



مطالعه ساختار نامتقارن قرص‌های پیش سیاره‌ای با استفاده از روش طیفی

محمود قلی‌پور*

۱. مرکز تحقیقات نجوم و اخترفیزیک مراغه، دانشگاه مراغه

پست الکترونیکی: gholipour@riaam.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۰۴؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۰۴/۰۶)

چکیده

قرص‌های برافزایشی، در سراسر عالم هستی حضوری پررنگ و حیاتی دارند. از قرص‌های کهکشانی گرفته تا قرص‌های پیش سیاره‌ای که سیارات از آنها متولد می‌شوند، همگی در زمره قرص‌های برافزایشی قرار می‌گیرند. بنابراین مطالعه ساختار قرص‌های واقعی در مقابل قرص‌های آرمانی (مانند زمانی که آنها کاملاً متقارن محوری نیستند)، مفید خواهد بود. در این پژوهش، قصد داریم ساختار یک قرص پیش سیاره‌ای را، که تقارن آن توسط یک جسم پر جرم ثانوی مختل شده است، مورد بررسی قرار دهیم. با بررسی اثر گرانشی جسم ثانوی، مشاهده می‌کنیم که علاوه بر تغییرات شعاعی، تغییرات سمتی (یا زاویه‌ای) نیز مهم می‌شوند. بعد از فرمول‌بندی مسئله، ما با یک دسته از معادله دیفرانسیل‌های پاره‌ای (دو متغیره، شعاعی و سمتی) مواجه می‌شویم. لذا با استفاده از روش‌های تحلیلی، این معادلات تبدیل به یک مجموعه نامتناهی (سری) از معادلات معمولی (تک متغیره) می‌شود. برای این مقصود، ما از روش طیفی، که یک روش قدرتمند برای تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی است، استفاده می‌کنیم. پرسش مهمی که در این پژوهش به دنبال پاسخ آن هستیم، این است که وارد کردن اثر گرانشی جسم دوم، چه رفتارهای فیزیکی جدیدی به مسئله وارد می‌کند؟ و آیا این تغییرات اساساً مهم هستند یا قابل صرف‌نظر کردن؟ با پاسخ به این سوالات می‌توانیم بفهمیم که آیا اساساً حضور جسم دوم در تشکیل سیارات در نواحی فی ما بین، نقش سازنده دارد یا مخرب. اگرچه ما مسئله را برای قرص‌های پیش سیاره‌ای حل می‌کنیم، اما نتایج ممکن است در مطالعه قرص‌های برافزایشی در سامانه‌های دوتایی مفید واقع شود.

واژه‌های کلیدی: اختر فیزیک، اثر گرانشی، روش طیفی، قرص‌های برافزایشی، ناپایداری، معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات دیفرانسیل معمولی.

۱. مقدمه

که هر کدام موفقیت‌ها و شکست‌هایی داشته‌اند.

برای مثال، قرص‌های برافزایشی شاکورا و سونیف قرص‌های پهن رفت غالب^۱، قرص‌های لاغر و قرص‌های تاب خورده^۲ تنها بخشی از مدل‌های قرص برافزایشی هستند [۱-۱۵].

شکل‌گیری قرص‌های برافزایشی اطراف جسم مرکزی، یکی از زیباترین و مهم‌ترین پدیده‌های فیزیکی در عالم هستی است. در دهه‌های اخیر، مدل‌های بسیار متنوع و گوناگونی، برای قرص‌های برافزایشی توسط افراد مختلف پیشنهاد شده است،

۱. ADAF disc

۲. Warped accretion disc

را با استفاده از روش‌های عددی حل می‌کنیم و در فصل پنجم، نتایج به دست آمده را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

۲. فرمول‌بندی مسئله

در این بخش، یک قرص برافزایشی اطراف یک جسم مرکزی را بررسی می‌کنیم که توسط اثر گرانشی جسم ثانویه مختل شده است. لازم به ذکر است که قرص از لحاظ هندسی لاغر و نازک فرض می‌شود. همچنین معادلات را در امتداد محور z و در دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر می‌گیریم. مبدأ دستگاه مختصات را بر روی جسم مرکزی در نظر می‌گیریم، تا کار را برای بررسی کردن تغییراتی که تابعی از φ و Γ است راحت‌تر کند.

همچنین جسم دوم با جرم M_* در فاصله d از جسم مرکزی با جرم M قرار گرفته شده است. در این صورت پتانسیل Φ_t ، در شعاع و زاویه دلخواه می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\Phi_t(r, \varphi) = \Phi(r) + \Psi(r, \varphi), \quad (1)$$

که Φ تابع پتانسیل مربوط به جسم مرکزی و Ψ تابع پتانسیل مربوط به جسم ثانویه است که در یک نقطه اختیاری در ناحیه بین دو جسم ($r < d$) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\Psi(r, \varphi) = -\frac{GM_*}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}}, \quad (2)$$

G ثابت گرانش جهانی است. رادیکال در رابطه (۲)، در ناحیه ($r < d$) می‌تواند به صورت یک سری دو جمله‌ای نامحدود بسط یابد، به طوری که:

$$\Psi(r, \varphi) = -\frac{GM_*}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos \varphi) \quad r < d, \quad (3)$$

که P_l توابع لژاندر با شاخص l هستند. همچنین بررسی مشتق Ψ نسبت به Γ ، φ بسیار مفید خواهد بود. می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial r} = -\sigma \frac{GM_*}{d^2} \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{x^l}{x} P_l(\cos \varphi), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial \varphi} = -\sigma \frac{GM_*}{r} f'(\varphi), \quad (5)$$

در این میان، قرص برافزایشی مدل آلفا (قرص شاکورا و سونیف) به عنوان قرص‌های برافزایشی استاندارد شناخته می‌شوند که از نظر هندسی نازک و از لحاظ اپتیکی، ضخیم هستند. در این مدل، مواد داخل قرص برافزایشی با سرعت زاویه‌ای تقریباً کپلری می‌چرخند و وشکسانی تلاطمی عاملی مؤثر برای کاهش اندازه حرکت زاویه‌ای معرفی می‌شود. در این راستا، مطالعات بسیار خوبی نسبت به مدل‌های دیگر صورت پذیرفته است؛ زیرا اکثر قرص‌ها از جمله قرص‌های پیش سیاره‌ای در این دسته‌بندی قرار می‌گیرند.

در هر صورت، برای آشنایی با مدل قرص‌های برافزایشی، مطالعه ساختار قرص برای مقایسه نتایج به دست آمده از مدل، با شواهد رصدی بسیار مفید است. به همین دلیل، بررسی ساختار شعاعی و عمودی قرص‌ها، در بسیاری از کارهای شبیه‌سازی و تحلیلی مورد توجه قرار گرفته است.

برای مثال ناریان و یی (۱۹۹۵) با استفاده از فرض خود مشابهی سیال در راستای شعاعی، ساختار قرص در راستای عمودی را در سیستم مختصات کروی مورد مطالعه قرار دادند [۱۵]. اما آنها سهم برون رفت مواد در راستای عمودی را در نظر نگرفتند. در سال ۲۰۱۱، جیاو و وی به بررسی این موضوع در قرص‌های برافزایشی پرداختند [۱۶]. این بررسی‌ها بعدها توسط افراد بسیاری توسعه داده شده است [۱۷-۲۲].

با وجود کارهای خوبی که در این راستا انجام گرفته است، ساختار قرص‌ها در اغلب اوقات، در راستای سمتی متقارن در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر با وجود تلاش‌های خیلی خوبی که در راستای شعاعی و عمودی قرص صورت پذیرفته، ساختار یک قرص ایستا در راستای سمتی (برای جلوگیری از محاسبات پیچیده ریاضیاتی) به طور کامل بررسی نشده است. لذا در این مقاله قصد داریم، ساختار یک قرص پیش سیاره‌ای را، که توسط یک سیاره پر جرم مختل شده است، مورد بررسی قرار دهیم. بدین منظور در بخش بعدی (بخش دوم) مسئله را فرمول‌بندی می‌کنیم. همچنین در بخش سوم، با استفاده از روش طیفی، معادلات به دست آمده در بخش دوم را حل می‌کنیم. در بخش چهارم، معادله دیفرانسیل‌های به دست آمده در بخش سه

که داریم:

$$f'(\varphi) = \sigma \frac{GM^*}{d^2} \sum_{l=0}^{\infty} x^l \frac{\partial P_l(\cos\varphi)}{\partial \varphi},$$

و $x = \frac{r}{d}$ شعاع بی بعد (نسبت شعاع به فاصله دو جسم) و $\sigma = M^*/M$ جرم بی بعد است (نسبت جرم جسم دوم به جسم مرکزی). در ادامه مسئله را با نوشتن معادلات (که از آنها در راستای z انتگرال گیری شده است) در فضای غیر لخت (چارچوب چرخان) توسعه می دهیم. برای این منظور محور x را روی خط واصل بین دو جسم تنظیم می کنیم، به طوری که جسم دوم حول محور z با سرعت زاویه ای کپلری Ω_* بچرخد. معادلات پایه ای در زیر آمده است:

رابطه پیوستگی:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \diamond (\Sigma V) = 0, \quad (6)$$

معادله حرکت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \diamond \nabla) V + 2\Omega_* \diamond V + \Omega_* \diamond (\Omega_* \diamond r) = -\frac{1}{\Sigma} \nabla p - \nabla \Phi_t + \frac{1}{\Sigma} \nabla \diamond T, \quad (7)$$

و معادله حالت:

$$p = c_s^2 \Sigma, \quad (8)$$

که Σ ، p ، $V = (V_r, V_\varphi)$ ، T و c_s به ترتیب چگالی سطحی، بردار سرعت، فشار گاز، تانسور وشکسانی، و سرعت صوت هستند.

فرض می شود که قرص در حال ایستا است ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). همچنین مفروضات استاندارد دیگری هم به صورت زیر وجود دارند:

۱. فرض می شود که جسم مرکزی به اندازه کافی پرجرم است، به طوری که مرکز جرم دو جسم، نزدیک به مرکز جسم مرکزی است. بنابراین جسم دوم با سرعت $\Omega_* \cong \sqrt{GM/d^3}$ می چرخد.

۲. مدل آلفا برای وشکسانی استفاده می شود [۱]. همچنین ما فرض می کنیم که عنصر $r\Phi$ تانسور وشکسانی، در قرص غالب است: $T_{r\varphi} = \alpha p$ که α ضریب وشکسانی است [۲].

۳. همچنین اثر خودگرانشی قرص نادیده گرفته می شود.

۴. اثر میدان مغناطیسی قرص و هر دو جسم در این مطالعه منظور نشده است.

۵. همچنین ما اثر عمومی نسبت عام را در تحقیق مان نادیده می گیریم.

۶. فرض می شود که قرص در مرحله بعد از نقل و انتقال سیاره ای است.

مفروضات استاندارد بالا، باعث می شوند به شکلی ساده تر از معادلات پایه هدایت شویم. بدین سان معادله پیوستگی و دو مؤلفه معادله حرکت می توانند به صورت زیر دوباره بازنویسی شوند

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Sigma v_r \varphi) = 0, \quad (9)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} - 2\Omega_* v_\varphi - r\Omega_*^2 + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{v_\varphi}{r} v_r + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + 2\Omega_* v_r + \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2T_{r\varphi}}{r} \right) = 0, \quad (11)$$

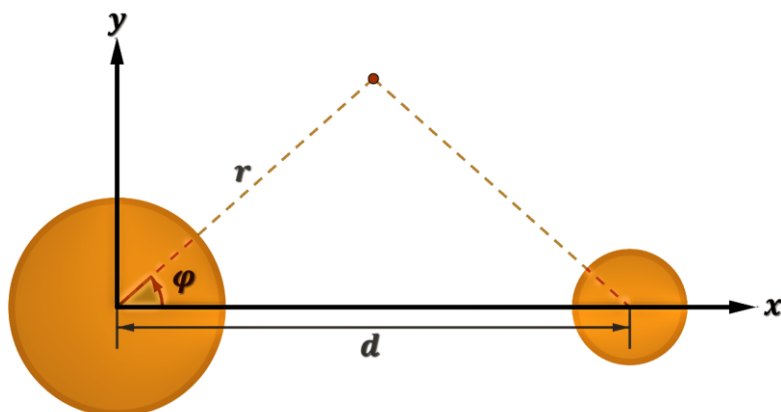
همچنین داشتیم:

$$p = c_s^2 \Sigma \quad (12)$$

واضح است، مجموعه روابط (۹) تا (۱۲)، مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل پاره ای (مشتق نسبت به دو متغیر) را تشکیل می دهند. در نتیجه ما به دنبال روش مناسبی برای تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره ای (جزئی) به معادلات دیفرانسیل معمولی (مشتق نسبت به یک متغیر) هستیم.

۳. حل با روش طیفی

در بخش قبل دیدیم که تابع پتانسیل جسم دوم بر حسب یک سری نامتناهی از توابع لژاندر قابل بیان است. از طرف دیگر، همان طور که می دانیم $P_n(z)$ ها، یک مجموعه کامل از توابع متعامد در بازه $-1 \leq z \leq 1$ تشکیل می دهند. در واقع، هر تابع خوش رفتار در این بازه (یعنی بین ۱ و -۱) می تواند بر حسب یک سری از توابع لژاندر بیان شود (برای



شکل ۱. طرحواره یک سیستم دوتایی که جرم مرکزی M در سمت چپ و جرم ثانوی M_* در سمت راست قرار دارد.

راحت‌تر خواهد بود. برای این منظور، ما رابطه بالا را در d ضرب می‌کنیم که حاصل به شرح زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sum u_n}{x} + u_n \frac{d \sum m}{dx} + \sum m \frac{du_m}{dx} \right) P_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sum v_m}{x} \left[\frac{P'_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi)}{+ P_n(\cos \varphi) P'_m(\cos \varphi)} \right] = 0, \quad (15)$$

اگر همین عملیات را روی روابط (۱۰) و (۱۱) انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(u_n \frac{du_m}{dx} - u_n \frac{u_m}{x} \right) P_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + \\ & \frac{1}{x^2} - \sigma \sum_{m=0}^{\infty} m x^{m-1} P_m(\cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_n v_m}{x} P'_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + c_* \frac{d}{dx} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_n P_n(\cos \varphi)) \right) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} u_n P_n(\cos \varphi) - x = 0, \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{dv_m}{dx} u_n - \frac{u_n v_m}{x} \right) P_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_n v_m}{x} P'_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + c_* \frac{d}{dx} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_n P_n(\cos \varphi)) \right) - \alpha_* \frac{d}{dx} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_n P_n(\cos \varphi)) \right) \\ & - \frac{\alpha_*}{x} - \sigma \sum_{n=0}^{\infty} x^n P'_n(\cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} v_n P_n(\cos \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

(۱۷)

اطلاعات بیشتر به پیوست مراجعه کنید). این بدان معناست که، ما باید داشته باشیم:

$$-1 \leq z \equiv \cos \varphi \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi$$

از طرف دیگر، همان‌طور که شکل ۱ نشان می‌دهد مسئله نسبت به محور x متقارن آینه‌ای دارد. بنابراین بازه فوق برای مسئله ما کفایت می‌کند. به عبارت دیگر، متغیرهای فیزیکی مسئله در بازه فوق می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$\begin{aligned} (r, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} (r) P_m(\cos \varphi) \quad p(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(r) P_m(\cos \varphi) \\ v_r(r, \varphi) &= \sqrt{\frac{GM}{d}} \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r) P_m(\cos \varphi) \quad v_\varphi(r, \varphi) = \\ & \sqrt{\frac{GM}{d}} \sum_{m=0}^{\infty} v_m(r) P_m(\cos \varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

همچنین، سرعت صوت را به صورت $c_s = c_* \sqrt{\frac{GM}{d}}$ که c_* یک ضریب بی بعد است، در نظر می‌گیریم. با جایگذاری روابط (۱۳) در رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sum u_n}{r} + u_n \frac{d \sum m}{dr} + \sum m \frac{du_m}{dr} \right) P_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sum v_m}{r} \\ & \left[P'_n(\cos \varphi) P_m(\cos \varphi) + P_n(\cos \varphi) P'_m(\cos \varphi) \right] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

اگر رابطه فوق را بر حسب x بنویسیم، کار با آنها بسیار

و الی آخر. همان طور که مشاهده می شود، مجموعه های زوج و فرد اختلاف ساختاری در داشتن σ دارند. با این وجود حل عددی این مجموعه معادلات مطرح شده چالش بسیار بزرگتری را می طلبد که در فصل بعد آن را بررسی می کنیم.

۴. روش های عددی

در این فصل، برای حل کردن مجموعه های از روابط، روش های عددی را بررسی می کنیم. همچنان که می دانیم، هر متغیر فیزیکی در رابطه (۱۳) از یک سری نامحدود از توابع لژاندر تشکیل شده است. در حل عددی، این سری ها تا یک عدد معین در نظر گرفته می شوند؛ مانند زیر:

$$\Sigma(r, \varphi) \cong \sum_{m=0}^N \Sigma_m(r) P_m(\cos \varphi), \quad (27)$$

که N یک عدد بزرگ است. خوشبختانه، لازم نیست N در مسئله ما خیلی بزرگ باشد. N کوچک تر از ده، تقریب بسیار خوبی به ما می دهد. دلیل این موضوع این است که مقادیر P_m ها با بزرگ شدن N سریع به سمت صفر میل می کنند. به عبارت دیگر، کافی است ده جمله اول از روابط را نگه داریم (اگر m بزرگ تر از 10 باشد، $\Sigma_m = 0$). این روش، اگرچه کاملاً دقیق نیست ولی تخمین قابل قبولی است. بنابراین، ما ده سری از روابط را بررسی می کنیم که باید با هم حل شوند (جمعاً ۳۰ رابطه). یکی از روش های مشهور برای حل کردن روابط مشتق با یک متغیر، روش رانگ-کوتا است [۲۳]. از این رو، ما از روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ برای حل کردن این مجموعه روابط استفاده می کنیم. به هر حال، مشکل بزرگ تر دیگر، پیدا کردن شرایط مرزی مناسب است.

اگر " $r \ll d$ " (یا $d \gg 1$) یعنی جسم دوم در فاصله زیادی از جسم مرکزی باشد، می توانیم فرض کنیم که قرص در این ناحیه تقریباً متقارن محوری است. از این رو، در این نواحی روابط زیر پیشنهاد می شود:

$$\Sigma \sim \beta \cdot r^{-n}, \quad v_r \sim -\epsilon \cdot r^{-s}, \quad v_\varphi \sim K \cdot r^{-\frac{1}{2}}, \quad (r \ll d) \quad (28)$$

و n و s ثابت هستند. از طرف دیگر ما باید داشته باشیم:

که به صورت αc_*^2 تعریف شده است. حال اگر در روابط (۱۵) تا (۱۷)، $z = \cos \varphi$ فرض کنیم و سپس از روابط بالا نسبت به z از -1 تا 1 انتگرال بگیریم، نتیجه، گروه نامحدودی از معادلات دیفرانسیل معمولی (با مشتق نسبت به یک متغیر) است، به طوری که فقط توابعی از x باقی می ماند. نتایج، بعد از اندکی محاسبات به شرح زیر است:

مجموعه اول معادلات:

$$2 \left(\frac{\Sigma_0 u_0}{x} + u_0 \frac{d\Sigma_0}{dx} + \Sigma_0 \frac{du_0}{dx} \right) - \frac{\pi \Sigma_1 v_0}{2x} = 0, \quad (18)$$

$$2 \left(u_0 \frac{du_0}{dx} - v_0 \frac{v_0}{x} \right) - 4u_0 - 2x + \frac{2}{x^2} - \frac{\pi u_1 v_1}{2x} + \frac{2c_*^2}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} = 0, \quad (19)$$

$$2 \left(u_0 \frac{dv_0}{dx} - u_0 \frac{v_0}{x} \right) + 4v_0 - \frac{4\alpha_*}{x} - \frac{\pi v_0 v_1}{2x} - \frac{2\alpha_*}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} = 0, \quad (20)$$

همچنین مجموعه دوم از معادلات:

$$2 \left(\frac{\Sigma_1 u_1}{x} + u_1 \frac{d\Sigma_1}{dx} + \Sigma_1 \frac{du_1}{dx} \right) + \frac{\pi}{16} \left(\frac{\Sigma_1 v_2}{x} - \frac{6\Sigma_2 v_1}{x} \right) = 0,$$

و

$$2 \left(u_1 \frac{du_1}{dx} - v_1 \frac{v_1}{x} \right) + \frac{\pi}{16} \left(\frac{u_2 v_1}{x} - \frac{6u_1 v_2}{x} \right) - \frac{2}{3} c_*^2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0^2} \frac{d\Sigma_1}{dx} = 0, \quad (21)$$

$$2 \left(u_1 \frac{dv_1}{dx} - u_1 \frac{v_1}{x} \right) - \frac{5\pi v_1 v_2}{16x} + \frac{2}{3} \alpha_* \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0^2} \frac{d\Sigma_1}{dx} + \frac{\pi}{2} \sigma + \frac{5\pi c_*^2}{16} \frac{\Sigma_1 \Sigma_2}{\Sigma_0^2} = 0, \quad (22)$$

و مجموعه سوم معادلات:

$$2 \left(\frac{\Sigma_2 u_2}{x} + u_2 \frac{d\Sigma_2}{dx} + \Sigma_2 \frac{du_2}{dx} \right) + \frac{\pi}{64} \left(\frac{6\Sigma_2 v_3}{x} - \frac{21\Sigma_3 v_2}{x} \right) = 0, \quad (24)$$

$$2 \left(u_2 \frac{du_2}{dx} - v_2 \frac{v_2}{x} \right) + \frac{\pi}{64} \left(\frac{6u_3 v_2}{x} - \frac{21u_2 v_3}{x} \right) - \frac{2}{5} c_*^2 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0^2} \frac{d\Sigma_2}{dx} = 0, \quad (25)$$

$$2 \left(u_2 \frac{dv_2}{dx} + u_2 \frac{v_2}{x} \right) - \frac{5\pi v_2 v_3}{64x} + \frac{2}{5} \alpha_* \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0^2} \frac{d\Sigma_2}{dx} + \frac{15\pi c_*^2}{64} \frac{\Sigma_2 \Sigma_3}{\Sigma_0^2} = 0, \quad (26)$$

البته مسئله برای V_ϕ کمی متفاوت است. برای نمونه $\sigma = 10^{-2}, 10^{-3}$ بیشترین مقدار خالص برای V_ϕ در $\phi = 180^\circ$ اتفاق می‌افتد و کمترین مقدار خالص برای آن در $\phi = 0^\circ$ رخ می‌دهد. به هر حال، صرف نظر از مقدار x نتیجه‌ای معکوس برای نمونه $\sigma = 10^{-4}$ به دست می‌آید.

شکل‌های ۶-۷ نمایانگر ساختار چگالی سطحی در مقابل زاویه سمتی برای مقادیر مشابه شکل‌های ۲ و ۳ است. همچنین این حالت‌ها نشان می‌دهند که نقطه اکسترم Σ در ناحیه [80,100] ظاهر می‌شود. این نقاط بیشترین مقدار را در $\sigma = 10^{-2}$ دارند و صرف نظر از مقدار x ، کمترین مقدار را در $\sigma = 10^{-3}, 10^{-4}$ دارند.

۵. نتایج و کاربردهای اختر فیزیکی

وقتی که یک سیاره بزرگ (سیاره شبیه به مشتری)، در قرص پیش ستاره‌ای تشکیل می‌شود (یا به شعاع جدید جابه‌جا می‌شود)، فضای زیادی از قرص نامتقارن محوری می‌شود. همچنین در قرص‌های برافزایشی که متعلق به ستاره‌های دوتایی است کشش مربوط به جرم ثانویه آنقدر زیاد است که عملاً اثر آن بر روی تقارن قرص برافزایشی قابل اغماض نیست. بدیهی است که، فرض تقارن محوری همیشه برقرار نیست. در واقع، سؤال مهم که در اینجا مطرح است، این است که تحت چه شرایطی، فرض تقارن محوری معتبر است؟

هرچند، مطالعاتی در این مورد، توسط شبیه‌سازی انجام گرفته است، اما مطالعه تحلیلی این موضوع، همچنان به طور کامل بررسی نشده است. در این پژوهش ما مدل ساده‌ای برای قرص‌های پیش سیاره‌ای پیشنهاد کردیم که تقارن محوری قرص توسط اثرات گرانشی سیاره حجیم و پر جرم، مختل شده است. این اثرات گرانشی می‌تواند توسط میدان پتانسیل Ψ که تابعی از x و σ است بیان شود. همچنین، پتانسیل می‌تواند توسط سری‌های دو جمله‌ای بسط یابد و سپس بر حسب r/d و چند جمله‌ای لژاندر باز نویسی شود. ما از بسط توابع متعامد (چند جمله‌های لژاندر) استفاده می‌کنیم تا دستگاه معادلات

$$\dot{m} = -2\pi r \Sigma v_r, \quad (29)$$

\dot{m} (سرعت فروریزش ماده) ثابت است. همچنین، روابط پیشنهادی در رابطه (۲۸) باید در روابط پایه (روابط ۹-۱۲) زمانی که متقارن محوری هستند، صدق کنند. در نتیجه، ما راه حلی مانند شکل زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$\Sigma \approx \frac{\beta_1}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad v_r \approx -\frac{\epsilon_1}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad v_\phi \approx \frac{K_1}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad (x \ll 1) \quad (30)$$

که صورت کسرهای در روابط فوق ثابت هستند. شرایط مرزی در $x \rightarrow x_0$ ($x_0 = R_0/d$) به طوریکه R_0 شعاع داخلی قرص است و $x_0 \ll 1$) با بسط دادن رابطه (۳۰) به صورت سری مکولورن تابعی از x حول نقطه x_0 ، نتیجه زیر را در بر دارد:

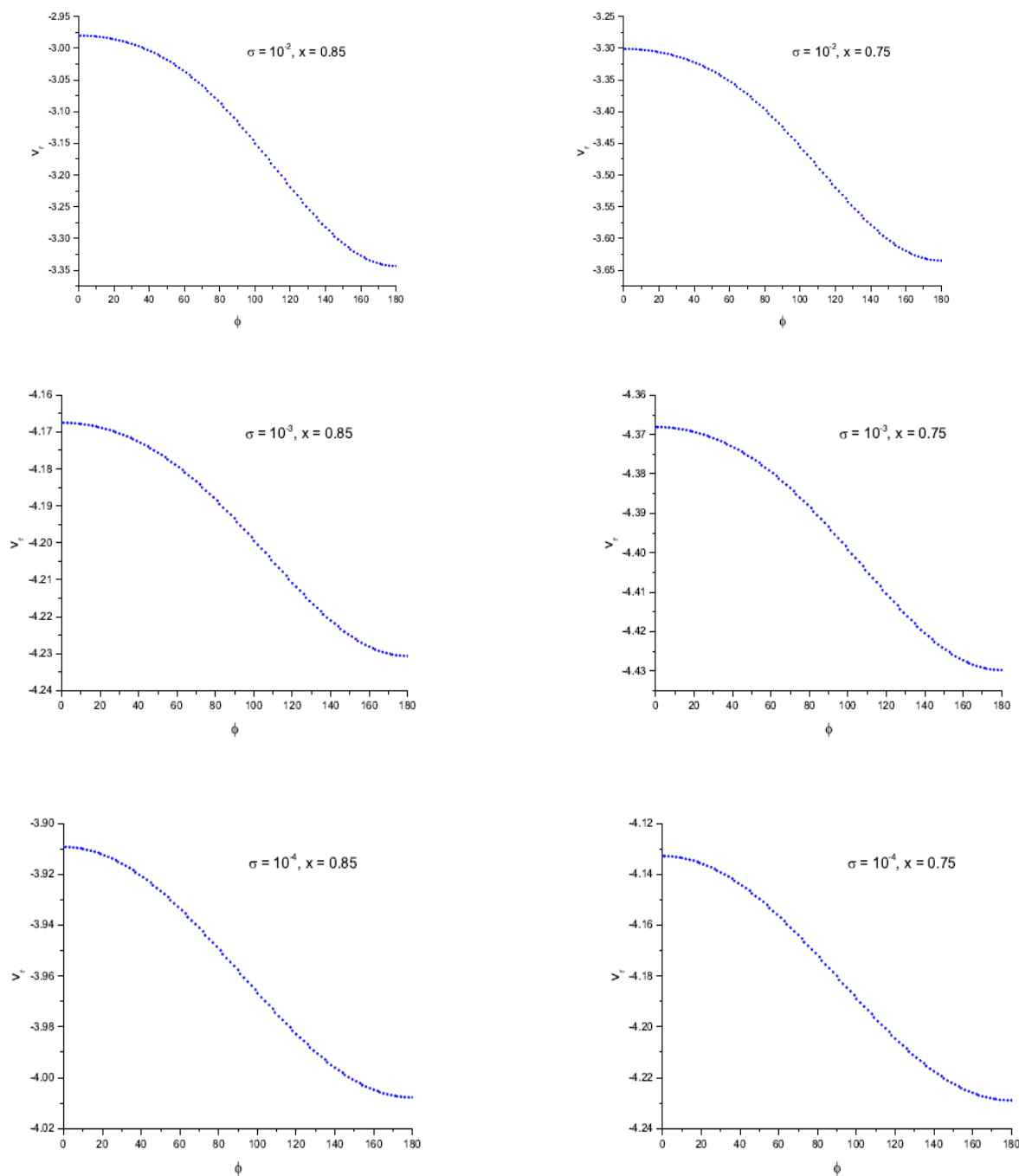
$$x \rightarrow x_0 : v_\phi = K_1 \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2\sqrt{x_0^3}}(x-x_0) + \frac{2}{8\sqrt{x_0^5}}(x-x_0)^2 + \dots \right),$$

$$v_r = -\epsilon_1 \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2\sqrt{x_0^3}}(x-x_0) + \frac{2}{8\sqrt{x_0^5}}(x-x_0)^2 + \dots \right),$$

$$\Sigma = \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{2\sqrt{x_0^3}}(x-x_0) + \frac{2}{8\sqrt{x_0^5}}(x-x_0)^2 + \dots \right), \quad (31)$$

اکنون، می‌توانیم مجموعه‌ای از روابط به دست آمده در بخش قبل را با دانستن معادلات بالا و پارامترهای اصلی حل کنیم. نتایج در شکل‌های ۲ تا ۷ خلاصه شده‌اند که مجموعاً حاوی ۳۶ نمودار هستند. شکل‌های ۲ و ۳ بیان‌کننده ساختار سرعت شعاعی در مقابل زاویه سمتی برای مقدارهای متفاوت: $x = 0/85, 0/75, 0/65, 0/55$ و $\sigma = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ است. این شکل نشان می‌دهد که سرعت شعاعی نسبت به زاویه سمتی حساس است. بیشترین مقدار خالص V_r در $\phi = 180^\circ$ و کمترین مقدار خالص آن در $\phi = 0^\circ$ است. همچنین با کمتر شدن مقدار σ ، مقدار خالص V_r در شعاع ثابت افزایش می‌یابد. بنابر این ساختار V_r برای مقدارهای مختلف σ و x ثابت است.

شکل‌های ۴ و ۵ نشان‌دهنده ساختاری از سرعت سمتی در مقابل زاویه سمتی برای مقدار مشابه شکل‌های ۲ و ۳ است.



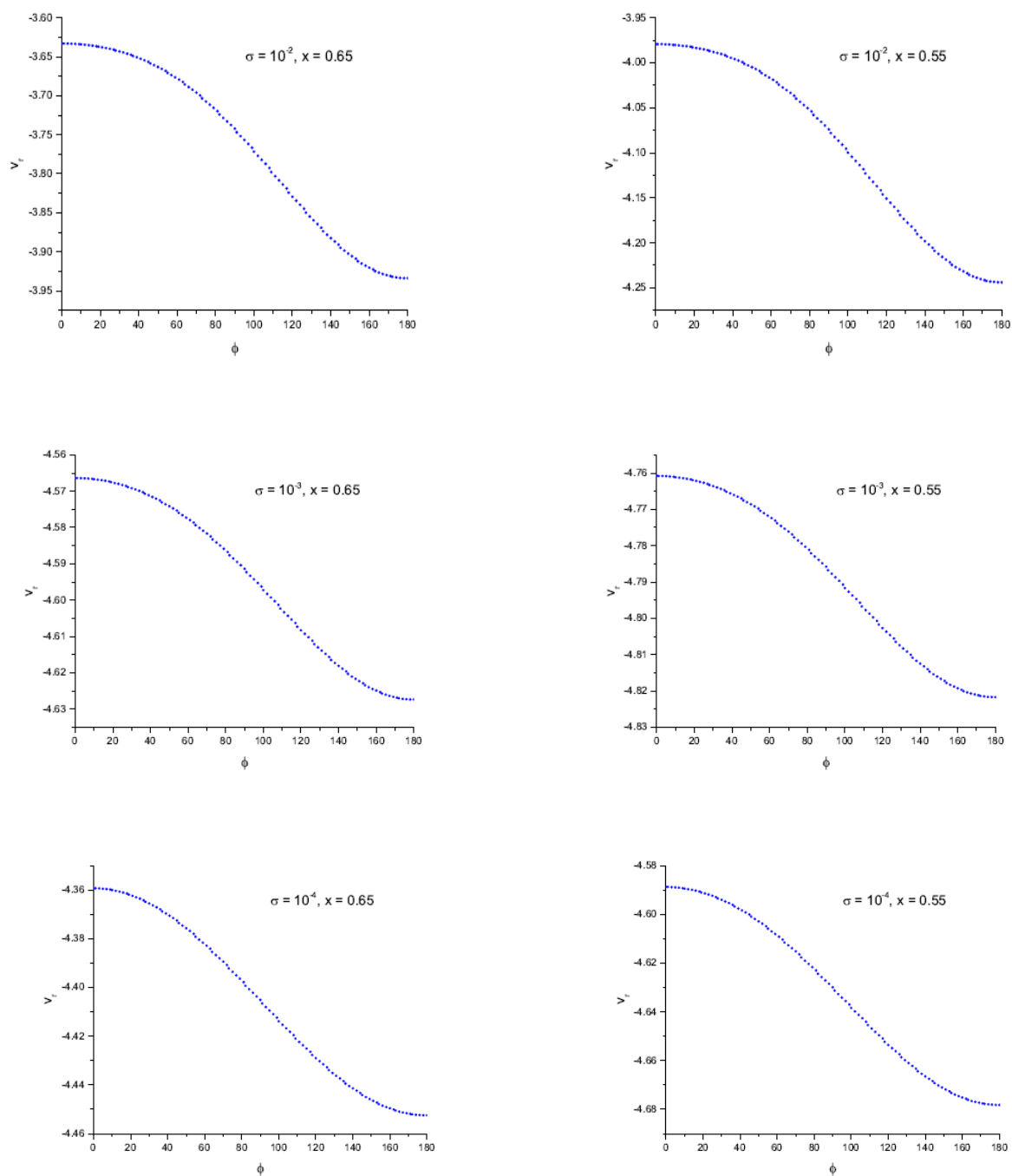
شکل ۲. نمودار تغییرات سرعت شعاعی نسبت به زاویه سمتی.

۵. ۱. نتایج

خلاصه‌ای از نتایج مهم به شرح زیر است:

۱. با توجه به مقدار V_r می‌توان گفت که برای انتقال اندازه حرکت زاویه‌ای، اطراف جسم دوم در مقدار وشکسانی کم

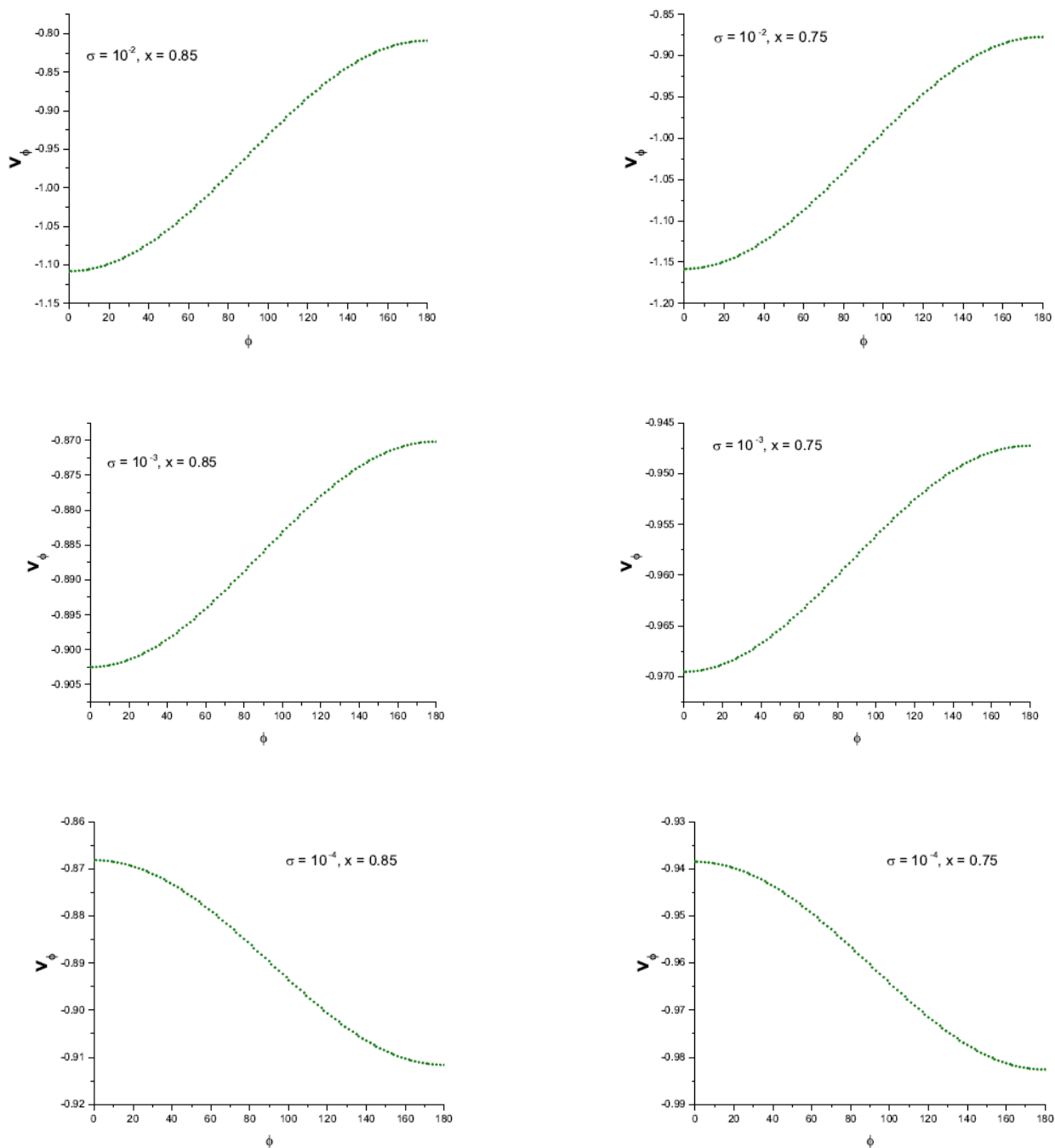
دیفرانسیل با مشتق جزئی (r, φ) را به معادلات دیفرانسیل معمولی که فقط تابعی از x هستند، تبدیل کنیم (این روش همچنین به روش طیفی مشهور است). سپس این مجموعه روابط با استفاده از شرایط مرزی مناسب حل شدند.



شکل ۳. نمودار تغییرات سرعت شعاعی نسبت به زاویه سمتی.

ثابت وجود دارد. در یک حالت ($\sigma = 10^{-2}$) چگالی سطحی در زاویه $\varphi \approx 95^\circ$ بیشترین میزان را دارد و در حالات دیگر $\sigma = 10^{-3}$ و $\sigma = 10^{-4}$ به ترتیب در $\varphi \approx 70^\circ$ و $\varphi \approx 80^\circ$ کمترین میزان را دارد. اما اگر به مقدار چگالی سطحی

($\alpha \rightarrow 0$) پتانسیل بالایی وجود دارد. بدین سان مطالعات بیشتر، برای دریافت جزئیات دقیق‌تر به نظر می‌تواند سودمند باشد. ۲. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که ساختار قرص در شعاع ثابت، به تغییرات سمتی خیلی حساس است؛ به طوری که نتایج نشان می‌دهد دو زاویه سمتی برای چگالی سطحی در شعاع

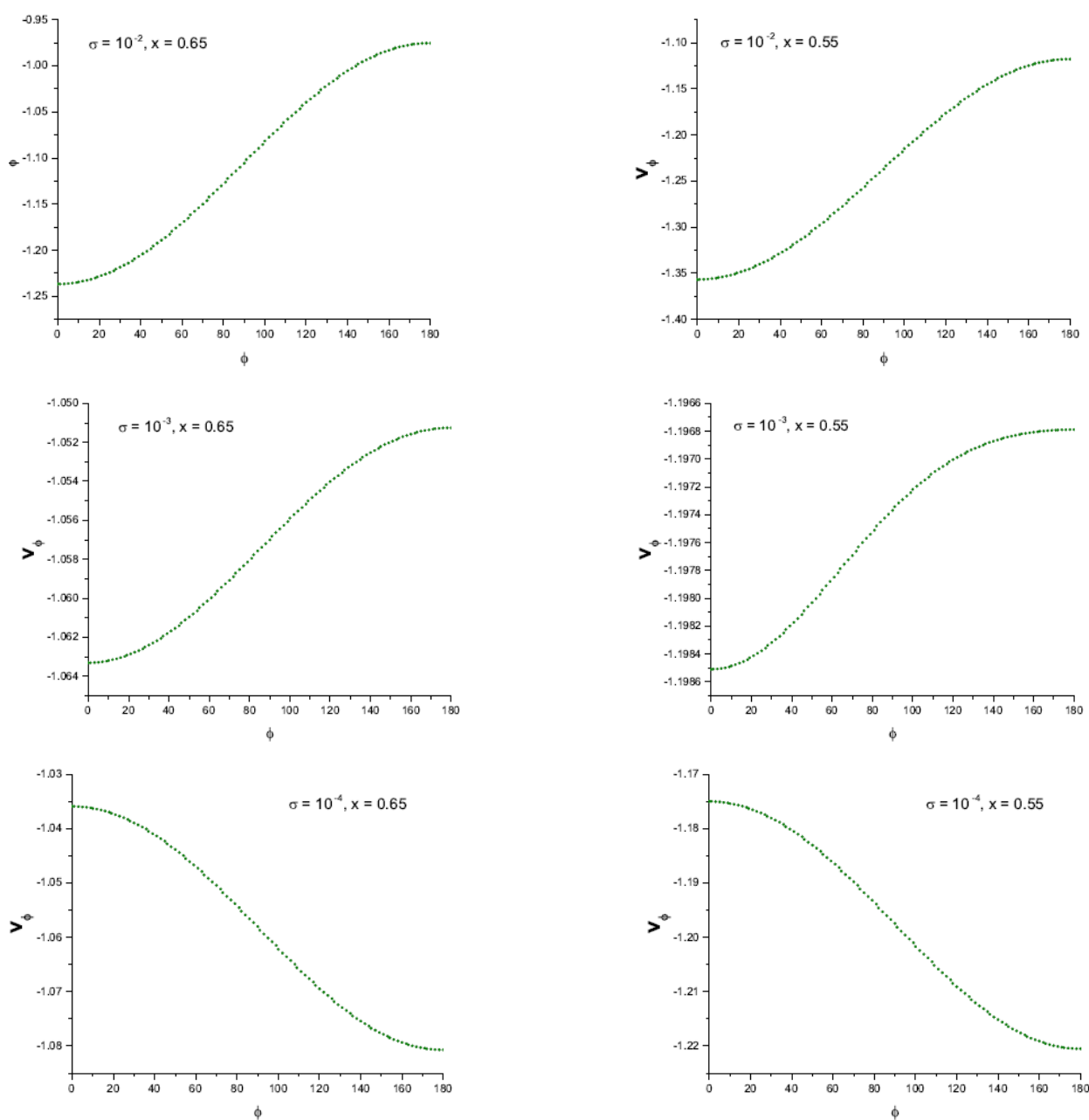


شکل ۴. نمودار تغییرات سرعت سمتی نسبت به زاویه سمتی.

سمتی حساس هستند. بیشترین مقدار برای V_r در $\varphi = 18^\circ$ و کمترین مقدار در $\varphi = 0^\circ$ است. اما موضوع برای V_ϕ اندکی متفاوت است.

برای حالت‌های 10^{-3} ، 10^{-2} ، $\sigma = 10^{-2}$ ، بیشینه مقدار V_ϕ در زاویه

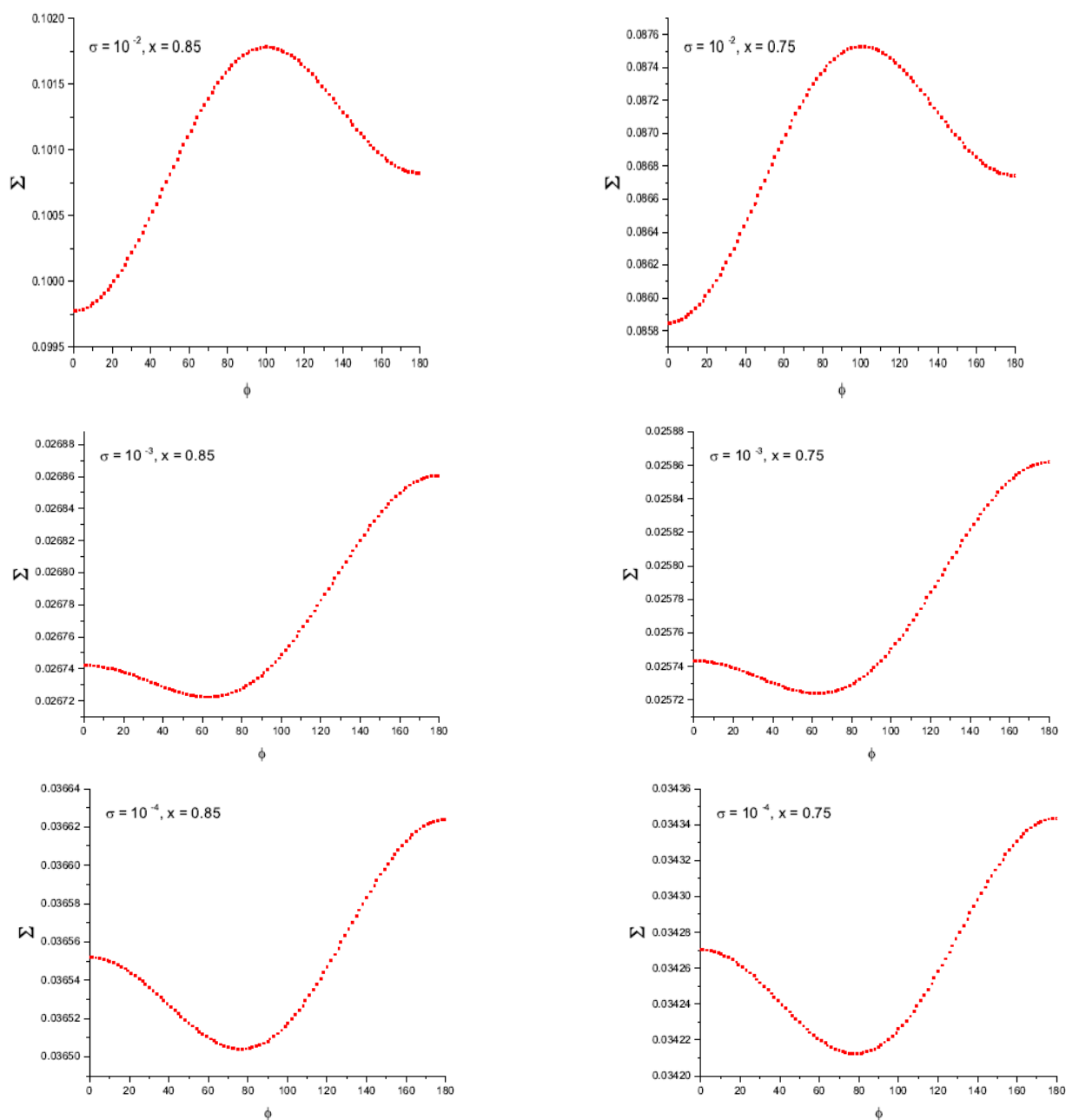
دقت کنیم، برای تولید خرده سیارات، بهترین حالت ممکن، حالت اول ($\alpha = 10^{-2}$) است. به طور خلاصه، جسم سنگین‌تر در تولید خرده سیارات می‌تواند مفیدتر از جسمی باشد که جرم زیادی ندارد. ۳. سرعت شعاعی و سرعت سمتی به تغییر زاویه



شکل ۵. نمودار تغییرات سرعت سمتی نسبت به زاویه سمتی.

مدل با شبیه‌سازی ذرات روان هیدرو دینامیک تکرار شود. میدان مغناطیسی جسم دوم می‌تواند عکس‌العمل شدیدی با میدان مغناطیسی قرص داشته باشد؛ مخصوصاً زمانی که جسم دوم میدان مغناطیسی قوی‌تری داشته باشد. همچنین، در آخر بررسی میدان مغناطیسی قرص و برهم کنش جسم دوم با

۱۸۰ رخ می‌دهد و کمینه مقدار آن در زاویه صفر اتفاق می‌افتد. در هر حال نتیجه برای $\sigma = 10^{-4}$ بر عکس است. فارغ از مقدار x ، این موضوع در مطالعه طیف تابشی از قرص‌های پیش سیاره‌ای مهم است. همچنین برای توسعه این مدل، بررسی کردن برخی موارد زیر می‌تواند مفید باشد. صرف نظر از شکل این ساختار، این



شکل ۶. نمودار تغییرات چگالی سطحی نسبت به زاویه سمتی.

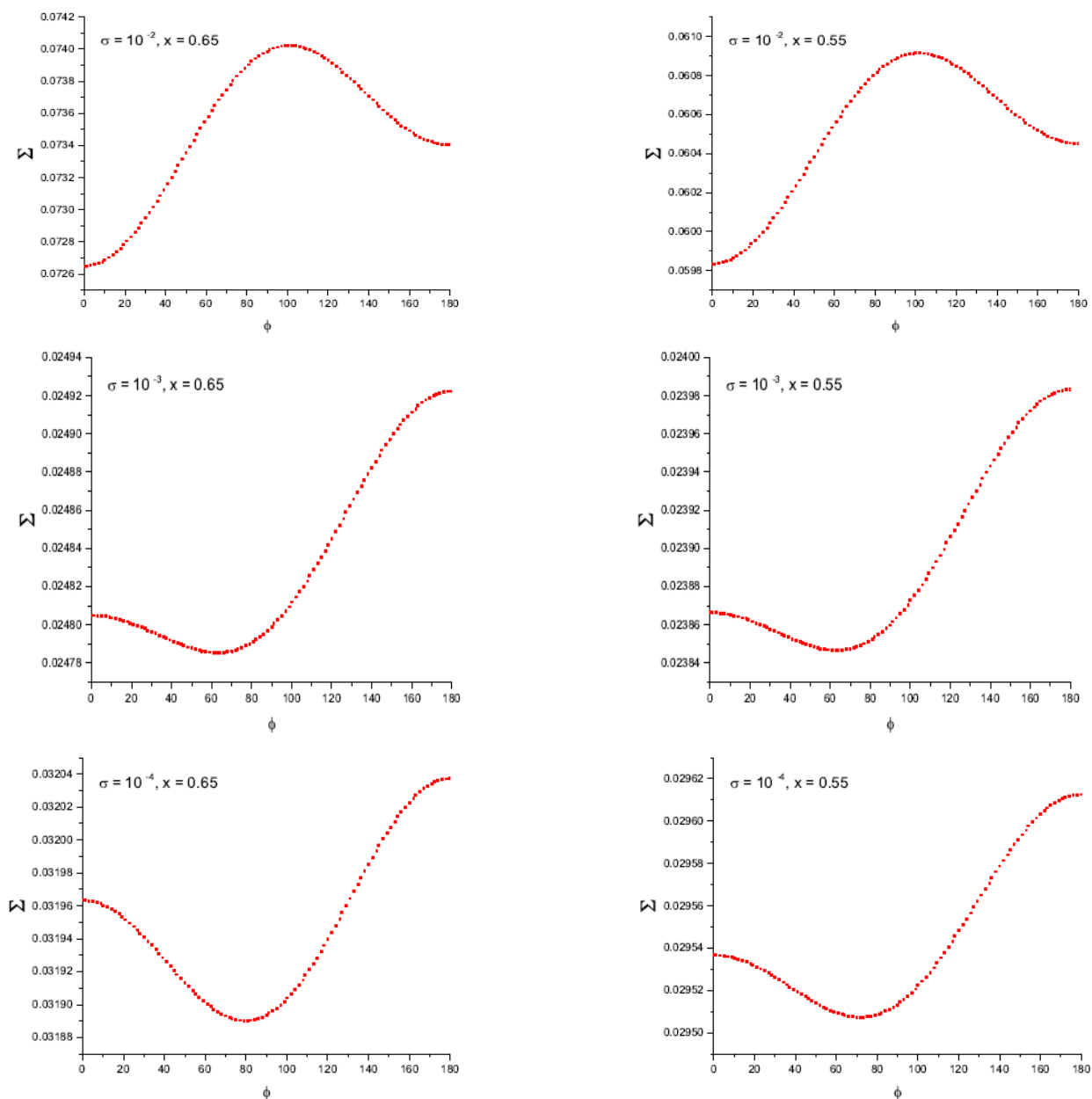
پروژه‌های اخت‌فیزیکی این امر امکان پذیرتر شده است. شاید بهترین مثال در این مورد، تی دبلیو مار باریک^۱ است که یک ستاره در صورت فلکی مار باریک است. این ستاره که جرمش در حدود ۸۰ درصد جرم خورشید است در فاصله ۱۷۶ سال نوری از زمین قرار دارد که می‌توان آن را، یک ستاره دارای قرص پیش سیاره‌ای تقریباً نزدیک به زمین محسوب کرد.

میدان مغناطیسی قرص، در مواردی که میدان قوی است می‌تواند بسیار مفید باشد.

۵.۲. کاربردهای اخت‌فیزیکی

اگرچه مشاهده سیارات در قرص‌های برافزایشی به طور مستقیم تقریباً غیر ممکن است، اما به لطف پیشرفت‌های اخیر در

۱. TW Hydrae



شکل ۷. نمودار تغییرات چگالی سطحی نسبت به زاویه سمتی.

همچنین در همین سال، در این قرص پیش سیاره‌ای، متانول^۲، که یکی اجزای سازنده حیات است، پیدا شد [۲۴]. همچنین در سال ۲۰۱۸، ترکیبات آلی را در این قرص پیش سیاره‌ای گزارش کردند. این موضوعات سبب افزایش توجهات بر این قرص پیش سیاره‌ای شده است [۲۵]. در سال ۲۰۲۰، جمعی از اخترفیزیکدانان با استفاده از

اخیراً مشاهدات رصدی از پروژه آلمان، مشخص کردند که این قرص پیش سیاره‌ای احتمالاً محل زایش سیارات غول پیکر متعدد است. در سال ۲۰۱۶، آلمان شواهدی یافت که در فاصله ۲۲ واحد نجومی، یک سیاره شبیه نپتون در حال شکل‌گیری است.

۲. Methanol

۱. Atacama Large Millimeter Array

در n درجه است. با بسط دادن تا t^5 به دست می‌دهد:

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \\ P_5(z) &= \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z), \end{aligned} \quad (2-پ)$$

در نتیجه انتگرال زیر خیلی ساده است:

$$\int_{-1}^1 P_n(z) P_m(z) dz = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}, \quad (3-پ)$$

δ_{mn} همان دلتای کرونیگر است که وقتی $m = n$ برابر با ۱ می‌شود و در صورت دیگر برابر با صفر است. در این قسمت مختصر کردن مجموع جملاتی مانند زیر که در روابط قبل تکرار می‌شوند، می‌تواند مفید باشد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d}{dx} \int_0^\pi \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Sigma_n P_n(\cos\phi)) \right) d\cos\phi = \\ &= \int_0^\pi \frac{(d\Sigma_0/dx)P_0(\cos\phi) + (d\Sigma_1/dx)P_1(\cos\phi) + \dots}{\Sigma_0 P_0(\cos\phi) + \Sigma_1 P_1(\cos\phi) + \dots} d\cos\phi, \end{aligned} \quad (4-پ)$$

اگر ما مقسوم و مقسوم علیه کسر بالا را بر $\Sigma_0 P_0(\cos\phi)$ تقسیم کنیم، شکل جدیدی از مقسوم و مقسوم علیه مانند زیر به دست می‌آید، یعنی مقسوم:

$$\equiv \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_1}{dx} \frac{P_1(\cos\phi)}{P_0(\cos\phi)} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_2}{dx} \frac{P_2(\cos\phi)}{P_0(\cos\phi)} + \dots \quad (5-پ)$$

و مقسوم علیه:

$$\equiv 1 + \frac{\Sigma_1 P_1(\cos\phi)}{\Sigma_0 P_0(\cos\phi)} + \frac{\Sigma_2 P_2(\cos\phi)}{\Sigma_0 P_0(\cos\phi)} + \dots, \quad (6-پ)$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} &\equiv \left(\frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_1}{dx} \frac{P_1(\cos\phi)}{P_0(\cos\phi)} + \dots \right) \\ &\left(1 + \frac{\Sigma_1 P_1(\cos\phi)}{\Sigma_0 P_0(\cos\phi)} + \dots \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (7-پ)$$

با گسترش دادن پرانتز دوم، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

طیف‌های دریافتی از آلما، چگالی سطحی بر حسب شعاع این قرص را مورد مطالعه قرار دادند. آنها در فواصل دور از جسم مرکزی، یعنی در شعاع ۵۲ واحد نجومی، یک توزیع شبه صخره‌ای در توزیع چگالی سطحی مشاهده کردند. البته وقتی فاصله تغییر می‌کند این توزیع ناپدید می‌شود. در واقع این توزیع توسط نتایج این تحقیق قابل توجیه است [۲۶].

برای مثال دیگر، می‌توان به ستاره جوان پی دی اس ۲۷۰ اشاره کرد. این ستاره جوان یک قرص پیش سیاره‌ای و در فاصله ۳۷۰ سال نوری در صورت فلکی قنطورس^۳ واقع شده است. در قرص پیش سیاره‌ای گپ (شکاف)های غولی^۴ مشاهده می‌شوند که متقارن نیستند [۲۷]. این عدم تقارن با توجه به نتایج این مقاله به خوبی قابل توجیه است؛ در صورتی که مدل‌های دیگر توضیح قابل قبولی ارائه نمی‌دهند.

به عنوان کاربرد آخر، می‌توان به قرص‌های پیش سیاره‌ای در منظومه‌های دوتایی اشاره کرد. اگرچه این تحقیق خود را محدود به قرص‌های پیش سیاره‌ای در سامانه ستاره-سیاره‌ای کرد. اما نتایج حاصله با اندکی تغییر قابل تعمیم به این منظومه‌ها نیز هستند که بحث این تحقیق نیست. اما مثال‌هایی از این دست را می‌توان در مقاله دامجن و همکاران به تفصیل مورد تحقیق و بررسی قرار داد [۲۸].

پیوست

پیوست ۱. تحلیل ریاضی

در این قسمت ما برخی از خواص مهم چند جمله‌ای لژاندر را بررسی می‌کنیم، که در برخی روابط اهمیت دارند [۲۹]. برای شروع، بیان تابع مولد از آنها را مفید می‌دانیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n, \quad (1-پ)$$

z, t متغیرهای اختیاری هستند. ضریب t^n چند جمله‌ای z

۱. PDS 70

۲. PDS 70

۳. Centaurus

۴. Giant Gap

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0 \quad \text{for } (n \geq 1), \quad (پ-۱۰)$$

$$\text{and } \int_{-1}^1 P_n^{\vee}(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

از این روابط انتگرال‌گیری از رابطه (۸) ما را به نتیجه زیر می‌رساند:

$$\Xi_x = \frac{2}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \frac{\Sigma_n}{\Sigma_0^2} \frac{d\Sigma_n}{dx}, \quad (پ-۱۱)$$

روش مشابه این کار، برای انتگرال زیر می‌تواند باشد:

$$\Xi_x = \int_0^{\pi} \frac{d}{d\phi} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\Sigma_n P_n(\cos\phi)) \right) d\cos\phi, \quad (پ-۱۲)$$

$$\equiv \left(\frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_1}{dx} \frac{P_1(\cos\phi)}{P_0(\cos\phi)} + \dots \right) \left(1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} \frac{P_1(\cos\phi)}{P_0(\cos\phi)} - \dots \right), \quad (پ-۸)$$

ساده شده رابطه بالا عبارت است از:

$$\frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_0}{dx} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma_1}{dx} \frac{P_1(\cos\phi)}{P_0(\cos\phi)} - \frac{1}{\Sigma_0 P_0(\cos\phi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\Sigma_n}{dx} P_n(\cos\phi) - \frac{1}{\Sigma_0^2 P_0^{\vee}(\cos\phi)} \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_n \frac{d\Sigma_n}{dx} P_n^{\vee}(\cos\phi), \quad (پ-۹)$$

از طرف دیگر داریم:

مراجع

1. N I Shakura and R A Sunyaev, *Astron. Astrophys.* **24** (1973) 337355.
2. J E Pringle, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **19** (1981) 137.
3. S Ichimaru, *Astrophys. J.* **214** (1977) 840.
4. R Narayan and I Yi, *arXiv preprint astro-ph/9403052* (1994).
5. M A Abramowicz, *et al.*, *arXiv preprint astro-ph/9409018* (1995).
6. M A Abramowicz, *et al.*, *Astrophys. J.* **332** (1988) 646.
7. M J Rees, *et al.*, *Nature* **295** (1982) 17.
8. J M Bardeen and J A Petterson, *Astrophys. J.* **195** (1975) L65.
9. G I Ogilvie, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **304**, 3 (1999) 557.
10. G I Ogilvie, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **52** (2014) 171.
12. M A Abramowicz, *et al.*, *Astrophys. J.* **438** (1995) L37.
13. M A Abramowicz, *et al.*, *Astrophys. J.* **332** (1988) 646.
14. M J Rees, *et al.*, *Nature* **295** (1982) 17.
15. R Narayan and I Yi, *Astrophys. J.* **452** (1995) 710.
16. C L Jiao and X B Wu, *Astrophys. J.* **733**, 2 (2011) 112.
17. Sh Abbassi, E Nourbakhsh, and M Shadmehri, *Astrophys. J.* **765**, 2 (2013) 96.
18. A Khesali and M Motamedi Koochaksarayi, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **433**, 4 (2013) 2850.
19. A Mosallanezhad, S Abbassi, and N Beiranvand, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **437**, 4 (2014) 3112.
20. M Shadmehri, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **442**, 4 (2014) 3528.
21. M Gholipour, *New Astron.* **57** (2017) 43.
22. M Gholipour, *New Astron.* **67** (2019) 103.
23. W H Press, *et al.*, "Numerical recipes: example book C" Cambridge University Press (1992).
24. S Daemgen, S Correia, and M G Petr Gotzens, *Astron. Astrophys.* **540** (2012) A46.
25. J Hashimoto, *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **758**, 1 (2012) L19.
26. G B Arfken and H J Weber, "Mathematical Methods for Physicists" Elsevier (2011).
27. J Catherine, *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **823** (2016) 10.
28. C Favre, *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **862**, 1 (2018) L2.
29. S Nayakshin, *et al.*, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **495**, 1 (2020) 285.