

## ابرسانایی موج $p$ یک بعدی با پارامترهای جنبش و برهم کنش فرمیونی بلند برد

سعید انصاری<sup>۱</sup> و روح ا... جعفری<sup>۲</sup>

۱. گروه علوم مهندسی و فیزیک، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بویین زهرا، بویین زهرا

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: ansari@bzte.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۰۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۹/۰۲/۱۰)

### چکیده

در این مقاله مدل تعمیم یافته زنجیره کیتائف یک بعدی، یعنی زنجیره ابرسانایی موج  $p$  بلند برد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در مدل بلند برد کیتائف، پارامترهای مربوط به جفت‌شدگی و تونل‌زنی فرمیون‌ها در هامیلتونی بلند برد هستند و شدت آنها، مستقل از یکدیگر، با عکس فاصله بین نقاط شبکه به توان یک نما- با افزایش فاصله بین نقاط شبکه- کاهش می‌یابد. در این مدل، وجود مدهای لبه‌ای بدون جرم مایورانا و همچنین مدهای لبه‌ای جرم‌دار دیراک را با روش قطری‌سازی دقیق و نیز با محاسبات تحلیلی بررسی می‌کنیم. قطری‌سازی دقیق حاکی از وجود هر دو نوع مد لبه‌ای بدون جرم و جرم‌دار در طیف انرژی است. همچنین با محاسبه عدد پیچش، که ناوردای توپولوژیکی است، نمودار فاز و گذار فازهای توپولوژیکی این مدل را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: ابرسانایی موج  $p$ ، زنجیره کیتائف، گذار فاز توپولوژیکی، مدهای مایورانا، برهم‌کنش بلند برد

### ۱. مقدمه

مایورانا<sup>۱</sup> (MZM) نامیده می‌شوند. مهم‌ترین ویژگی این حالت‌های لبه‌ای این است که ناوردای توپولوژیکی هستند به این معنی که حتی با وجود بی‌نظمی [۳۰]، ناخالصی موضعی [۳۱] و اختلالات دینامیکی در دستگاه [۲۶ و ۳۲]، تا زمانی که پاریته فرمیونی و تقارن ذره-حفره شکسته نشود، تغییر نمی‌کنند. وجود چنین مدهای لبه‌ای در تحقیقات آزمایشگاهی [۳۳-۴۴] مشاهده شده است. این ویژگی از مزیت‌های مورد توجه در محاسبات کوانتومی توپولوژیکی است [۴۵ و ۴۶] و از

نظم‌های توپولوژیکی و پدیده‌های کوانتومی مرتبط با آنها در چند سال اخیر توجه بسیاری از محققان این حوزه را به خود جلب کرده است [۱-۲۱]. یکی از این مدل‌های مورد توجه که نظم توپولوژیکی دارد، زنجیره کیتائف است [۲۲-۲۹]. مدل کیتائف یک ابرسانای موج  $p$  یک بعدی است که از فرمیون‌های بدون اسپین تشکیل شده است. ویژگی مهم مدل کیتائف این است که تحت شرایط خاص، مدهای جفت نشده با انرژی صفر در لبه‌های زنجیره دارد که مدهای بدون جرم

۱. Majorana zero mode

زنجیره کیتائف می‌شود. به این منظور با تعیین خطوط بحرانی، فازهای توپولوژیکی و بدیهی مدل را، با محاسبه عدد پیچش و قطری سازی دقیق هامیلتونی، برای نماهای مختلف به دست می‌آوریم.

## ۲. تعمیم هامیلتونی زنجیره کیتائف به برهم‌کنش و

### جنبش فرمیونی بلند برد

هامیلتونی مدل تعمیم یافته کیتائف یک بعدی با تعداد نقاط شبکه  $N$ ، که در آن جملات جنبشی و برهم‌کنشی بلند برد هستند به نحوی که هر فرمیون می‌تواند به هر نقطه از شبکه تونل بزند و با فرمیونی در هر فاصله‌ای جفت شود، به شکل زیر داده می‌شود [۵۰]:

$$H = \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{l=1}^{N/l} (\Delta_l (c_j^\dagger c_{j+l}^\dagger - c_j c_{j+l})) + w_l (c_j^\dagger c_{j+l} - c_j c_{j+l}^\dagger) \right] + \sum_{j=1}^N \mu \left( c_j^\dagger c_j - \frac{1}{r} \right), \quad (1)$$

که در آن  $\mu$  پتانسیل شیمیایی است و عملگرهای خلق،  $c_j^\dagger$  و فنا،  $c_j$ ، در روابط جابه‌جایی فرمیونی کانونی  $\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}$  صدق می‌کنند. ضرایب جملات مربوط به جنبش  $w_l$  و جفت‌شدگی فرمیونی  $\Delta_l$  را به نحوی در نظر می‌گیریم که متناسب با فاصله بین دو نقطه شبکه کاهش پیدا کنند.

برای قطری کردن هامیلتونی (۱) از تبدیل فوریه استفاده

می‌کنیم

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_k e^{ikj}, \quad c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k c_k^\dagger e^{-ikj}, \quad (2)$$

که در آن برای شرط مرزی پادمتناوب،  $k = (2p-1)\pi/2$  عدد موج است و مقدار  $p$  از  $-N/2$  تا  $N/2$  تغییر می‌کند.  $N$  تعداد کل نقاط شبکه است.

هامیلتونی تبدیل یافته را می‌توان به صورت حاصل جمع

$N/2$  هامیلتونی بدون برهم‌کنش نوشت

$$H = \sum_k H(k), \quad (3)$$

که در آن  $H(k)$  عبارت است از:

آنجا که این مدل فرمیونی را به آسانی می‌توان به دستگاه اسپینی تصویر کرد [۳۱، ۴۷ و ۴۸] در نتیجه این مدل یک بعدی زمینه را برای تحقیقات در حوزه محاسبات کوانتومی توپولوژیکی فراهم می‌کند.

در تحقیقاتی که اخیراً به چاپ رسیده، تعمیم مدل کیتائف برای حالتی که در آن جملات مربوط به برهم‌کنش فرمیون‌ها با همسایه‌های دورتر و یا تونل‌زنی آنها به هر نقطه از شبکه امکان‌پذیر است، مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۹، ۳۱ و ۴۹-۶۴]. از جمله در مرجع [۴۵] فرض شده است جفت‌شدگی و جنبش فرمیون‌ها هر دو بلند برد هستند اما شدت افت (نمای) یکسان برای آنها در نظر گرفته شده است. برای برهم‌کنش‌های بلند متناهی، با شرط حفظ تقارن وارونی زمان، می‌توان در لبه زنجیره تعداد زیادی مدهای مایورانای بدون جرم ایجاد کرد. چنین حالتی را می‌توان در نانو زنجیره ابرسانا با جفت‌شدگی اسپین-مدار چند بانندی که شکافتگی زیمان موازی دارد، مشاهده کرد [۶۵]. در این حالت، دستگاه متعلق به رده BDI در دسته‌بندی تقارن دستگاه‌ها [۶۶] است و تعداد مدهای صفر به واسطه مقادیر صحیح عدد پیچش  $n_w$ <sup>۱</sup>، که ناوردای توپولوژیکی است، تعیین می‌شود [۳۱ و ۶۷]. جالب توجه است که در محدوده خاصی از پارامترها، تعداد مدهای مایورانا می‌تواند برابر با تعداد همسایه‌ها باشد. اما اگر تقارن وارونی زمان شکسته شود، دستگاه به رده D تعلق خواهد داشت و در محدوده‌ای از پارامترها که ناوردای توپولوژیکی  $\mathbb{Z}_2$  فافین<sup>۲</sup> غیر بدیهی است [۲۲]، به ازای هر لبه زنجیره حداکثر یک مد بدون جرم مایورانای می‌تواند وجود داشته باشد [۳۱].

ما در این مقاله ابرساناهای موج  $p$  بلند برد را در حالت کلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در آن شدت افت (نما)، با افزایش فاصله بین نقاط شبکه، برای جفت‌شدگی و جنبش (تونل‌زنی) فرمیون‌ها متفاوت است و نشان می‌دهیم که چگونه بلند برد بودن جملات مربوط به برهم‌کنش و تونل‌زنی، موجب تغییر در رفتار توپولوژیکی دستگاه در مقایسه با مدل استاندارد

۱. Winding number

۲. Pfaffian

### ۳. برهم کنش و جنبش بر حسب قاعده نمایشی

در این بخش فرض می‌کنیم که جملات جنبشی و برهم کنشی (جفت‌شدگی) بلند برد هستند و شدت آنها برای دو نقطه شبکه که در فاصله  $l$  از هم هستند متناسب با فاصله و به صورت نمایشی  $w_l = w l^{-\alpha}$  و  $\Delta_l = \Delta l^{-\beta}$  به ترتیب با نماهای  $\alpha$  و  $\beta$  کاهش پیدا می‌کند.  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مثبتی هستند که مقدار آنها مشخص کننده میزان افت شدت جنبش و برهم کنش فرمیون‌ها است.  $w$  و  $\Delta$  نیز حقیقی هستند و آنها را به ترتیب نرخ تونل‌زنی و شدت جفت‌شدگی موج  $p$  فرمیونی می‌نامیم. واضح است که اگر  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$ ، در این صورت همان مدل کیتائف کوتاه برد را خواهیم داشت.

### ۴. محاسبات عددی زنجیره محدود و مدهای انرژی

#### صفر مایورانا

در این قسمت وجود مدهای صفر و جرم‌دار را برای زنجیره با طول متناهی مورد بررسی قرار می‌دهیم. این کار را با استفاده از روش بوگولیوبوف- دو ژن (BdG) برای یک زنجیره با شرایط مرزی باز انجام می‌دهیم. با تعریف عملگر  $-2N$  مؤلفه‌ای  $C = (c_1^\dagger, c_2^\dagger, \dots, c_N^\dagger, c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ ، هامیلتونی داده شده در معادله (۱) را می‌توان به صورت  $H = \frac{1}{r} C^\dagger H_{BdG} C$  نوشت؛ که در آن  $H_{BdG}$  یک ماتریس  $2N \times 2N$  به شکل زیر خواهد بود:

$$H_{BdG} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A \end{pmatrix}, \quad (10)$$

و  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $N \times N$  با مؤلفه‌های زیر هستند:

$$A_{l,m} = -\frac{w}{|l-m|^\alpha} + \mu \delta_{l,m} \quad (11)$$

$$B_{l,m} = \text{sign}(l-m) \frac{\Delta}{|l-m|^\beta},$$

طیف انرژی  $E_n$  و ویژه‌توابع  $\Psi(n)$  متناظر با آن را می‌توان با حل عددی معادله شرودینگر  $H_{BdG} \Psi(n) = E_n \Psi(n)$  تعیین کرد.

$$H(k) = -r \left[ i S_k (c_k^\dagger c_{-k}^\dagger - c_k c_{-k}) + (C_k - \frac{\mu}{r}) (c_k^\dagger c_k + c_{-k}^\dagger c_{-k} - 1) \right], \quad (4)$$

و پارامترهای  $S_k$  و  $C_k$  با روابط

$$S_k = \sum_{l=1}^{N/r} \Delta_l \sin(lk), \quad C_k = \sum_{l=1}^{N/r} w_l \cos(lk) \quad (5)$$

داده می‌شوند. با استفاده از پایه نامبو و با تعریف اسپینور دو مؤلفه‌ای فرمیونی  $\Psi_k = (c_k, c_{-k}^\dagger)^T$  می‌توان هامیلتونی  $H(k)$  را به شکل ماتریسی زیر نوشت

$$H(k) = \sum_{i,j} \Psi_i^\dagger H_{ij} \Psi_j = \begin{pmatrix} c_k^\dagger & c_{-k} \end{pmatrix} (-r) \begin{pmatrix} -(C_k S_k - \mu/r) & -i S_k \\ i S_k & C_k - \mu/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (6)$$

با قطری کردن  $H_{ij}$  ویژه مقادیر انرژی به سادگی قابل محاسبه هستند.

$$\varepsilon_k = \pm r \sqrt{t_k^2 + \Delta_k^2}, \quad (7)$$

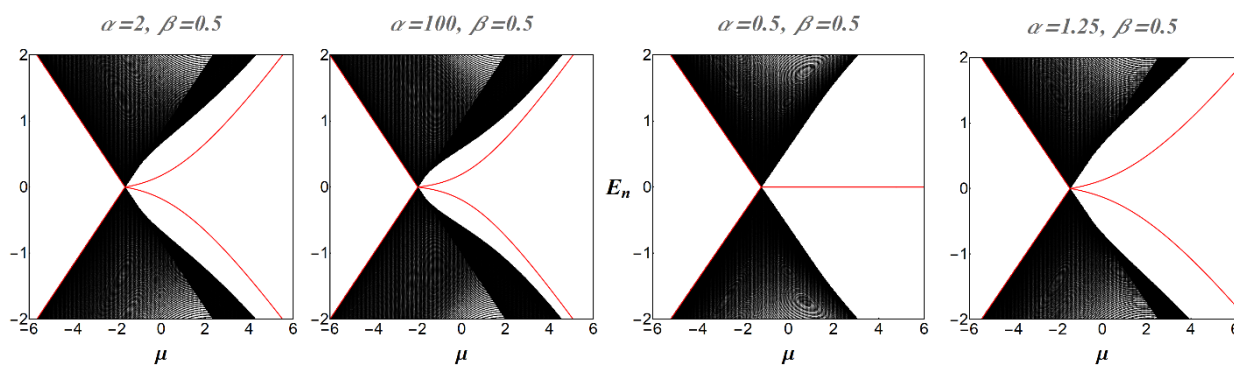
که در آن  $t_k = C_k - \mu/r$  و  $\Delta_k = S_k$ . ویژه حالت پایه بهنجار شده متناظر با انرژی  $\varepsilon_k = -r \sqrt{t_k^2 + \Delta_k^2}$  نیز به شکل زیر به دست می‌آید:

$$|\psi_-(k)\rangle = \left( \cos \frac{\theta}{r} - i \sin \frac{\theta}{r} c_k^\dagger c_{-k}^\dagger \right) |^0_k, ^0_{-k}\rangle, \quad (8)$$

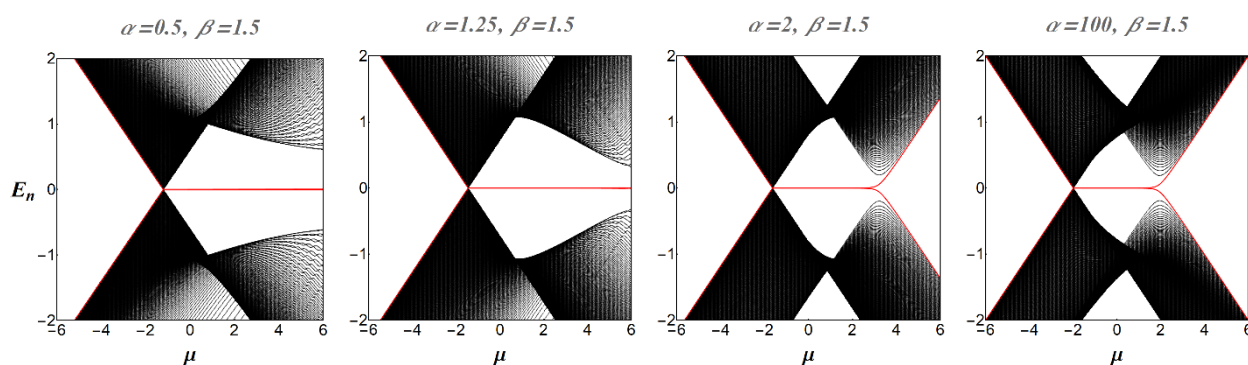
که در آن توابع مثلثاتی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta}{r} &= \frac{t_k + \sqrt{t_k^2 + \Delta_k^2}}{\sqrt{(t_k + \sqrt{t_k^2 + \Delta_k^2})^2 + \Delta_k^2}}, \\ \sin \frac{\theta}{r} &= \frac{\Delta_k}{\sqrt{(t_k + \sqrt{t_k^2 + \Delta_k^2})^2 + \Delta_k^2}}, \\ \tan \theta &= \frac{\Delta_k}{t_k}, \end{aligned} \quad (9)$$

لازم به ذکر است که هامیلتونی (۱) هنگامی که جفت‌شدگی صرفاً بین نزدیک‌ترین همسایه باشد (از طریق تبدیل جردن-ویگنر) معادل با هامیلتونی مدل اسپینی XY در حضور میدان مغناطیسی عرضی است، اما در حالتی که برهم کنش و یا جنبش فرمیونی بلند برد باشند، دیگر نمی‌توان چنین مشابهتی برقرار کرد و نمودار فازهای آنها می‌تواند متفاوت باشد.



شکل ۱. طیف انرژی بر حسب پتانسیل شیمیایی برای زنجیره‌ای به بزرگی  $N = 500$  برای  $\beta = 0.5$  و مقادیر مختلف  $\alpha$  ( $w = \Delta = 1$ ). خطوط قرمز نشان دهنده مدهای لبه‌ای هستند.



شکل ۲. طیف انرژی بر حسب پتانسیل شیمیایی مربوط به زنجیره‌ای به بزرگی  $N = 500$  برای  $\beta = 1.5$  و مقادیر مختلف  $\alpha$  ( $w = \Delta = 1$ ). خطوط قرمز نشان دهنده مدهای لبه‌ای هستند.

در حالتی که  $\beta$  بزرگ‌تر از یک باشد، دستگاه سه فاز دارد که به بزرگی  $\mu$  بستگی دارد: برای مقادیر کمتر از  $\mu_{c_1}$  دستگاه در فاز بدیهی قرار دارد و فاقد مدهای لبه‌ای است، اگر پتانسیل شیمیایی مقداری بین دو حد  $\mu_{c_1} < \mu < \mu_{c_2}$  داشته باشد در این صورت بسته به مقدار  $\alpha$ ، مدهای بدون جرم مایورانا یا مدهای جرم‌دار دیراک وجود دارد (شکل ۲) و برای  $\mu > \mu_{c_2}$ ، با از بین رفتن تبهگنی، دستگاه وارد فاز بدیهی می‌شود. در شکل ۳ مدهای لبه‌ای برای مقادیر مختلف  $\alpha$  بر حسب  $\mu$  رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم مدهای لبه‌ای می‌توانند، بسته به مقدار  $\alpha$ ، انرژی صفر و یا غیر صفر داشته باشند. لازم به ذکر است در حالتی که  $\alpha = \beta$ ، مدهای جرم‌دار دیراک وجود نخواهند داشت. به عبارت دیگر مدهای جرم‌دار دیراک در حالتی ایجاد می‌شوند که نماهای  $\alpha$  و  $\beta$  متفاوت

در شکل ۱ و ۲ ویژه مقادیر انرژی برای یک زنجیره به طول  $N = 500$ ، با شرط مرزی باز، بر حسب پتانسیل شیمیایی برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$  رسم شده‌اند. برای مقادیر مختلف  $\alpha$ ، در شکل ۱ مقدار  $\beta$  کوچک‌تر از یک ( $\beta = 0.5$ ) و در شکل ۲ بزرگ‌تر از یک ( $\beta = 1.5$ ) در نظر گرفته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در حالتی که  $\beta$  کوچک‌تر از یک باشد، دستگاه دارای یک نقطه بحرانی  $\mu_{c_1}$  است که برای  $\mu < \mu_{c_1}$  دستگاه در فاز بدیهی قرار دارد و فاقد مدهای لبه‌ای است. برای  $\mu > \mu_{c_1}$  دستگاه در فاز توپولوژیک با مدهای لبه‌ای با انرژی غیر صفر قرار دارد که مدهای جرم‌دار دیراک نامیده می‌شوند. در حالتی که  $\alpha = \beta$  باشد [۴۵]، به جای مدهای لبه‌ای جرم‌دار مدهای بدون جرم مایورانا خواهیم داشت ( $\alpha = \beta = 0.5$  در شکل ۱).

### ۶. ناوردهای توپولوژیکی

فازهای توپولوژیکی توسط ناوردهای توپولوژیکی گوناگون توصیف می‌شوند که بستگی به وجود یا عدم وجود تقارن وارونی زمان دارند. مدل کیتائف تقارن ذره-حفره، وارونی زمان و تقارن کایرال دارد که این تقارن در مدل تعمیم یافته نیز حفظ می‌شود. وجود این تقارن‌ها حرکت بردار پیچش بلوخ  $\mathbf{h}(k)$  [۶۸] با تعریف

$$\mathbf{h}(k) = (h_x(k), h_y(k), h_z(k)), \quad (16)$$

را از سطح کره بلوخ [۶۸] به سطح حلقه در صفحه  $yz$  محدود می‌کند. این محدودیت منجر به پیدایش یک ناوردهای توپولوژیکی  $\mathbb{Z}$  می‌شود که با عدد پیچش  $n_w$  مشخص می‌شود. عدد پیچش توپولوژیک زاویه جاروب شده توسط  $\mathbf{h}(k)$  است هنگامی که تکانه  $k$  از  $-\pi$  تا  $\pi$  تغییر می‌کند. می‌توان  $H(k)$  در معادله (۱۳) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

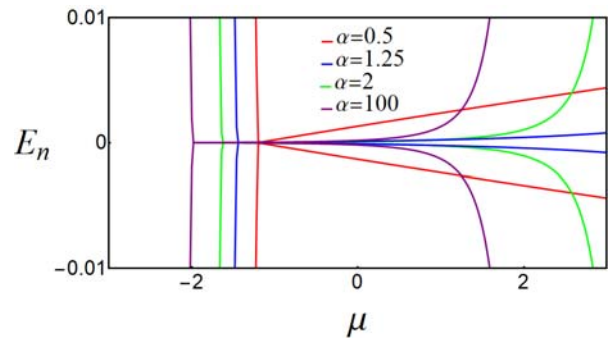
$$H(k) = \mathbf{h}(k) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (17)$$

که در آن  $\boldsymbol{\sigma}$  برداری است که مؤلفه‌های آن ماتریس‌های پائولی هستند. به این ترتیب عدد پیچش، برحسب بردار یکه  $|\hat{\mathbf{h}}(k) = \mathbf{h}(k)/|\mathbf{h}(k)|$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود [۶۸]:

$$n_w = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{\partial_k \hat{h}_z(k)}{\hat{h}_y(k)}, \quad (18)$$

اگر بتوان عملگری مانند  $P$  پیدا کرد که در رابطه  $PH(k)P^{-1} = -H(-k)$  صدق کند، می‌توان گفت که دستگاه تقارن ذره-حفره دارد. با در نظر گرفتن  $P = \sigma_x$  می‌توان نشان داد که مدل کیتائف تعمیم یافته تقارن ذره-حفره دارد.

با توجه به تعریف عملگر ذره-حفره  $P$  و تابع کمکی  $W(k) = H(k)P$  خواهیم داشت  $W(k)^T = -W(-k)$  که در آن  $W(k)^T$  ترانزپوزیته  $W(k)$  است. اگر تکانه متقارن ذره-حفره را در منطقه بریلوئن  $k \in [0, \pm\pi]$  در نظر بگیریم، در مرزهای منطقه بریلوئن خواهیم داشت:  $W(0)^T = -W(0)$  و  $W(\pi)^T = -W(\pi)$  که هر دو ماتریس پادمتقارن هستند. توپولوژی مدل کیتائف با جفت‌شدگی و جنبش بلند برد را می‌توان توسط شکل فافین هامیلتونی در  $k=0$  و  $k=\pi$  به



شکل ۳. مدهای لبه‌ای مربوط زنجیره‌های با نرخ تونل‌زنی متفاوت ( $\beta = 1/\delta$ )  $\alpha = 0/5, 1/25, 2, 100$

باشند. در بخش بعد با استفاده از حل تحلیلی دقیق، محل گذار فازها و نوع گذار فازها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

### ۵. محاسبات تحلیلی و حل دقیق

با فرض رابطه‌ی نمایی  $w_l = wl^{-\alpha}$  و  $\Delta_l = \Delta l^{-\beta}$  معادلات (۵) به شکل

$$S_k = \Delta \sum_{l=1}^{N/r} \frac{\sin(lk)}{l^\beta}, \quad C_k = w \sum_{l=1}^{N/r} \frac{\sin(lk)}{l^\alpha}, \quad (12)$$

ساده می‌شوند که در این صورت هامیلتونی (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H(k) = \begin{pmatrix} h_z(k) & -ih_y(k) \\ ih_y(k) & -h_z(k) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

که در آن  $h_y(k)$  و  $h_z(k)$  به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$h_z(k) = -(C_k - \mu/r) = \mu/r - w \sum_{l=1}^{N/r} \frac{\cos(lk)}{l^\alpha}, \quad (14)$$

$$h_y(k) = S_k = \Delta \sum_{l=1}^{N/r} \frac{\sin(lk)}{l^\beta},$$

و می‌توان آنها را بر حسب توابع پلی‌لگاریتم نیز نوشت

$$\pm h_z(k) = \pm \frac{1}{r} \left\{ \mu - w \left[ Li_\alpha(e^{\mp ik}) + Li_\alpha(e^{\pm ik}) \right] \right\} \quad (15)$$

$$h_y(k) = i \frac{\Delta}{r} \left[ Li_\beta(e^{-ik}) + Li_\beta(e^{ik}) \right],$$

$Li_\alpha(z)$  تابع پلی‌لگاریتم از مرتبه  $\alpha$  و با متغیر  $z$  است.

برای حالتی که  $\alpha < 1$  است، با استفاده از روابط داده شد در (۱۴)، عدد پیچش  $n_w$  در معادله (۱۶) برای  $\mu < \mu_{c_1}$  برابر  $1/2$  و برای  $\mu > \mu_{c_1}$  مقدار آن  $1/2 -$  است. اگر  $\alpha > 1$  باشد، هنگامی که  $\mu_{c_1} < \mu < \mu_{c_2}$  است،  $n_w = 1$  به دست می‌آید و در غیر این صورت  $n_w = 0$  خواهد بود.

لازم به ذکر است در حالتی که  $\alpha < 1$  باشد عدد پیچش نیم صحیح است؛ زیرا  $H(k)$ ، بر حسب توابع پلی‌لگاریتم، در  $k = 0$  و اگر خواهد شد. به ویژه این که با تغییر  $k$  در بازه  $(0, 2\pi)$ ، تابع  $h_y(k)$  صفر نخواهد شد. در واقع می‌توان مشاهده کرد که  $h_z(k)$  و  $h_y(z)$  در روابط

$$\begin{aligned} h_z(k) &= h_z(2\pi - k), \\ h_y(k) &= -h_y(2\pi - k), \end{aligned} \quad (21)$$

صدق می‌کنند. البته باید توجه داشت که اگر حد  $k \rightarrow 0$  را قبل از حد ترمودینامیکی  $N \rightarrow \infty$  اعمال کنیم در این صورت  $h_y(0) = h_y(\pi) = 0$  و به این ترتیب عدد پیچش باز هم مقادیر صحیح خواهد داشت، یعنی به جای  $n_w = \pm 1/2$  داریم  $n_w = 0, 1$ .

### ب) $\alpha \neq \beta$

اکنون در حالت کلی، خطوط بحرانی را در حد  $N \rightarrow \infty$  رسم می‌کنیم که با اعمال شرط  $h_y(0) = h_y(\pi) = 0$  و  $h_z(0) = h_z(\pi) = 0$  ایجاد می‌شود. مقادیر بحرانی پتانسیل شیمیایی، مشابه حالت قبل، به صورت

$$\begin{aligned} \mu_{c_1} &= -rw \eta(\alpha) = rw (r^{1-\alpha} - 1) \zeta(\alpha), \\ \mu_{c_2} &= rw \zeta(\alpha), \end{aligned} \quad (22)$$

به دست می‌آیند.

با توجه به مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  حالت‌های بحرانی ایجاد شده متفاوت هستند که آنها را از هم تفکیک کرده و جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

- $\alpha > 1$  و  $\beta > 1$ : در این حالت جمله جنبشی و برهم‌کنشی در هامیلتونی هر دو به سرعت افت پیدا می‌کنند.  $h_z(k_c)$  و  $h_y(k_c)$  به ازای هر دو مقدار  $k_c = \pi$  و  $k_c = 0$  صفر می‌شود. در نتیجه  $\mu_{c_1}$  و  $\mu_{c_2}$  هر دو نقطه بحرانی هستند.

صورت  $v = \text{sign}[Pf(W(0))(Pf(W(\pi)))]$  مشخص کرد. در اینجا  $v$  عدد ناوردای توپولوژیکی است؛ به این معنی که مقدار  $v = -1$  ( $v = 1$ ) متناظر با فاز توپولوژیک بدیهی (غیر بدیهی) خواهد بود. فافین  $W(0)$  و  $W(\pi)$  برای مدل کیتائف بلند برد به صورت زیر به دست می‌آید [۲۲ و ۶۹]:

$$Pf(W(0)) = h_z(0), \quad Pf(W(\pi)) = h_z(\pi). \quad (19)$$

### ۷. نمودار فاز

به منظور بررسی فازهای توپولوژیکی، نقاط بحرانی را در حد ترمودینامیکی  $N \rightarrow \infty$  محاسبه می‌کنیم. این کار را ابتدا برای حالتی که جملات مربوط به جنبش و برهم‌کنش فرمیون‌ها در هامیلتونی با نمای یکسانی افت پیدا می‌کنند ( $\alpha = \beta$ ) انجام می‌دهیم؛ اما در نهایت آنها را در حالت کلی در نظر خواهیم گرفت.

#### الف) $\alpha = \beta$

در این حالت در شرایطی که  $h_z(0) = h_z(\pi) = 0$  باشد مقادیر بحرانی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \mu_{c_1} &= -rw \eta(\alpha) = rw (r^{1-\alpha} - 1) \zeta(\alpha), \\ \mu_{c_2} &= rw \zeta(\alpha), \end{aligned} \quad (20)$$

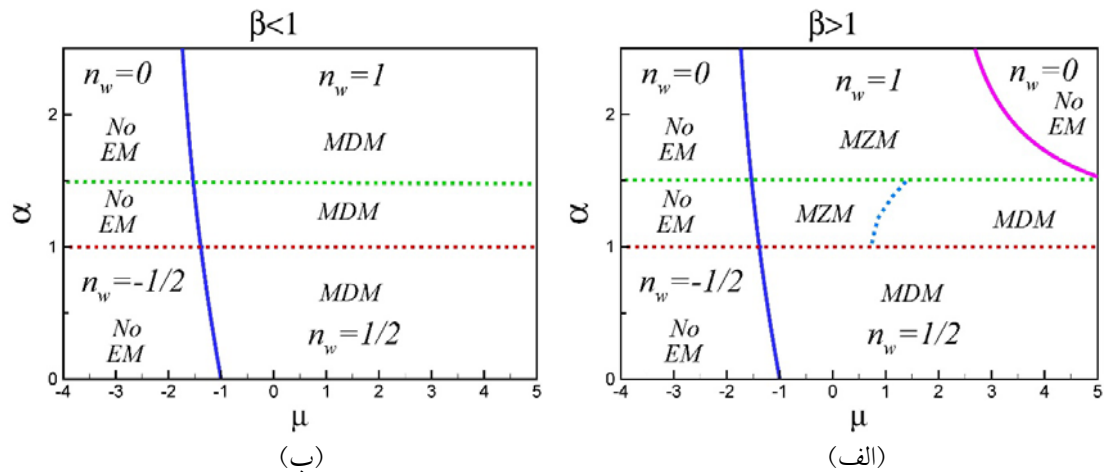
که با استفاده از تابع زتای ریمان<sup>۱</sup> و تابع اتای دیریکله<sup>۲</sup> تعریف شده‌اند.

اگر  $\alpha > 1$  باشد، در این صورت برای هر دو مقدار  $k_c = 0$  و  $k_c = \pi$  داریم  $h_z(k_c) = 0$  و در نتیجه دستگاه دارای دو نقطه بحرانی  $\mu_{c_1}$  و  $\mu_{c_2}$  خواهد بود.

اگر  $\alpha < 1$  باشد، در این صورت تنها در  $k_c = \pi$  مقدار  $h_z(k_c)$  صفر می‌شود و بنابراین تنها نقطه بحرانی است ولی نقطه  $\mu_{c_2}$  بحرانی نخواهد بود (گاف انرژی بسته نمی‌شود)؛ زیرا در صورتی که  $k$  به سمت صفر میل کند  $h_z(k)$  و اگر خواهد شد.

۱. Riemann zeta function

۲. Dirichlet eta function



شکل ۴. نمودار فاز توپولوژیکی برای زنجیره کیتائف با جنبش و برهم کنش بلند برد برای (الف)  $\beta < 1$  و (ب)  $\beta > 1$ .

توپولوژیکی بین فاز توپولوژیکی غیر بدیهی و فاز توپولوژیکی بدیهی فاقد مدهای مایورانا (MZM) به وجود می‌آید.

در شکل ۴. ب نمودار فاز مربوط به  $\beta > 1$  آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم بسته به مقدار  $\alpha$ ، ویژگی توپولوژیکی مدل را می‌توان به سه ناحیه تقسیم کرد. در ناحیه  $0 < \alpha < 1$ ، که آن را ناحیه دیراک می‌نامیم، صرفاً نتیجه بلند برد بودن جمله جنبشی است و در مدل کیتائف اولیه وجود ندارد. در این ناحیه برای  $\mu < \mu_c$  دستگاه، با شرط مرزی باز<sup>۳</sup>، در فاز توپولوژیکی بدیهی قرار دارد و فاقد مد لبه‌ای است. با این حال اگر  $\mu > \mu_c$  باشد، دستگاه حاوی مدهای جرم‌دار توپولوژیکی در لبه‌ها خواهد بود. ظهور مدهای جرم‌دار دیراک ناشی از برهم‌کنش بین دو مد بدون جرم مایورانا است که در دو انتهای زنجیره قرار دارند و نتیجه مستقیم بلند برد بودن جنبش فرمیون‌ها و جفت‌شدگی ابرسانایی آنها است.

ناحیه  $\alpha > 3/2$  (ناحیه مایورانا) از نظر توپولوژیکی معادل با مدل کیتائف کوتاه برد است. اگر پتانسیل شیمیایی در بازه  $\mu_c < \mu < \mu_c$  باشد، فاز توپولوژیک است، یعنی مدهای بدون جرم مایورانا حضور دارند؛ اما در خارج از این بازه،

•  $\alpha > 1$  و  $\beta < 1$ : در این حالت جمله جنبشی به سرعت افت پیدا می‌کند اما جمله برهم‌کنشی روند کاهشی کندی خواهد داشت.  $h_z(k_c)$  به ازای هر دو مقدار  $k_c = 0$  و  $k_c = \pi$  صفر می‌شوند، اما  $h_y(k_c)$  تنها به ازای  $k_c = \pi$  صفر خواهد شد. در نتیجه تنها نقطه بحرانی خواهد بود، اما  $\mu_c$  دارای گاف انرژی است زیرا  $h_y(k_c)$  در حد  $k \rightarrow 0$  واگرا می‌شود.

•  $\alpha < 1$  و  $\beta > 0$ : جمله جنبشی به آرامی افت پیدا می‌کند اما جمله برهم‌کنشی روند کاهشی سریعی خواهد داشت.  $h_z(k_c)$  و  $h_y(k_c)$  فقط در  $k_c = \pi$  صفر می‌شوند، بنابراین نقطه  $\mu_c$  همچنان بحرانی است اما با توجه به این که  $h_z(k_c)$  در حد  $k \rightarrow 0$  واگرا است،  $\mu_c$  گاف انرژی خواهد داشت.

### ج) نمودار فاز مربوط به $\alpha \neq \beta$

نمودار فازهای مربوط به مدل مورد نظر در شکل ۴ رسم شده است. همان‌طور که نشان داده شد، اگر  $\beta < 1$  باشد (شکل ۴. الف). تنها  $\mu_c$  خط بحرانی (خط پیوسته آبی) خواهد بود. در حالتی که  $0 < \alpha < 3/2$  باشد، گذار فاز توپولوژیکی بین فاز توپولوژیکی بدیهی، یعنی فاقد مد لبه<sup>۱</sup> (EM)، و مد جرم‌دار دیراک<sup>۲</sup> (MDM) رخ می‌دهد. برای مقادیر  $\alpha > 3/2$ ، گذار فاز

۱. Edge Mode

۲. Dirac Massive Mode

۳. Open boundary condition

برد تبدیل می‌شود). با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای  $\alpha$  و  $\beta$  مشاهده می‌کنیم که این زنجیره می‌تواند ویژگی‌های متفاوتی نسبت به مدل کیتائف استاندارد داشته باشد.

به منظور تعیین خصوصیات توپولوژیکی دستگاه، عدد پیچش را که ناوردای توپولوژیکی است محاسبه کردیم تا بتوانیم فازهای توپولوژیک و غیرتوپولوژیک دستگاه را مشخص کرده و با تعیین خطوط بحرانی در حد ترمودینامیکی، نمودار فاز مربوطه را رسم کنیم. نشان دادیم که وقتی نماهای  $\alpha$  و  $\beta$  متفاوت باشند، در این صورت دستگاه علاوه بر مدهای بدون جرم مایورانا که در مرزهای دستگاه قرار دارند، می‌تواند حاوی مدهای لبه‌ای جرم‌دار دیراک نیز باشد. این مدها با عدد پیچش نیم صحیح مشخص می‌شوند و نتیجه مستقیم متفاوت بودن نماهای افت جمله‌های جنبشی و جفت‌شدگی فرمیون‌ها هستند و از برهم‌کنش بین دو مد لبه‌ای بدون جرم مایورانا به وجود می‌آیند.

مدهای لبه‌ای مایورانا است.  $\mu < \mu_c$  و یا  $\mu > \mu_c$ ، دستگاه در فاز غیر توپولوژیک و فاقد

ناحیه  $1 < \alpha < 3/2$ ، در این ناحیه که آن را ناحیه گذار می‌نامیم هم حاوی مدهای لبه‌ای بدون جرم است و هم مدهای لبه‌ای جرم‌دار. در ناحیه میانی رابطه پاشندگی انرژی  $\epsilon_k$  دیگر واگرا نیست اما مشتق آن نسبت به  $k$  همچنان در  $k = 0$  تکین است و بنابراین برای ناحیه میانی نمی‌توان عدد پیچش تعریف کرد.

## ۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل ابررسانایی موج  $p$  یک‌بعدی تعمیم‌یافته، که در آن پارامترهای تونل‌زنی و جفت‌شدگی بلند برد هستند و شدت آنها به صورت نمایی، به ترتیب، با  $I^{-\alpha}$  و  $I^{-\beta}$  کاهش پیدا می‌کنند، مورد بررسی قرار گرفت. این مدل در واقع تعمیم یافته زنجیره کیتائف است که در آن جملات هامیلتونی کوتاه برد هستند و هر فرمیون صرفاً با اولین همسایه ارتباط دارد (مدل کیتائف تعمیم یافته در حد  $\alpha, \beta \rightarrow \infty$  به مدل کیتائف کوتاه

## مراجع

1. X G Wen, "Quantum Field Theory and Many Body Systems", Oxford University Press, Oxford (2007).
2. T Kitagawa, E Berg, M Rudner, and E Demler, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 235114.
3. N H Lindner, G Refael, and V Galitski, *Nature Phys.* **7** (2011) 490.
4. L Jiang, T Kitagawa, J Alicea, A R Akhmerov, D Pekker, G Refael, J I Cirac, E Demler, M D Lukin, and P Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 220402.
5. Z Gu, H A Fertig, D P Arovas, and A Auerbach, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 216601.
6. T Kitagawa, T Oka, A. Brataas, L Fu, and E Demler, *Phys. Rev. B* **84** (2011) 235108.
7. N H Lindner, D L Bergman, G Refael, and V Galitski, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 235131.
8. M Trif and Y Tserkovnyak, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 257002.
9. A Russomanno, A Silva, and G E Santoro, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 257201.
10. V M Bastidas, C Emary, G Schaller, and T Brandes, *Phys. Rev. A* **86** (2012) 063627.
11. V M Bastidas, C Emary, B Regler, and T Brandes, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 043003.
12. M Tomka, A Polkovnikov, and V Gritsev, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 080404.
13. A Gomez-Leon and G Platero, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 200403.
14. B Dora, J Cayssol, F Simon, and R Moessner, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 056602.
15. D E Liu, A Levchenko, and H U Baranger, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 047002.
16. Q J Tong, J H An, J Gong, H G Luo, and C H Oh, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 201109(R).
17. Y T Katan and D Podolsky, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 016802.
18. A Kundu and B Seradjeh, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 136402.
19. V M Bastidas, C Emary, G Schaller, A Gomez-Leon, G Platero, and T Brandes, arXiv:1302.0781v2.
20. T L Schmidt, A Nunnenkamp, and C Bruder, *New J. Phys.* **15** (2013) 025043.
21. A A Reynoso and D Frustaglia, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 115420.
22. A Y Kitaev, *Phys. Usp.* **44** (2001) 131.
23. I C Fulga, F. Hassler, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **83** (2011) 155429.
24. J D Sau and S. Das Sarma, *Nature Comm.* **3** (2012) 964.
25. R M Lutchyn and M P A. Fisher, *Phys. Rev. B* **84** (2011) 214528.



49. A Ghazaryan and T Chakraborty, *Phys. Rev. B* **92** (2015) 115138.
50. D Vodola, L Lepori, E Ercolessi, A V Gorshkov, and G Pupillo, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 156402.
51. D Vodola, L Lepori, E Ercolessi, and G Pupillo, *New J. Phys.* **18** (2016) 015001.
52. O Viyuela, D Vodola, G Pupillo, and M A Delgado, *Phys. Rev. B* **94** (2016) 125121.
53. U Bhattacharya and A Dutta, *Phys. Rev. B* **97** (2018) 214505.
54. P Urich, N Defenu, R Jafari, and J C Halimeh, *Phys. Rev. B* **101** (2020) 245148.
55. L Lepori, L Dell'Anna, *New J. Phys.* **19** (2017) 103030.
56. Z C Shi, X Q Shao, and X X Yi, arXiv:1507.03657v3.
57. F Pientka, L I Glazman, and F Von Oppen, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 155420.
58. F Pientka, Y Peng, L Glazman, and F Von Oppen, *Phys. Scr.* **T164** (2015) 014008.
59. K Patrick, T Neupert, and J K Pachos, *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017).
60. Z Huang and D P Arovas, *Phys. Rev. Lett.* **113** (2014) 076407.
61. O Viyuela, A Rivas and M A Martin-Delgado, *2D Mater.* **2** (2015) 034006.
62. M Van Regemortel, D Sels and M Wouters *Phys. Rev. A* **93** (2016) 032311.
63. D Giuliano, S Paganelli and L Lepori *Phys. Rev. B* **97** (2018) 155113.
64. P Cats, A Quelle, O Viyuela, M A Martin-Delgado, and C Morais Smith, *Phys. Rev. B* **97** (2018) 121106 (R).
65. S Tewari and J D Sau, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 150408.
66. A Altland and M R Zirnbauer, *Phys. Rev. B* **55** (1997) 1142.
67. L Santos, Y Nishida, C Chamon, and C Mudry, *Phys. Rev. B* **83** (2011) 104522.
68. L Li, C Yang, and S Chen, *Europhys. Lett.* **112** 1 (2015) 10004.
69. P Ghosh, J D Sau, S Tewari, and S Das Sarma, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 184525.
26. W DeGottardi, D Sen, and S Vishveshwara, *New J. Phys.* **13** (2011) 065028.
27. W DeGottardi, D Sen, and S Vishveshwara, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 146404.
28. M Thakurathi, A A Patel, D Sen, and A Dutta, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 155133.
29. W DeGottardi, M Thakurathi, S Vishveshwara, and D Sen, *Phys. Rev. B* **88** (2013) 165111.
30. L J Lang and S Chen, *Phys. Rev. B* **86** (2012) 205135.
31. Y Niu, S B Chung, C H Hsu, I Mandal, S Raghu, and S Chakravarty, *Phys. Rev. B* **85** (2012) 035110.
32. A A Zvyagin, *Phys. Rev. B* **90** (2014) 014507.
33. S Nadj-Perge, I K Drozdov, J Li, H Chen, S Jeon, J Seo, A H MacDonald, B A Bernevig, and A Yazdani, *Science* **346** (2014) 602.
34. V Mourik, K Zuo, S M Frolov, S R Plissard, E P A M Bakkers, and L P Kouwenhoven, *Science* **336** (2012) 1003.
35. M T Deng, C L Yu, G Y Huang, M Larsson, P Caro, and H Q Xu, *Nano Lett.* **12** (2012) 6414.
36. A Das, Y Ronen, Y Most, Y Oreg, M Heiblum, and H Shtrikman, *Nat. Phys.* **8** (2012) 887.
37. W Chang, V Manucharyan, T Jespersen, J Nygard, and C Marcus, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 217005.
38. L P Rokhinson, X Liu, and J K Furdyna, *Nat. Phys.* **8** (2012) 795.
39. H O H. Churchill, V Fatemi, K Grove-Rasmussen, M T Deng, P Caroff, H Q Xu, and C M Marcus, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 241401(R).
40. A D K Finck, D J Van Harlingen, P K Mohseni, K Jung, and X Li, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 126406.
41. J Alicea, *Rep. Prog. Phys.* **75** (2012) 076501.
42. [42] M. Leijnse and K. Flensberg, *Semicond. Sci. Technol.* **27** (2012) 124003.
43. C W J Beenakker, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **4** (2013) 113.
44. T D Stanescu and S Tewari, *J. Phys.: Condens. Matter* **25** (2013) 233201.
45. J Alicea, Y Oreg, G Refael, F Von Oppen, and M P A Fisher, *Nat. Phys.* **7** (2011) 412.
46. A R Akhmerov, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 020509(R).
47. P Pfeuty, *Ann. Phys.* **57** (1970) 79.
48. E Lieb, T Schultz, and D Mattis, *Ann. Phys.* **16** (1961) 407.