مجلۀ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۳، شمارۀ ۲، تابستان ۱۴۰۲
DOI: 10.47176/ijpr.23.2.91320

مطالعۀ تأثیر توزیع گوسی طول همدوسی چشمۀ نور در پراش از تک شکاف و دریچۀ دایره‌ای به روش مونت کارلو

احسان کوشکی و سید علی اصغر علوی

گروه فیزیک دانشگاه حکیم سبزواری، صندوق پستی ۹۶۱۷۹۷۶۴۸۷ ، سبزوار

پست الکترونیکی: s.alavi@hsu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۳۰/ ۰۶/ ۱۴۰۰ ؛ دریافت نسخۀ نهایی: ۲۲/۱۱/ ۱۴۰۰)

چکیده:
پراش فرانهوفر از تک شکاف و همچنین دریچۀ دایره‌ای را در شرایطی بررسی می‌کنیم که چشمۀ نور تک فام ولی به طور جزئی همدوس باشد. در این مقاله سعی داریم مسئله را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم و طول همدوسی را ثابت نگرفته و برای آن یک تابع توزیع به صورت گوسی در نظر بگیریم. مطالعۀ عددی تأثیر پارامترهای همدوسی با توزیع گوسی بر الگوی پراش میدان دور انجام می‌شود. در مورد تک شکاف ، با کاهش طول همدوسی، هیچ انحراف قابل توجهی در قلۀ مرکزی آن به وجود نمی‌آید، اما در مرتبه‌های بالاتر پراش، کاهش آشکار می‌شود که البته به شکل توزیع گوسی طول همدوسی بستگی دارد. برای دریچه‌های دایره‌ای، پارامترهای تابع توزیع طول همدوسی بر شکل توزیع شدت نور تأثیر می‌گذارد و الگوی پراش مرتبۀ اول کاهش می‌یابد و با کاهش نسبی طول همدوسی، اولین مرتبۀ الگوی پراش حلقوی به تدریج از بین می‌رود.

واژه‌های کلیدی: روش مونت کارلو، پراش فرانهوفر، همدوسی پاره‌ای زمانی، تک شکاف، شکاف دایره‌ای، توزیع گوسی.

۱. مقدمه

همدوسی در ابتدا در ارتباط با آزمایش دو شکافی یانگ در نورشناسی مطرح شد اما امروزه در حوزه‌های مختلفی از علم صوت، مهندسی برق، علوم اعصاب و مکانیک کوانتومی گرفته تا هولوگرافی، آرایه های آنتنی، توموگرافی اپتیکی، تارهای نوری و تداخل سنج‌های نوری و رادیویی در نجوم کاربرد دارد. بنابراین مطالعۀ همدوسی از اهمیت زیادی هم از جنبۀ نظری و هم عملی برخوردار است. پراش نور همدوس، ناهمدوس و همدوس پاره‌ای از چشمه‌ای با گسترۀ محدود در مرجع [۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۲] مطالعۀ نظری و تجربی توزیع شدت پراش فرانهوفر تک شکاف و شکاف دایره‌ای تابش شده با نور همدوس پاره‌ای، انجام شده است. در مقالۀ [۳] تداخل چند باریکه ای با نور همدوس پاره‌ای مورد سنجش و ارزیابی قرار گرفته است. تحلیل نظری پراش فرنل همدوس پاره‌ای از تک شکاف در [۴] بررسی شده است. فناوری جدید در مهندسی همدوسی برای کنترل خواص همدوسی پاره‌ای فضایی و زمانی با استفاده از تصویرگر DLP در [۵] بررسی شده است. تپ‌های همدوس پاره‌ای زمانی در محیط‌های پاشنده در مرجع [۶] مورد مطالعه قرار گرفته است که نتایج آن در پالس‌های فوق کوتاه کاربرد دارد. در [۷] خواص همدوسی فضایی و زمانی پالس‌های لیزر الکترون آزاد در رژیم به شدت فرابنفش مورد بحث و مطالعه قرار گرفته است. در دو کار گذشته خودمان [۸ و ۹] به بررسی پراش باریکه‌های همدوس پاره‌ای زمانی از تک شکاف، شکاف دایره‌ای و چند شکافی پرداخته‌ایم. در این کارها، طول همدوسی پرتوها یکسان و برابر در نظر

گرفته شده است اما در این مقاله، تعمیمی از کارهای انجام شده در [۲] را ارائه می‌کنیم که در آن طول همدوسی را ثابت در نظر نگرفته بلکه برای آن یک تابع توزیع به صورت گوسی در نظر می گیریم. یکی از دلایل توزیع گوسی زمان همدوسی (و متناظراً طول همدوسی) در گازها، برخوردهای حرارتی است. در چشمه‌های حرارتی هر اتم یا مولکول ساطع کنندهٔ انرژی، در طول مسیر حرکت خود برخوردهایی با دیگر اتم‌ها انجام می‌دهد که باعث پرش‌های فازی کاتوره-ای می‌شود. زمان بین دو برخورد متوالی را می‌توان به صورت آماری با تابع گوسی معرفی کرد. بین دو برخورد متوالی، پرتو خروجی از چشمه را می‌توان همدوس در نظر گرفت و از این‌رو قطارهای موج خروجی نیز توزیع زمان همدوسی گوسی دارند. در این مقاله، قصد داریم تأثیر توزیع گوسی طول همدوسی را بر نقش پراش حاصل از تک شکاف و دریچهٔ دایروی بررسی کنیم. خواهیم دید پارامترهای توزیع گوسی می‌توانند در کاهش اثرات مخرب طول همدوسی کوتاه جبران کننده باشند.

۲. تئوری

فرض کنید نوری تکفام با بسامد ω و با زمان همدوسی τ_0 به N شکاف کاملاً یکسان بتابد. در مقالهٔ قبلی [۸] نشان دادیم که N عدد چشمه نور با شدت یکسان I خواهیم داشت و شدت نوری که به نقطهٔ دلخواه P خواهد تابیده برابر است با:

$$I_P = NI + 2I\sum_{j=1}^{N-1} (N-j)\left(1-\frac{j|\tau|}{\tau_0}\right)\cos(j\omega\tau), \quad (1)$$

که در آن τ زمان تأخیر نسبی رسیدن نور از دو چشمهٔ متوالی نسبت به هم، به نقطهٔ P است و به‌دلیل اختلاف فاصلهٔ شکاف‌ها تا این نقطه به وجود می‌آید. اگر $\tau_0 \to \infty$ باشد همدوسی کامل زمانی خواهیم داشت.

این رابطه را می‌توان به یک تک شکاف به عنوان مجموعه‌ای پیوسته از چشمه‌های نقطه‌ای تعمیم داد که جزییات محاسبات آن در پیوست مقاله آمده است و خواهیم داشت:

$$I_P(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2}\Big[\frac{b^2}{3}\left(\frac{E_L}{r}\right)^2 + 2b\left(\frac{E_L}{r}\right)^2 \int_{y=0}^{y=b} \left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y|\sin\theta|}{b}\eta\right)\cos(ky\sin\theta)dy\Big], \quad (2)$$

حاصل انتگرال نیز در پیوست آورده شده است.

در مورد دریچهٔ دایره‌ای پراش، که اهمیت زیادی در اپتیک و ادوات وابسته به آن دارد، دریچه‌ای با شعاع r_a را در نظر می‌گیریم که در نزدیکی کانون یک پرتو لیزر گوسی و در فاصلهٔ z از کانون واقع شده است. میدان الکتریکی این پرتو در محل دریچه چنین خواهد بود [۱۰ و ۱۱]:

$$E(z,r) = E_0\frac{w_0}{w(z)}\exp\{-i(kz-\arctan(z/z_0))\}. \exp\{-r^2(\frac{1}{w^2(z)}+\frac{ik}{2R(z)})\}, \quad (3)$$

که در آن r و w_0 به ترتیب مختصات شعاعی و شعاع کمر پرتو هستند. نیز $w(z)=w_0\sqrt{1+(z/z_0)^2}$، $z_0=\frac{kw_0^2}{2}$ و $R(z)=z(1+\frac{z_0^2}{z^2})$ شعاع پرتو، طول رایلی و شعاع جبههٔ موج در نقطهٔ z است. نقش پراش در فاصلهٔ d با در نظر گرفتن طول همدوسی به صورت زیر است [۸]:

$$E(\rho) = \frac{1}{i\lambda d}\int_{r=0}^{r=r_a} J_0(k\theta r)E(r,z)\left(1-\frac{r|\sin\theta|}{r_a}\eta\right)2\pi r dr, \quad (4)$$

که در اینجا $\eta = r_a/l_0$ پارامتر ناهمدوسی دریچه نام دارد. نیز $J_0(x)$ و $\rho \approx d\theta$ به ترتیب تابع بسل مرتبهٔ صفرم نوع اول و مختصات شعاعی در میدان دور هستند.

۳. بحث و نتایج

در شکل ۱، نقش پراش نور همدوس پاره‌ای زمانی با طول موج $\lambda = 632.8nm$ از تک شکاف با پهنای $b = 10\mu m$ در ناحیهٔ دور $(d = 200cm)$ را مشاهده می‌کنیم. در این شکل، طول قطارهای موج پیوسته (یا طول همدوسی) ثابت و یکنواخت است. با کاهش طول همدوسی و افزایش پارامتر ناهمدوسی $\eta = b/L_0$ از مقدار واحد، الگوی نقش پراش تغییر یافته، گو این که قله‌های مرتبهٔ اول پراش در حال از بین

رفتن هستند. به ازای $\eta \geq ۱$ تغییرات در شکل توزیع شدت آغاز شده و ادامه می‌یابد تا نقش پراش‌های مرتبهٔ اول کاملاً ناپدید شوند (شکل ۱.c). جزئیات این پدیده به طور کامل در مقاله قبلی‌مان شرح داده شده است [۸].

تا اینجا پرتو را دارای همدوسی پاره‌ای زمانی با زمان همدوسی $\tau_۰$ و طول همدوسی یکنواخت $L_۰$ در نظر گرفتیم. اکنون می‌خواهیم حالتی را در نظر بگیریم که طول قطارهای موج ثابت نیست بلکه توزیع گوسی دارد.

همان طور که در مقدمه اشاره شد زمان بین دو برخورد متوالی اتم‌ها را می‌توان به صورت آماری با تابع گوسی نمایش داد. برای ایجاد این تابع گوسی از روش تولید اعداد تصادفی با توزیع گوسی به روش مونت کارلو بهره می‌گیریم. در اکثر زبان‌های برنامه نویسی از جمله فرترن ۹۰، کامپایلر اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین صفر تا یک تولید می‌کند. به روش‌هایی می‌توان آن را به توزیع های مورد نظر تبدیل کرد. یکی از این روش‌ها که به روش‌های مونت کارلو معروف است استفاده از توابع تبدیل است که بر اساس پایسته ماندن مجموع احتمال‌ها برابر با واحد کار می‌کند [۱۲ و ۱۳]. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ها دو توزیع یکنواخت از اعداد بین ۰ تا ۱ تولید شده توسط برنامه باشند، y با تابع زیر توزیع گوسی خواهد داشت:

$$y = \sqrt{-۲Lnx_۱} + \cos(۲\pi x_۲)\ , \qquad (۵)$$

در شکل ۲. الف نقاطی با مختصات (x, y) در صفحه ایجاد شده‌اند که x آنها توزیع یکنواخت از ۰ تا ۱ و y آنها توزیع گوسی به روش فوق دارد. شکل و به ویژه توزیع نمایی در راستای y بیانگر کارایی روش است و تولید اعداد تصادفی با توزیع گوسی بین ۵- تا ۵ را تأیید می‌کند. در شکل ۲. ب تعداد n عدد تصادفی با توزیع گوسی ایجاد شده و فراوانی اعداد ایجاد شده رسم شده‌اند که به وضوح گوسی با پهنای نیم بیشینه $w_۰ = ۲{,}۳$ است. به ازای هر مقدار n، کمیت $w_۰$ تغییر نمی‌کند.

اما چگونه این توزیع را به توزیع طول همدوسی ارتباط دهیم؟ برای این تبدیل فرض کنید مد و میانگین توزیع به جای صفر، $L_۰$ و پهنای توزیع به جای $w_۰$، w باشد. می‌توان L های تصادفی با توزیع گوسی را از y های پیشتر ذکر شده به‌دست آورد:

$$L = L_۰ + \delta y, \qquad (۶)$$

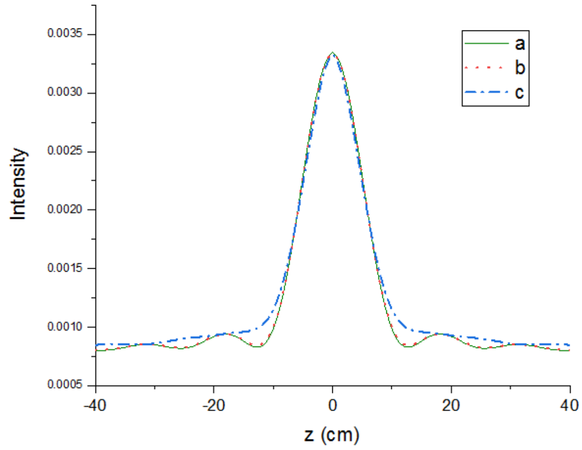
اگر y ها را دارای بعد طول بگیریم، δ کمیتی بدون بعد خواهد بود. با توجه به این که پهنای نیم بیشینه yها برابر $w_۰ = ۲{,}۳$ است، پهنای این توزیع چنین خواهد بود:

$$w = \delta w_۰ = ۲{,}۳\delta, \qquad (۷)$$

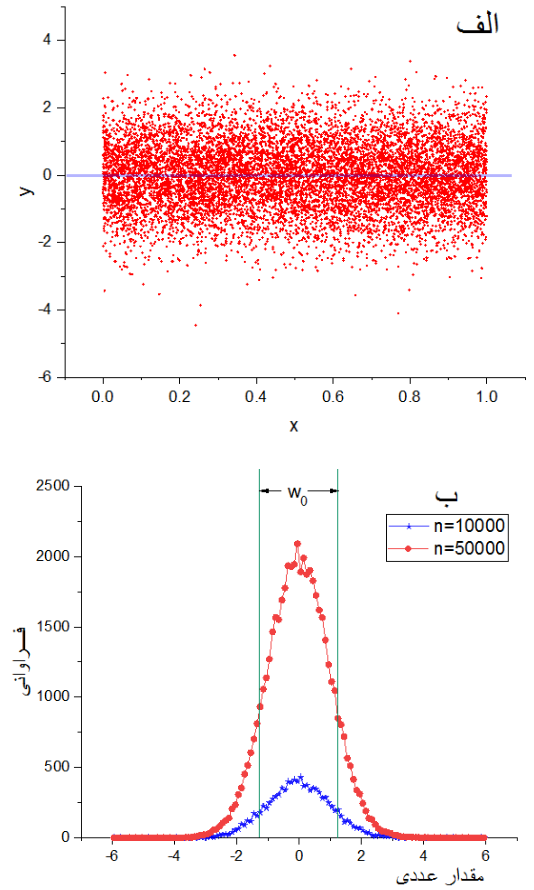
در شکل۳ توزیعی گوسی از y ها را به توزیع‌هایی از L ها با $L_۰$ و w متفاوت تبدیل کرده‌ایم. اینگونه می‌توان هر توزیع طبیعی از طول‌های همدوسی خلق کرد.

در گام بعد قصد داریم پراش حاصل از پرتوهای دارای همدوسی پاره‌ای با طول همدوسی توزیع یافته گوسی را به‌دست آوریم. برای این کار، L های استخراج شده از معادلهٔ (۶) را در رابطهٔ (۲) و شدت تابش حاصل از رابطهٔ (۴) قرار می‌دهیم و توزیع پراش فرانهوفر حاصل از آن را برای کسر کوچکی از ثانیه به‌دست می‌آوریم. این کار را چند صد تا چند هزار بار انجام داده و Lهای با توزیع گوسی هر یک در کسری از زمان، در نقش پراش مشارکت می‌کنند. نقش پراشی که به عنوان ناظر خواهیم دید، میانگین تصویرهای حاصل است که البته تصویری کاملاً پایدار و ماناست. بدینگونه نقش پراشی به‌دست می‌آید که اثر توزیع گوسی طول همدوسی تابش در آن هویدا و قابل بررسی است.

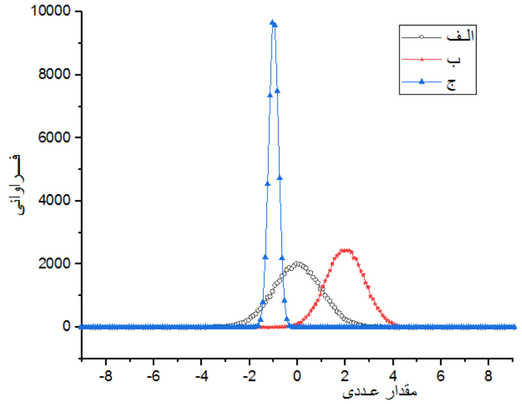
در شکل ۴ پراش حاصل از تک شکافی با پهنای $b = ۳۰\mu m$ را برای نوری با طول موج $\lambda = ۶۳۲{,}۸\ nm$ (لیزر هلیوم نئون) در حالت‌های با $L_۰$ و η متفاوت می‌بینیم. شکل ب بزرگنمایی شکل الف حول پراش مرتبهٔ اول است. چنانکه مشاهده می‌کنیم، هر چه طول همدوسی کوتاه‌تر و ضریب ناهمدوسی بیشتر باشد، نقش مرتبهٔ اول پراش محوتر می‌شود. بر عکس با افزایش طول همدوسی، قلهٔ پراش مرتبهٔ اول واضح‌تر خواهد بود (مورد d همدوسی (تقریباً) کامل است). تا اینجا نتایج حاصل از مقالهٔ قبلی ما است [۸] و توزیعی برای طول همدوسی در نظر گرفته نشده است و آن را یکنواخت در نظر گرفته‌ایم $(\delta = ۰)$.



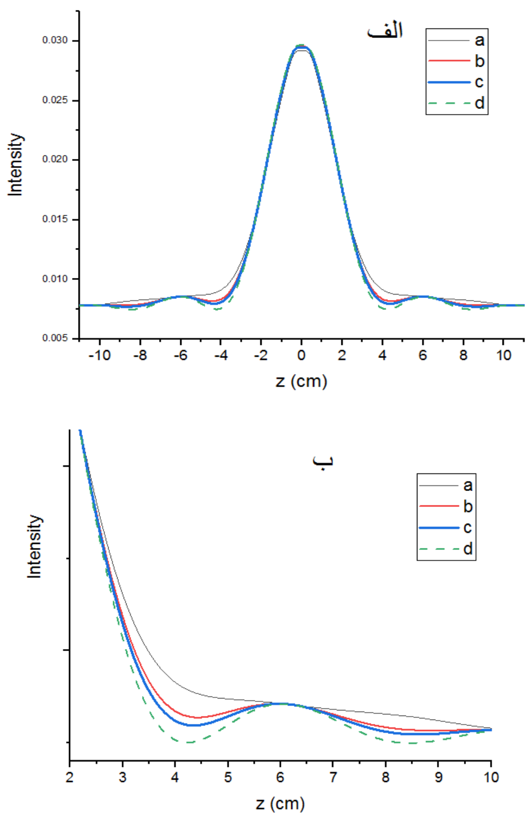
شکل ۱. توزیع شدت حاصل از تک شکاف با پهنای $b=10\mu m$ در فاصلهٔ ۲۰۰ سانتی‌متری روی پردهٔ (z). (**a** $L_\circ=10000\mu m$ و $\eta=0.001$، (**b** $L_\circ=10\mu m$ و $\eta=1$ و (**c** $L_\circ=1\mu m$ و $\eta=10$.



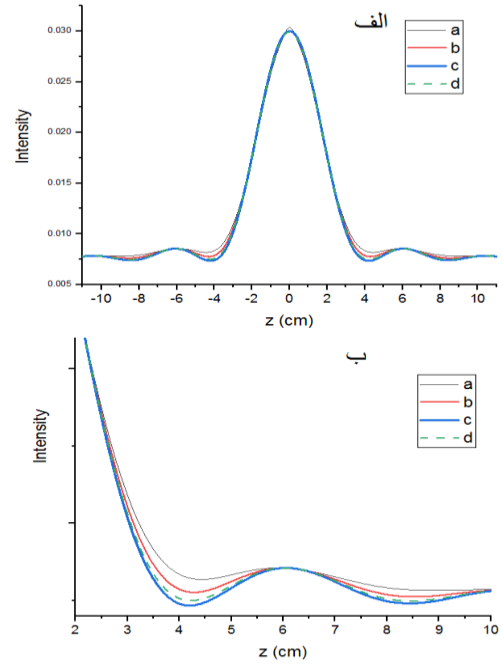
شکل ۲. (الف) توزیعی از نقاط تصادفی در صفحه که **x** آنها به طور یکنواخت و **y** آنها به طور گوسی توزیع یافته‌اند. (ب) فراوانی اعداد تصادفی تولید شده با توزیع گوسی بر حسب مقدار عدد تولید شده به ازای تعداد تولیدهای مختلف **n**. پهنای $w_\circ$ نیم بیشینه برای هر تعداد تولید یکسان است.



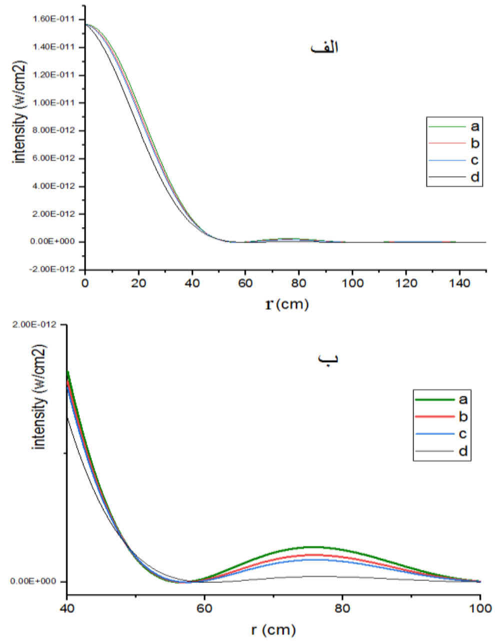
شکل۳. فراوانی ۵۰۰۰۰ عدد تصادفی تولید شده با توزیع گوسی تبدیل یافته با معادلهٔ (۶) الف- توزیع اصلی (**y**ها با $w_\circ=2.3$)، ب- **L** ها با $L_\circ=2$ و $\delta=0.8$ $(w=1.86)$، ج- **L** ها با $L_\circ=-1$ و $\delta=0.2$ $(w=0.46)$.



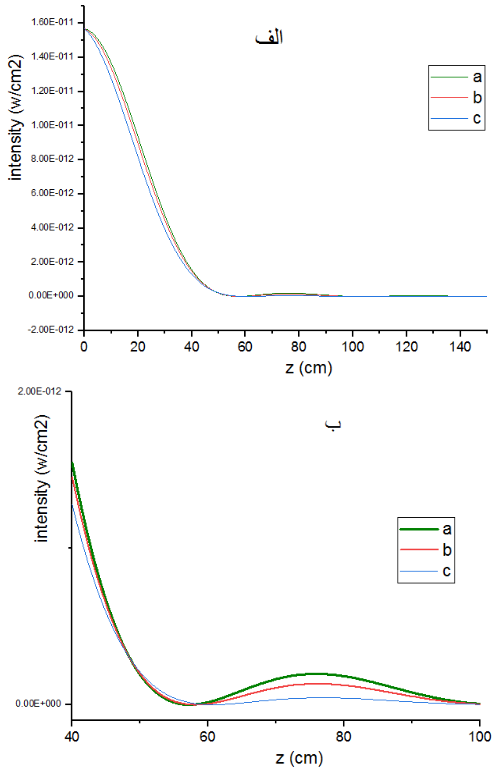
شکل ۴. توزیع شدت پراش یافته برای $b=30\mu m$ (الف) نمای کلی پراش و (ب) بزرگنمایی روی مرتبهٔ اول پراش است و (**a** $\eta=30$ $(L_\circ=1\mu m)$، (**b** $\eta=15$ $(L_\circ=2\mu m)$، (**c** $\eta=10$ $(L_\circ=3\mu m)$ و (**d** همدوسی کامل $\eta=0.003$ $(L_\circ=1cm)$.



شکل ۵. (الف) توزیع شدت پراش یافته و (ب) بزرگنمایی روی قلهٔ مرتبهٔ اول پراش‌ها و مقایسهٔ آنها با یکدیگر به ازای پهناهای توزیع طول همدوسی مختلف برای مورد $b=30\mu m$، $L_\circ=2\mu m$ و $(\eta=15)$ (**a** $w=0$ که همان شکل‌های **b.۴** است. (**b** $w=2/3\mu m$، (**c** $w=3/2\mu m$ و (**d** $w=0$ ولی $(L_\circ=1\,cm)$ این حالت همانند حالت شکل **d.۴** است و بیانگر همدوسی کامل (تقریباً کامل) است.



شکل ۶. (الف) شکل توزیع شدت پراش از دریچهٔ دایره‌ای و (ب) بزرگنمایی روی حلقهٔ اول پراش به ازای مقادیر مختلف طول همدوسی: **a**- $\eta=0/0002$ $(L_\circ=1\,cm)$ **b**- $\eta=0/4$ $(L_\circ=5\,\mu m)$ **c**- $\eta=0/66$، $(L_\circ=3\mu m)$ و **d**- $\eta=2$ $(L_\circ=1\mu m)$



شکل ۷. **(الف)** شکل توزیع شدت پراش از دریچهٔ دایره‌ای با شعاع $r_a=2\,\mu m$ و (ب) بزرگنمایی روی حلقهٔ اول پراش برای طول همدوسی $L_\circ=1\mu m$ و پهنای نیم بیشینه توزیع گوسی (**a** $w=3/2\mu m$ (**b** $w=2/3\mu m$ و (**c** $w=0$ که همان شکل **d.۶** است.

در شکل۵. الف همان پیکربندی شکل قبلی $(b=30\mu m)$ را برای نوری با طول موج $\lambda=632/8nm$ (لیزر هلیوم نئون) و با طول همدوسی میانگین $L_\circ=2\mu m$ $(\eta=15)$ در نظر گرفته‌ایم، ولی در حالتی که طول همدوسی توزیع گوسی دارد و توزیع پهناهای نیم بیشینه w متفاوتی دارد. قصد داریم تأثیر w بر نقش پراش به ویژه مرتبهٔ اول پراش را بررسی کنیم. همانگونه که در شکل می‌بینیم با تبدیل طول همدوسی از کمیتی یکنواخت به توزیعی گوسی با پهنای w و نیز افزایش آن، وضوح قلهٔ پراش مرتبهٔ اول زیاد می‌شود و منحنی تابع توزیع پراش به سمت منحنی همدوسی کامل پیش می‌رود. هر چند $L_\circ$ کوچک است ولی با افزایش کمیت‌های w و δ، از تخریب مرتبهٔ اول پراش جلوگیری می‌شود. منحنی شکلd.۵ همان منحنی شکلd.۴ است که برای مقایسه و به عنوان معیار تقریبی همدوسی کامل آورده شده است. این نتایج به‌ازای مقادیر مختلف پهنای نیم بیشینه و طول همدوسی باز به‌دست آمده

است. اکنون می‌خواهیم اعتبار نتایج را برای مورد پراش از دریچهٔ دایره‌ای بررسی کنیم. دریچه‌ای دایره‌ای با شعاع $r_a = ۲\mu m$ در فاصلهٔ ۳ متری از پرده‌ای قرار گرفته است و نور لیزر با طول موج ۶۳۲/۸ نانومتر به آن می‌تابد. شعاع کمر پرتو لیزر $w_{\circ} = ۱mm$ است و دریچه در ۱ میلی‌متری نقطهٔ کانونی پرتو لیزر قرار گرفته است. در شکل۶ پراش حاصل از این دریچه را به ازای مقادیر مختلف پارامتر ناهمدوسی دایره‌ای $\eta = r_a / L_{\circ}$ بررسی می‌کنیم. در این شکل $L_{\circ}$ کمیتی ثابت و یکنواخت است و توزیعی ندارد. اثرات مخرب کاهش طول همدوسی بر حلقهٔ اول پراش زمانی که $\eta > ۱$، مشهود است. در شکل ۷ توزیعی گوسی برای $L_{\circ}$ مطابق رابطهٔ (۶) در نظر گرفته شده است. چنانکه دیده می‌شود، با افزایش پهنای توزیع گوسی از اثرات مخرب ناهمدوسی کاسته شده و به سمتی مشابه همدوسی کامل پیش می‌رویم. نتیجه مشابه حالت تک شکافی می شود.

۴. نتیجه‌گیری

این مقاله، تعمیمی از کارهای قبلی ما در زمینهٔ مطالعهٔ اثر همدوسی زمانی پاره‌ای بر نقش پراش تک شکاف و شکاف دایره‌ای است که در آنها طول همدوسی را ثابت در نظر گرفته بودیم. در این مقاله، حالتی را بررسی می‌کنیم که طول همدوسی توزیع گوسی دارد و توزیع پهناهای نیم بیشینه w متفاوتی دارد. تأثیر w بر نقش پراش به ویژه مرتبهٔ اول پراش بررسی شده است. برای تک شکافی نشان داده‌ایم با افزایش پهنای نیم بیشینه، وضوح قلهٔ پراش مرتبهٔ اول زیاد می‌شود و منحنی تابع توزیع پراش به سمت منحنی همدوسی کامل پیش می‌رود. در مورد شکاف دایره‌ای نیز نشان داده‌ایم با افزایش پهنای توزیع گوسی از اثرات مخرب ناهمدوسی کاسته شده و به سمتی مشابه همدوسی کامل پیش می‌رویم که نتیجه‌ای مشابه حالت تک شکافی است.

۵. پیوست

پهنای شکاف را b گرفته و آن را شامل N' چشمهٔ نقطه‌ای و N جزء یکسان می‌گیریم. مطابق شکل A-۱ اگر E_L را مقدار میدان نور به ازای پهنای واحد شکاف در فاصلهٔ واحد از آن بگیریم [۱۴و ۱۵] داریم:

$$E_L = \frac{۱}{b} \lim_{N' \to \infty} (\varepsilon_{\circ} N'), \tag{A-۱}$$

که $\varepsilon_{\circ}$ میدان نور هر یک از چشمه‌های نقطه‌ای است. این تعریف باعث می‌شود واگرایی در شدت چشمه‌های نور نامتناهی به وجود نیاید. میدان الکتریکی j امین جزء با پهنای Δy_j در فاصله r چنین خواهد بود:

$$E_j = \frac{۱}{br} \lim_{N' \to \infty} (\varepsilon_{\circ} N') \Delta y_j , \tag{A-۲}$$

جملهٔ دوم معادلهٔ (۱) را صرفنظر از ضریب $\frac{c\varepsilon_{\circ}}{۲}$ می‌توان چنین نوشت:

$$I = ۲ \lim_{N' \to \infty} \lim_{N \to \infty} \sum_{j=۱}^{N-۱} \left(\frac{۱}{br_j}(\varepsilon_{\circ} N')\Delta y_j\right)^۲ (N-j)(۱-\frac{j|\tau|}{\tau_{\circ}})\cos(j\omega\tau), \tag{A-۳}$$

از ترکیب دو معادلهٔ اخیر داریم:

$$۲ \lim_{N \to \infty} \sum_{j=۱}^{N-۱} \left(\frac{E_L}{r_j}\Delta y_j\right)^۲ (N-j). (۱-\frac{j|\tau|}{\tau_{\circ}})\cos(j\omega\tau), \tag{A-۴}$$

اگر θ زاویهٔ مشاهدهٔ هدف نسبت به جزء مورد نظر باشد داریم:

$$|\tau| = \frac{b|\sin\theta|}{Nc}, \tag{A-۵}$$

و این با توجه به معادلهٔ (A-۴) به این صورت در خواهد آمد:

$$۲ \lim_{N \to \infty} \sum_{j=۱}^{N-۱} \left(\frac{E_L}{r_j}\Delta y_j\right)^۲ N(۱-\frac{y_j}{b}). (۱-\frac{jb|\sin\theta|}{\tau_{\circ} Nc})\cos(\frac{j\omega b\sin\theta}{Nc}), \tag{A-۶}$$

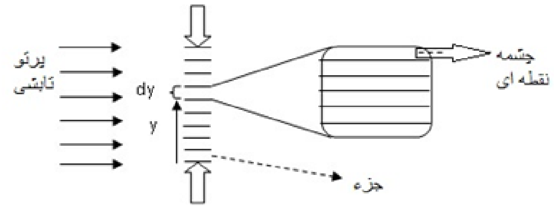
در حد $N \to \infty$ می‌توان نوشت:

$$\frac{jb}{N} \to y_j ,\ \frac{j}{N} \to \frac{y_j}{b} ,\ \frac{b}{N} \to \Delta y_j \tag{A-۷}$$

و در نتیجه:

$$۲ \lim_{N \to \infty} \sum_{j=۱}^{N-۱} \left(\frac{E_L}{r_j}\right)^۲ \Delta y_j \Delta y_j . \frac{b}{\Delta y_j}(۱-\frac{y_j}{b})(۱-\frac{y_j|\sin\theta|}{\tau_{\circ} c})\cos(\frac{\omega y_j \sin\theta}{c}), \tag{A-۸}$$

که می‌توان آن را به صورت انتگرالی زیر نوشت:



شکل A-1 . تصویری از تک شکاف به پهنای b و تقسیم بندی آن به اجزا و چشمه‌های نور.

$$I_2 = 2b(\frac{E_L}{r})^2 \int_{y=0}^{y=b} (1-\frac{y}{b}). (1-\frac{y|\sin\theta|}{\tau_0 c})\cos(\frac{y\omega\sin\theta}{c})dy \;, \qquad (A-۹)$$

اما جملهٔ اول رابطهٔ (۱) در این تبدیل مجموعی از N حاصل‌ضرب داخلی هر یک از اجزا در نقطهٔ P است. سهم این جمله را می‌توان چنین نوشت:

$$I_1 = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N-1} I_j = \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N-1}(\frac{1}{b^2 r^2}\lim_{N'\to\infty}\varepsilon_0^2 N'^2 \Delta y_j^2) = \lim_{N\to\infty}(\frac{E_L}{r})^2\sum_{j=1}^{N-1}(\Delta y_j^2), \qquad (A-۱۰)$$

همچنین داریم:

$$\sum_{j=1}^{N-1}(\Delta y_j^2) = (\Delta y_1^2+\Delta y_2^2+....+\Delta y_{N-1}^2) = (\Delta y_1+\Delta y_2+....+\Delta y_{N-1})^2 -2\Delta y_1\Delta y_2 - 2\Delta y_1\Delta y_3 - ... \;, \qquad (A-۱۱)$$

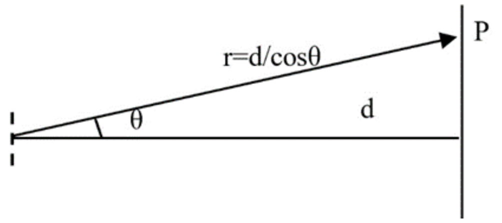
چنانکه می‌دانیم $\Delta y_1 = \Delta y_1 = ... = \Delta y_{N-1}$ یعنی پهنای اجزا یکی است. پس:

$$\sum_{j=1}^{N-1}(\Delta y_j^2) = (\Delta y_1^2+\Delta y_2^2+....+\Delta y_{N-1}^2) = (\Delta y_1+\Delta y_2+....+\Delta y_{N-1})^2 -2(\Delta y_1^2+\Delta y_2^2+....+\Delta y_{N-2}^2) \approx (b)^2 - 2(\sum_{j=1}^{N-1}(\Delta y_j^2)), \qquad (A-۱۲)$$

این رابطه منجر می‌شود به:

$$\sum_{j=1}^{N-1}(\Delta y_j^2) = b^2/3 \;, \qquad (A-۱۳)$$

و در نهایت می‌رسیم به:



شکل A-2. فاصلهٔ نقطهٔ P تا شکاف است.

$$I_f = (\frac{E_L}{r})^2\frac{b^2}{3}, \qquad (A-۱۴)$$

با در نظر گرفتن ضریب $\frac{c\varepsilon_0}{2}$ به شدت در نقطهٔ P می‌رسیم:

$$I_P(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2}[\frac{b^2}{3}(\frac{E_L}{r})^2 + 2b(\frac{E_L}{r})^2\int_{y=0}^{y=b}(1-\frac{y}{b})(1-\frac{y|\sin\theta|}{b}\eta). \cos(ky\sin\theta)dy] \;, \qquad (A-۱۵)$$

که $k = \omega/c$ عدد موج و پارامتر η که نام آن را پارامتر ناهمدوسی شکاف نامیده‌ایم [۸]، به شکل زیر تعریف شده است:

$$\eta = \frac{b}{l_0} \;, \qquad (A-۱۶)$$

که در آن $l_0 = c\tau_0$ طول قطار موج همدوس نور است. چون $|\sin\theta|$ بسیار کوچک‌تر از یک است نگرانی از منفی شدن جملهٔ دوم داخل انتگرال نداریم. معادلهٔ (A-15) جواب نهایی است و معرف پراش فرانهوفر با در نظر گرفتن طول همدوسی است، و می‌توان با کدنویسی رایانه‌ای آن را به سادگی شبیه‌سازی و رسم کرد. همچنین می‌توان انتگرال را نیز محاسبه کرده و فرایند شبیه‌سازی را یک گام تسریع کرد. با معرفی

$$\beta = \frac{|\sin\theta|}{l_0} \;, \gamma = k\sin\theta \;, \alpha = \frac{1}{b} \qquad (A-۱۷)$$

جواب انتگرال معادلهٔ (A–۱۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\int (1-\alpha y)(1-\beta y)\cos(\gamma y)dy = (\frac{1}{\gamma}-\frac{2\alpha\beta}{\gamma^3})\sin(\gamma y) - (\frac{\alpha+\beta}{\gamma})y\sin(\gamma y) -(\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2})\cos(\gamma y) + (\frac{\alpha\beta}{\gamma})y^2\sin(\gamma y) + (\frac{2\alpha\beta}{\gamma^2})y\cos(\gamma y) \;, \qquad (A-۱۸)$$

اگر فاصلهٔ مستقیم شکاف از پردهٔ روبه‌رو d باشد، فاصله آن از نقطهٔ P مطابق شکلA-2 خواهد بود $r = d/\cos\theta$:

مراجع

1. J Bakos and K Kantor, *Nuovo Cimento* **22** (1961) 519.
2. R A Shore, B J Thompson, and R Whitney, *J. Opt. Soc. Am*. **56** (1966) 733.
3. B J Thompson, *J. Opt. Soc. Am.* **56** (1966) 1157.
4. T Asakura and H Mishina, *Opt. Commun.* **7** (1973) 38.
5. J A Rodrigo and T Alieva, “*Fast control of temporal and spatial coherence properties of microscope illumination using DLP projector*” .Proc. of SPIE Vol. 9336 93360F-1.
6. Z Zhao, et al., *Appl. Sci.* **9**, 17 (2019) 3616
7. S Roling, et al., *Physical Review Special Topics - Accelerators And Beams* **14**, 080701 (2011).
8. E Koushki and S A Alavi, *Optics Communications* **441**(2019)33.
9. A study of the effects of Gaussian distribution of coherence length of source on the diffraction of partial temporal coherence beam from multi slits: Theory and simulation https://doi.org/10.1016/j.rio.2023.100546.
10. E Koushki and M H Majles Ara, *Optics Communications* **284** (2011) 5488
11. E Koushki and M H Majles Ara, H. Akherat Doost, *Applied Physics* B **115** (2014) 279.
12. Alex Gezerlis, “*Numerical Methods in Physics with Python*”, 2020, Cambridge University Press(2020).
13. S Simon and H Martin, “*Computational Methods in Physics*”, Springer”, second edition, New York (2018).
14. E Hecht, “*Optics*”, fifth ed., Pearson Education Limited, London (2017).
15. F Pedrotti and L S Pedrotti, “*Introduction to Optics*”, second ed., Prentice-Hall, Inc, Sa+ddle River NJ (1993).