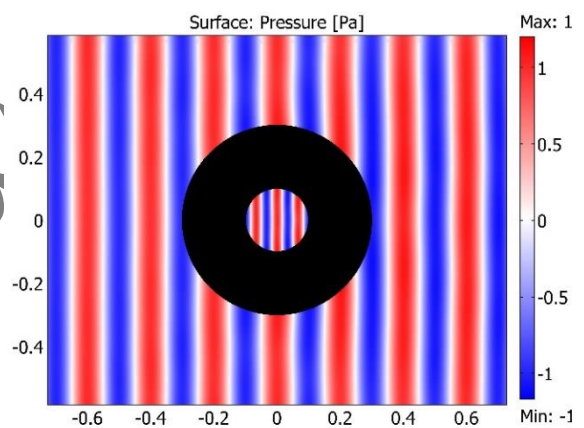
طرح الگوی پراکندگی این ساختار برای امواج آکوستیکی با پارامترهای به دست آمده به صورت شکل (۴) می‌باشد.

۳. طرح فیزیک مسئله

در این قسمت ابتدا پراکندگی موج آکوستیکی از ساختار شکل (۵) با پارامترهای تبدیل یافته و سپس پراکندگی موج آکوستیکی از ساختار پوسته‌ای شکل (۳) بررسی خواهد شد تا در بخش بعد بتوان به شرح تحلیلی ایجاد فریب آکوستیکی پرداخت.



شکل ۳. ساختار پیشنهادی پوسته‌های کروی هم‌مرکز با پارامترهای هم‌گن و همسانگرد برای ایجاد محیط موثر با پارامترهای ناهمسانگرد



شکل ۴. طرح پراکندگی موج آکوستیکی برای ساختار با پوسته‌های کروی هم‌مرکز.

در این حالت اگر هر سلول را متشکل از دو لایه متوالی در نظر بگیریم، با استفاده از نظریه میدان موثر، پارامترهای موثر این محیط مطابق معادلات (۷) تا (۹) محاسبه خواهند شد.

$$\rho_r = \frac{\rho_A + \eta \rho_B}{1 + \eta} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{\rho_\phi} = \frac{1}{1 + \eta} \left(\frac{1}{\rho_A} + \frac{\eta}{\rho_B} \right) \quad (8)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{1 + \eta} \left(\frac{1}{\kappa_A} + \frac{\eta}{\kappa_B} \right) \quad (9)$$

که در آن ρ_A و ρ_B ، κ_A و κ_B به ترتیب چگالی جرمی و مدول حجمی پوسته‌های A و B می‌باشند. ρ_θ, ρ_r و ρ_ϕ مولفه‌های موثر ناهمسانگرد هستند.

با انتخاب ضریب پراکندگی نسبی $\eta = 1$ روابط ρ_A و ρ_B به صورت زیر خواهد بود،

$$\rho_A = (\rho_\theta + \sqrt{\rho_\theta^2 - \rho_r \rho_\theta}) \quad (10)$$

در $\kappa^{-1} \rho_{\varphi} \sin \theta$ معادله مربوط به تابع شعاعی $f(r)$ به صورت معادله (۲۱) خواهد بود،

$$\rho_{\varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \left[k_0^2 \frac{\rho_{\varphi}}{\kappa} r^2 - n(n+1) \right] f = 0, \quad (21)$$

این معادله به جوابهای هنکل و بسل کروی منجر می‌گردد که با توجه به شرایط اولیه ترکیبی از این دو جواب را به عنوان جواب کلی معادله در نظر گرفته می‌شود. در این معادله $k_0^2 = \omega^2 / v_{p0}^2$ می‌باشد و توابع g و h نیز به صورت توابعی از توابع لژاندر، $g(\theta) = K_0 P_n^m(\cos \theta)$ و وابستگی زاویه سمتی به صورت ضرایبی از هارمونیک‌های سمتی، $h(\varphi) = K_1 \cos m\varphi + K_2 \sin m\varphi$ می‌باشند. با حل معادله موج با شرایط اولیه و شرایط مرزی هر ناحیه، میدان فشار کل را در هر ناحیه به دست خواهد آمد. برای مثال برای $r > b$ موج فشار ورودی با جبهه موج تخت با استفاده از بسط‌های کروی به صورت معادله (۲۲) خواهد بود،

$$p^{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\gamma_n + 1) j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (22)$$

که در آن ضریب $K_n = i^n (\gamma_n + 1)$ و $P_n(\cos \theta)$ ، n امین چندجمله‌ای لژاندر و در نهایت $j_n(k_0 r)$ توابع بسل کروی می‌باشند. بخاطر تقارن در زاویه سمتی φ ، میدان پراکنده شده را نیز به صورت معادله (۲۳) بر حسب بسط‌های کروی می‌توان نوشت،

$$p^{scat} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^n (\gamma_n + 1) h_n^{\gamma}(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (23)$$

در این معادله $h_n^{\gamma}(k_0 r)$ تابع هنکل کروی نوع اول و A_n ضریب پراکندگی است که با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌گردد. لذا میدان کل در ناحیه خارج از دستگاه به صورت معادله (۲۴) خواهد بود،

$$p^{out} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\gamma_n + 1) [j_n(k_0 r) + A_n h_n^{\gamma}(k_0 r)] P_n(\cos \theta), \quad (24)$$

برای ناحیه مرکزی $r < a$ میدان فشار نیز به صورت معادله (۲۵) خواهد بود که برای جلوگیری از تکینگی و بینهایت شدن میدان در مبدأ، ضریب تابع هنکل صفر خواهد بود،

$$p^{core} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(k_{core} r) P_n(\cos \theta), \quad (25)$$

با در نظر گرفتن وابستگی زمانی موج به صورت $e^{-i\omega t}$ معادلات موج آکوستیکی به صورت معادله (۱۷) و (۱۸) خواهد بود،

$$\nabla p = i\omega \bar{\rho}(\mathbf{r}) \rho_0 \mathbf{v} \quad (17)$$

$$i\omega p = \kappa(r) \kappa_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (18)$$

که در آن p فشار نرده ای، \mathbf{v} بردار سرعت شاره و κ مدول حجمی نسبت به κ_0 می‌باشد. ρ_0 تانسور چگالی تعمیم یافته ناهمسانگرد نسبت به ρ_0 است.

برای ارائه فیزیک مسئله در اینجا ابتدا فرض می‌شود یک موج آکوستیکی یکنواختی با جبهه موج تخت از چپ به راست تحت زاویه $\theta = 0$ بدون افت به متمرکز کننده سه بعدی کروی، مطابق شکل (۵)، برخورد می‌کند. در ناحیه بیرون کره $r > a$ چگالی جرمی و مدول حجمی ρ_0 و λ_0 به صورت یکنواخت هستند و در ناحیه بین دو کره با شعاع a و b یعنی $a < r < b$ طبق معادلات (۴) تا (۶) ماده دارای پارامترهای ناهمسانگرد است که از تئوری آکوستیک تبدیل قابل محاسبه است.

تقارن مسئله ایجاب می‌کند پراکندگی لایه متمرکز کننده از جهت فرود آمدن موج بر دستگاه مستقل باشد. بنابراین پارامترهای ناحیه متمرکز کننده باید فقط به فاصله شعاعی و به صورت توابعی از r به صورت $\rho_{\varphi}(r)$ ، $\rho_{\theta}(r)$ ، $\rho_r(r)$ و $\kappa(r)$ باشد. قابل ذکر هست که تقارن ایجاب می‌کند که $\rho_{\varphi} = \rho_{\theta}$ از تئوری آکوستیک تبدیل در قسمت قبل نیز به صورت تحلیلی همین نتایج ارائه شده بودند.

با ترکیب و دیورژانس گرفتن از معادلات (۱۷) و (۱۸) معادله حاکم بر فشار نیز به صورت معادله (۱۹) خواهد بود

$$\nabla \cdot (\bar{\rho}^{-1} \nabla p) + \frac{\omega^2}{\kappa} p = 0 \quad (19)$$

این معادله در ناحیه $a < r < b$ متمرکز کننده به صورت معادله (۲۰) خواهد بود،

$$\frac{\omega^2}{v_{p0}^2} r^2 p + \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{\rho_{\varphi} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\kappa}{\rho_{\varphi} \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (20)$$

که در این معادله $\rho_{\varphi} = \rho_{\theta}$ و v_{p0} سرعت موج در محیط آزاد و به صورت $v_{p0} = \sqrt{\rho_0 / \kappa_0}$ می‌باشد. حال با شروع از روش تفکیک متغیرها و انتخاب جواب معادله را به صورت $p(r, \theta, \varphi) = f(r)g(\theta)h(\varphi)$ و با ضرب کل معادله

۴. فریب آکوستیکی

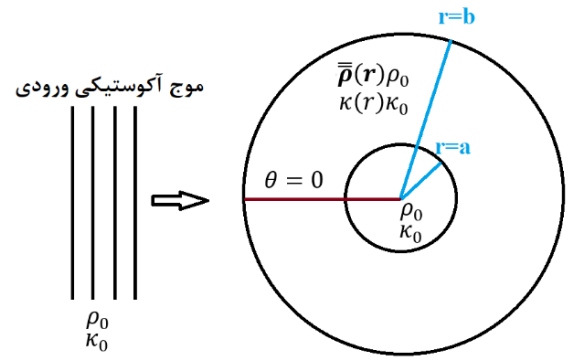
در اینجا برای بررسی اثرات پراکندگی و فریب آکوستیکی یک گوی بسیار چگالیده را در مرکز ناحیه هسته قرار داده تا الگوی پراکندگی آن را محاسبه گردد. با مقایسه این الگوی پراکندگی با الگوی پراکندگی ناشی از یک گوی مشابه با پارامترهای تبدیل یافته به فریب آکوستیکی به صورت بزرگنمایی ایجاد خواهد شد. ضرائب معادلات موج را با استفاده از شرط مرزی پیوستگی میدان نردهای فشار در مرزها و شرط مرزی پیوستگی مولفه عمود بر مرز بردار سرعت انتشار موج در دو طرف مرز که در اینجا موج مولفه شعاعی می باشد، $v_r = \left(\frac{i}{\omega\rho_0\rho_{relative}}\right)\frac{\partial p}{\partial r}$ ، می توان ضرایب نامعلوم معادلات ۲۲ تا ۲۴ را به دست و الگوی پراکندگی میدان را در همه ناحیه ها نمایش داد. برای این منظور ابتدا همه نواحی و اجسام برچسب گذاری شده است. مطابق شکل ۵ برای برچسب گذاری جسم کروی درون هسته را ناحیه شماره صفر و هسته را ناحیه شماره یک در نظر بگیریم، اولین لایه را ناحیه شماره دو و اگر تعداد کل لایه ها را N باشد، مطابق شکل ۵، لایه آخر لایه شماره $N + 1$ برچسب خواهد خورد و ناحیه فضای آزاد نیز ناحیه با برچسب out یا $N + 1$ خواهد بود.

در این صورت شعاع جسم کروی را R_0 و شعاع هسته را R_1 شعاع خارجی اولین پوسته کروی R_2 و به همین صورت شعاع خارجی پوسته m ام R_{m+1} (و شعاع داخلی پوسته m ام R_m) خواهد بود. شعاع خارجی آخرین لایه یعنی حالتی که $m = N + 1$ نیز R_{N+1} خواهد بود. قابل ذکر است که $R_{N+1} = b$ و $R_1 = a$ می باشد. با استفاده از شرط مرزی پیوستگی میدان فشار در مرز لایه m ام و لایه $(m + 1)$ ام یعنی در $r = R_m$ به صورت معادله (۲۷) خواهد بود،

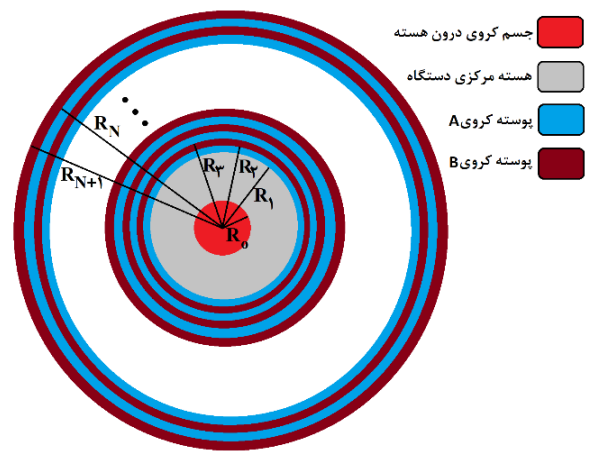
$$a_n^{(m+1)} j_n(k_{m+1} R_m) + c_n^{(m+1)} h_n^{(1)}(k_{m+1} R_m) = a_n^{(m)} j_n(k_m R_m) + c_n^{(m)} h_n^{(1)}(k_m R_m) \quad (27)$$

با استفاده از شرط مرزی پیوستگی مؤلفه عمودی بردار سرعت در $r = R_m$ به صورت معادله (۲۸) خواهد بود،

$$\frac{ik_{m+1}}{\omega\rho_{m+1}} [a_n^{(m+2)} j_n'(k_{m+1} R_m) + c_n^{(m+1)} h_n^{(1)'}(k_{m+1} R_m)] = \frac{ik_m}{\omega\rho_m} [a_n^{(m)} j_n'(k_m R_m) + c_n^{(m)} h_n^{(1)'}(k_m R_m)] \quad (28)$$



شکل ۵. برخورد موج آکوستیکی به دستگاه طراحی شده با پارامترهای تبدیل یافته

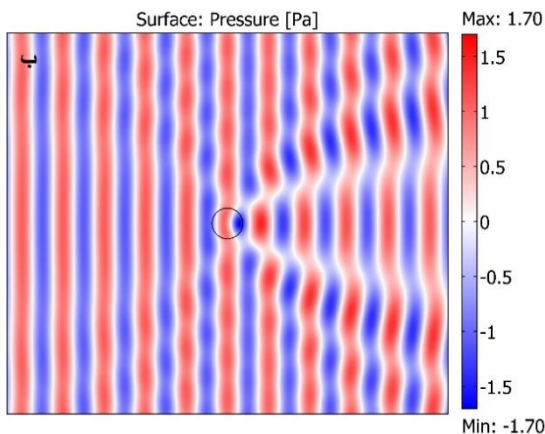
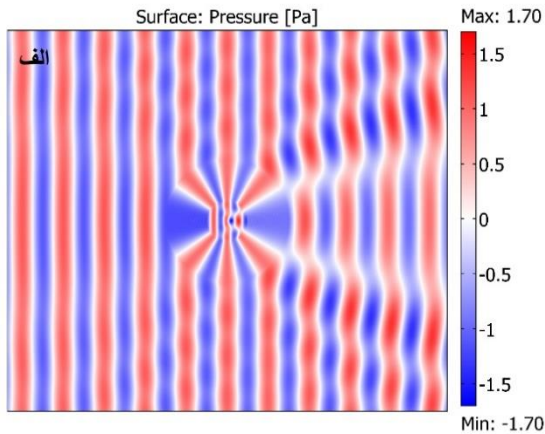


شکل ۵. ساختار متمرکز کننده کروی با پوسته های کروی متناوب حاوی جسم کروی درون هسته

در ناحیه میانی که به صورت لایه بندی شده است پارامترهای آکوستیکی هر لایه جداگانه محاسبه شده و جواب معادله موج نیز برای مثال برای لایه m ام به صورت معادله (۲۶) خواهد بود که ترکیبی از توابع هنکل و بسل کروی است،

$$p^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [a_n^{(m)} j_n(k_{core} r) + c_n^{(m)} h_n^{(1)}(k_0 r)] P_n(\cos\theta) \quad (26)$$

در این معادله ضرائب $a_n^{(m)}$ و $c_n^{(m)}$ ضرائب نامعلوم بسط میدان موج فشار هستند که با استفاده از شرایط مرزی باید محاسبه شوند. در قسمت بعد با محاسبه این ضرائب در زمانی که یک شیء کروی در مرکز هسته قرار گرفته است، اثرات فریب آکوستیکی این ساختار را بررسی خواهد شد.



شکل ۶. الف الگوی پراکنندگی میدان آکوستیکی از دستگاه طراحی شده با پوسته‌های هم مرکز حاوی جسم کروی درون هسته ب الگوی پراکنندگی میدان آکوستیکی از یک جسم کروی با اندازه و پارامترهای تبدیل یافته

در این صورت

$$a_n^{(0)} = \frac{i^n (\gamma n + 1)}{t_{11}} \quad (36)$$

$$A_n = \frac{t_{21}}{t_{11}} \quad (37)$$

ضرایب هر لایه m را نیز با استفاده از رابطه (۲۹) می‌توان به صورت رابطه (۳۸) نوشت

$$\begin{bmatrix} a_n^{(m+1)} \\ c_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \bar{P}_{m+1}^{-1} \bar{Q}_m \begin{bmatrix} i^n (\gamma n + 1) / t_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

با استفاده از این رابطه بازگشتی توسط متلب و با تکرار ضرب ماتریس‌ها ضرایب میدان را در هر لایه و ناحیه می‌توان به دست آورد. نتیجه این محاسبات در شکل ۶ الف نمایش داده شده است.

معادلات (۲۷) تا (۲۸) را می‌توان به صورت معادله ماتریسی

(۲۹) نوشت

$$\bar{P}_{m+1} \begin{bmatrix} a_n^{(m+1)} \\ c_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \bar{Q}_m \begin{bmatrix} a_n^{(m)} \\ c_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

نوشت که در آن ماتریس‌های \bar{Q} و \bar{P} به صورت معادلات (۳۰)

و (۳۱) تعریف می‌گردد،

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} j_n(k_{m+1} R_m) & h_n'(k_{m+1} R_m) \\ \frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} j_n'(k_{m+1} R_m) & \frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} h_n'(k_m R_m) \end{bmatrix} \quad (30)$$

و

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} j_n(k_m R_m) & h_n'(k_m R_m) \\ \frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} j_n'(k_m R_m) & \frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} h_n'(k_m R_m) \end{bmatrix} \quad (31)$$

با استفاده ماتریس معکوس \bar{P}^{-1} می‌توان ضرایب $\begin{bmatrix} a_n^{(m+1)} \\ c_n^{(m+1)} \end{bmatrix}$ را

بر حسب $\begin{bmatrix} a_n^{(m)} \\ c_n^{(m)} \end{bmatrix}$ نوشت که در این صورت برای به دست

آوردن ضریب موج در ناحیه آزاد باید $m = N$ قرار داد

$$\begin{bmatrix} a_n^{(N+1)} \\ c_n^{(N+1)} \end{bmatrix} = \bar{P}_{N+1}^{-1} \bar{Q}_N \begin{bmatrix} a_n^{(N)} \\ c_n^{(N)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

با تکرار این شرایط مرزی برای مرز $r = R_{N-1}$ رابطه ماتریسی

(۳۳) به صورت زیر به دست خواهد آمد،

$$\begin{bmatrix} a_n^{(N)} \\ c_n^{(N)} \end{bmatrix} = \bar{P}_N^{-1} \bar{Q}_{N-1} \begin{bmatrix} a_n^{(N-1)} \\ c_n^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

و در نهایت با تکرار همه شرایط مرزی و ادغام همه روابط

مرزی می‌توان رابطه معادله (۳۴) را که ضرایب بسط موج فشار

در خارج ساختار (در ناحیه آزاد) بر حسب ضرایب موج در

داخل جسم کروی به دست آورد،

$$\begin{bmatrix} a_n^{(N+1)} \\ c_n^{(N+1)} \end{bmatrix} = \prod_{m=0}^N \bar{P}_{N-m+1}^{-1} \bar{Q}_{N-m} \begin{bmatrix} a_n^{(0)} \\ c_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

با استفاده از معادلات (۲۴) و (۲۶) برای محیط خارج از دستگاه

باید $a_n^{(N+1)} = 1$ باشد. همچنین همانطور که در رابطه (۲۵)

نشان داده شده است، برای ضریب توابع هنکل باید $c_n^{(0)} = 0$

باشد. در این صورت رابطه (۳۳) به صورت رابطه ماتریسی

رابطه (۳۵) خواهد بود که ضرب همه ماتریس‌های $\bar{P}_i^{-1} \bar{Q}_{i-1}$

را می‌توان با یک ماتریس دو در دو T نمایش داد،

$$\begin{bmatrix} i^n (\gamma n + 1) \\ i^n (\gamma n + 1) A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^{(0)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

۵. نتیجه گیری

در این مقاله حل تحلیلی دقیقی برای الگوی پراکندگی موج آکوستیکی برای ساختاری با یک کره در درون هسته مرکزی بررسی شد. با مقایسه الگوی پراکندگی این شی داخل هسته این ساختار (شکل ۶ الف) با الگوی پراکندگی یک شی دیگر (شکل ۶ ب) با پارامترهای آکوستیکی و اندازه متفاوت (تبدیل یافته)، فریب آکوستیکی مورد نظر به صورت ایده آل تشخیص داده شد. به صورت خاص در این الگوی پراکندگی به نظر می رسد این ساختار اندازه جسم را بزرگتر از اندازه واقعی نشان می دهد لذا از این فریب آکوستیکی، یک روش مفید برای افزایش دقت در تصویربرداری بافت های پزشکی با استفاده از دستگاه های سونوگرافی می باشد. به عبارت دیگر، با بهره گیری از این تکنیک، می توان از تصاویر با کیفیت بالاتری و بزرگنمایی بیشتر از بافت های حساس در دستگاه های سونوگرافی بهره برد. علاوه بر این نسبت به دستگاه های مشابه استوانه ای [۱۶]، یکی از مزایای این تکنیک، رفع محدودیت کارکرد دستگاه های استوانه ای در راستای محور z است که به دلیل ماهیت کروی بودن پارامترهای آکوستیکی ساختار و عدم وابستگی آنها به زوایای سمتی و سمت الراسی حاصل می شود.

با تکرار این روش نیز می توان الگوی پراکندگی برای جسم کروی با اندازه و پارامترهای آکوستیکی تبدیل یافته به دست آورد. میدان کل در ناحیه خارج از جسم کروی با اندازه تبدیل یافته

رابطه $R'_0 = bR_0/a$ و پارامترهای آکوستیکی تبدیل یافته به صورت رابطه (۳۹) خواهد بود،

$$p_T^{out} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\nu n + 1) [j_n(k_0 r) + D_n h_n^1(k_0 r)] P_n(\cos\theta), \quad (39)$$

میدان نیز در داخل جسم کروی به صورت رابطه (۴۰) می توان بر حسب توابع بسل کروی نوشت،

$$p_T^{core} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n i^n (\nu n + 1) j_n(k_{core} r) P_n(\cos\theta), \quad (40)$$

با استفاده از شرایط مرزی پیوستگی موج فشار و پیوستگی مولفه عمودی بردار سرعت انتشار ضرایب E_n و D_n این بسطها به صورت رابطه (۴۱) و رابطه (۴۲) به دست خواهند آمد. الگوی پراکندگی میدان نیز در شکل ۶ ب قابل مشاهده است.

$$D_n = \frac{\beta j_n(k_0 R'_0) j'_n(k_{core} R'_0) - j_{core}(k_0 R'_0) j'_n(k_0 R'_0)}{\beta j'_n(k_c R'_0) h_n(k_0 R'_0) - j_{core}(k_0 R'_0) h'_n(k_0 R'_0)} \quad (41)$$

$$E_n = \frac{j_n(k_0 R'_0)}{j_n(k_{core} R'_0)} + \frac{D_n h_n^1(k_0 R'_0)}{j_n(k_{core} R'_0)} \quad (42)$$

۶. مراجع

1. L. S. Dolin and I. V. U. Zavedenii, "To the possibility of comparison of three-dimensional electromagnetic systems with non-uniform anisotropic filling," *Radiofizika* 4, 964–967 (1961)
2. J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, "Controlling electromagnetic fields," *Science* 312(5781), 1780–1782 (2006).
3. U. Leonhardt, "Optical conformal mapping," *Science* 312(5781), 1777–1780 (2006).
4. Chen, H. & Chan, C. T. Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials. *Appl. Phys. Lett.* 91, 183518 (2007)
5. S. A. Cummer, and D. Schurig, "One path to acoustic cloaking," *New J. Phys.* 9 45 (2007).
6. Torrent, Daniel, and José Sánchez-Dehesa. "Acoustic cloaking in two dimensions: a feasible approach." *New Journal of Physics* 10.6 (2008): 063015.
7. Yang, J., Huang, M., Yang, C., Peng, J., & Chang, J. "An external acoustic cloak with N-sided regular polygonal cross section based on complementary medium." *Computational Materials Science* 49.1 (2010): 9-14.
8. Rajabi, Majid, and Alireza Mojahed. "Acoustic illusion and cloaking: Active spherical body." *Acta Acustica united with Acustica* 105.3 (2019): 419-425.
9. Egger, Daniel, and Nicole Kessissoglou. "Active structural acoustic illusions." *Scientific reports* 10.1 (2020): 1-6.

