

واهمتننده‌های موضعی برای هم ارزی کدهای کوانتومی توپولوژیکی دو بعدی

محسن رحمانی حقیقی و محمد حسین زارعی*

بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: mzarei92@shirazu.ac.ir

چکیده:

یکی از مهم‌ترین رهیافت‌ها در دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی توپولوژیکی، یافتن کلاس‌های هم ارزی تحت تبدیلات یکانی موضعی است. این مساله به خصوص برای کدهای کوانتومی توپولوژیکی با توجه به اهمیتشان در رایانش کوانتومی، مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. به ویژه، نشان داده شده است که نوعی از تبدیلات یکانی موضعی وجود دارد که تحت اثر آنها هر کد رنگ D بعدی می‌تواند به تعدادی کپی از کدهای چنبره D بعدی نگاشته شود [New J. Phys. 17 (2015) 083026]. در این مقاله، ما به بررسی چنین تبدیلاتی برای کدهای توپولوژیکی دو بعدی می‌پردازیم و تبدیلات یکانی واهمتننده گرین برگر - هورن - زایلینگر (GHZ) را بدین منظور معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای یک کد رنگ تعریف شده بر شبکه سه رنگ پذیر لانه زنبوری، با اعمال چنین تبدیلی به شکل موضعی روی کیوبیت‌های متناظر با یکی از رنگ‌ها، دو رنگ دیگر واهمتنیده شده و دو کد چنبره تولید می‌شود. علاوه بر این، ما تبدیلات بالا را برای کدهای رنگ، روی دیگر شبکه‌های سه رنگ پذیر تعمیم می‌دهیم. به طوریکه با اعمال تبدیلات GHZ متناظر با یکی از رنگ‌ها، کد رنگ به دو کپی از کد چنبره بر روی شبکه‌های دوگان متناظر با دو رنگ دیگر تبدیل می‌شود. این نتیجه امکان مقایسه بین کدهای رنگ دو بعدی مختلف را بر اساس تفاوت بین دوگان‌های آنها فراهم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات موضعی، کلاس‌های هم ارزی توپولوژیکی، کد کوانتومی رنگ، کد کوانتومی چنبره، فاز توپولوژیکی

به یکدیگر تبدیل کرد. با این وجود، فازهایی که در یک کلاس توپولوژیکی قرار دارند به وسیله عمل‌های یکانی موضعی به هم مربوط می‌شوند.

در سال‌های اخیر از میان سیستم‌های کوانتومی توپولوژیکی مختلف، کدهای کوانتومی توپولوژیکی به خاطر کاربردشان در رایانش کوانتومی، توجهات زیادی را به خود جلب کرده است [۱۰-۱۴]. در میان این کدها، کد چنبره^۲ و کد رنگ^۳ به دلیل استحکام و ویژگی‌های مقاومشان در برابر خطا، بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. کد چنبره [۱۵] با نظم توپولوژیکی Z_2 [۱۶] به عنوان اولین مثال از مدل‌های کوانتومی تصحیح خطا توسط کیتائف معرفی شد. این کد، حافظه محافظت شده‌ای است که اطلاعات در حالت‌های تبهگن آن (که به صورت

۱. مقدمه

یکی از موضوعات مهم در فیزیک ماده چگال، شناخت روش‌های دسته‌بندی فازهای کوانتومی توپولوژیکی [۲، ۱ و ۳] و شناسایی سیستم‌هایی است که در یک کلاس توپولوژیکی قرار می‌گیرند. در این راستا، مطالعه هم ارزی یکانی موضعی سیستم‌های کوانتومی توپولوژیکی یک روش مهم و کارآمد برای دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی است [۴-۷]. با توجه به اینکه فازهای توپولوژیکی دارای نظم غیر موضعی به همراه یک الگوی درهم‌تنیدگی بلند برد می‌باشند [۸] لذا به وسیله اعمال موضعی نمی‌توان دو سیستم توپولوژیکی که در دو فاز مختلف هستند و الگوی درهم‌تنیدگی بلند برد متفاوتی دارند [۹ و ۱۰] را

¹ Greenberger-Horne-Zeilinger

² Toric code

³ Color code

موضعی قابل شناسایی نیست) ذخیره می‌شود و از نظر توپولوژیکی در مقابل اختلال‌های موضعی مستحکم است [۱۷-۲۹]. چنین استحکامی نتیجه این واقعیت است که تبهگنی حالت پایه تنها به شرایط مرزی وابسته بوده و به تقارن بستگی ندارد. کد توپولوژیکی رنگ [۱۲، ۱۳ و ۳۰] کلاس دیگری از کدهای تصحیح خطای کوانتومی است. در مقایسه با کد چنبره، اضافه شدن عنصر رنگ منجر به بروز قابلیت‌های بیشتری برای کد رنگ شده است [۱۲ و ۱۳]. به عنوان مثال این ویژگی، باعث افزایش تبهگنی حالت پایه کد رنگ در مقایسه با کد چنبره در شرایط مرزی یکسان می‌شود. از دیگر قابلیت‌های کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌توان به توان محاسباتی بالاتر اشاره کرد به طوری که مجموعه‌ای از گیت‌های جهانشمول کلیفوردها را می‌توان بر روی آن اعمال کرد [۲ و ۳۱]. البته این قابلیت در ابعاد بالاتر افزایش یافته به طوری که کدهای رنگ با ابعاد بیشتر از دو بعد قابلیت تحقق گیت‌های غیر کلیفوردها را که جزو ضروری محاسبات کوانتومی متحمل خطاست، نیز دارند [۳۲ و ۳۳].

در حالی که هر یک از کدهای مذکور، دارای ویژگی‌ها و کاربردهای متمایزی است اما وجود یک ارتباط جالب بین آن‌ها در قالب هم ارزی یکانی موضعی بین کد رنگ و تعداد محدودی از کدهای چنبره موضوع پژوهش‌های اخیر بوده است [۴۲-۳۴]. به خصوص نشان داده می‌شود که کد رنگ تعریف شده روی شبکه دو بعدی از نظر توپولوژیکی معادل با دو کپی از کدهای چنبره دو بعدی بوده و در نتیجه متعلق به فاز توپولوژیکی $Z_2 \times Z_2$ است [۳۴ و ۳۸ و ۴۰ و ۴۲]. علی‌رغم چنین هم ارزی، وجود تفاوت‌هایی مهم بین قابلیت‌های کد رنگ و کد چنبره، اهمیت بررسی دقیق‌تر و صریح‌تر تبدیلات موضعی بین این دو کد را بیشتر می‌کند. به خصوص، مطالعاتی که تاکنون در مورد هم ارزی‌های یکانی موضعی بین کدهای مذکور صورت گرفته غالباً بر مبنای روش‌های جبری بوده و تبدیلات یکانی به صراحت معرفی نشده‌اند. اینکه این تبدیلات چه هستند و به خصوص چه میزان در درهم‌تنیدگی حالت‌های توپولوژیکی تاثیر می‌گذارند به درک ما از تفاوت‌های بین

کدهای توپولوژیکی کمک می‌کند.

در این مقاله ما تبدیلات واهمتننده^۲ GHZ را معرفی می‌کنیم که به وسیله یک تبدیل پایه از پایه محاسباتی به پایه‌ای ساخته شده از حالت‌های GHZ توصیف می‌شود. برای یک کد رنگ روی شبکه سه رنگ پذیر^۳ لانه زنبوری، این واهمتننده‌ها را به شکل موضعی بر روی کیوبیت‌های متناظر با یکی از رنگ‌ها اعمال می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چنین تبدیلی عملاً دو رنگ دیگر را از یکدیگر واهمتنیده کرده و دو کد چنبره تولید می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که این عملیات برای کد رنگ روی دیگر شبکه‌های سه رنگ پذیر نیز به همین شکل قابل اعمال است. به خصوص برای یک شبکه سه رنگ پذیر، متناظر با هر رنگ، یک شبکه دوگان تعریف می‌کنیم که کد چنبره بر روی هر یک از آن‌ها تعریف می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که تبدیلات GHZ بر روی یکی از رنگ‌ها، دو کد چنبره را روی شبکه‌های دوگان متناظر با دو رنگ دیگر تولید می‌کند. به این ترتیب تفاوت در قابلیت‌هایی که کدهای رنگ متناظر با شبکه‌های سه رنگ پذیر مختلف دارند [۲ و ۴۳ و ۴۴]، در تفاوت بین دوگان‌های مختلف این شبکه‌ها نمود پیدا می‌کند. ساختار مقاله به این صورت خواهد بود که در بخش دوم مقاله کد چنبره و کد رنگ را به عنوان دو کد کوانتومی توپولوژیکی معرفی کرده و برخی از تفاوت‌هایشان را مرور خواهیم کرد. در بخش سوم و چهارم مقاله با معرفی واهمتننده‌های GHZ نشان خواهیم داد که پایدارسازهای کد رنگ تعریف شده بر روی یک شبکه لانه زنبوری به ضرب تانسوری از پایدارسازهای دو کد چنبره تعریف شده بر روی دو شبکه مثلثی تبدیل خواهد شد. در بخش پنجم نیز با معرفی تبدیل GHZ به عنوان یک نگاشت دوگان بین کد رنگ دو بعدی و کد چنبره دو بعدی نشان خواهیم داد که این روش قابل تعمیم به حالت‌های کد رنگ روی هر شبکه دو بعدی سه رنگ پذیر دلخواه است.

¹ Clifford universal gates

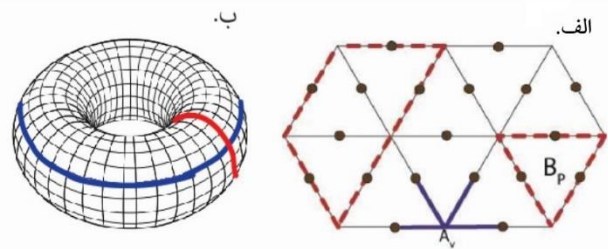
² Disentangler

³ Three-colorable

عملگر وجه متناظر با یک حلقه مثلثی است، هر حاصل ضربی از عملگرهای وجه می‌تواند به صورت یک پیکربندی از حلقه‌هایی با ساختارهای مثلثی نمایش داده شود (شکل ۱. آ). در این رابطه ما می‌توانیم حالت پایه یک کد چنبره را در قالب یک برهم نهی از همه ساختارهای حلقه مثلثی به صورت زیر نمایش دهیم:

$$|GS\rangle = \sum_{\Delta} |\Delta\rangle \quad (4)$$

که $|\Delta\rangle$ اشاره به همه ساختارهای حلقه مثلثی دارد که می‌تواند در شبکه مثلثی پدیدار شود. به عبارتی دیگر حالت پایه کد چنبره مثلثی یک برهم نهی از همه ساختارهای حلقه مثلثی اسپین‌های پایین $|1\rangle$ در دریایی از اسپین‌های بالا $|0\rangle$ می‌باشد. کد چنبره با شرط مرزی دوره‌ای دارای نظم توپولوژیکی مستحکمی است که ناشی از تبهگنی حالت پایه می‌باشد. استحکام خواص توپولوژیکی کد چنبره در مقابل اختلالات موضعی، آن را به عنوان یک حافظه کوانتومی ارزشمند، معرفی می‌کند. تبهگنی حالت پایه، بستگی به عدد جنس^۱ منیفولد^۲ دارد که شبکه بر روی آن تعریف شده است. مثلا کد چنبره تعریف شده بر روی رویه‌ای با توپولوژی چنبره، تبهگنی چهارگانه خواهد داشت که یکی از حالت‌های تبهگن آن در رابطه^۳ آورده شده است. با اثر عملگرهای توپولوژیکی غیربدیهی که به صورت ضرب عملگرهای نوع \mathbf{X} در امتداد حلقه‌های غیر جمع پذیر روی یک چنبره تعریف می‌شود، سه حالت تبهگن دیگر بازتولید خواهد شد (شکل ۱. ب). یکی دیگر از کدهای کوانتومی توپولوژیکی مهم، کد رنگ است. برخلاف کد چنبره که کیوبیت‌ها بر روی یال‌های شبکه تعریف می‌شدند در این جا، کیوبیت‌ها بر روی راس‌های شبکه قرار می‌گیرند. به طور کلی کد رنگ در \mathbf{d} بعد بر روی هر شبکه $\mathbf{d}+1$ رنگ پذیر، قابل تعریف است. شبکه لانه زنبوری در دو بعد می‌تواند یک مثال از چنین شبکه‌ای باشد که وجوه آن دارای سه رنگ آبی، قرمز و سبز است. به طوری که هیچ دو وجه مجاور دارای رنگ یکسان نیستند و وجوهی با یک رنگ خاص توسط یال‌هایی با همان رنگ به یکدیگر متصل می‌شوند (شکل ۲. آ).



شکل ۱. الف) کد چنبره بر روی یک شبکه مثلثی. A_v عملگر راس و عملگر B_p نشان دهنده یک حلقه مثلثی است که با خط چین قرمز نشان داده شده است. حاصلضرب از B_p ها به یک ساختار حلقه‌ای منجر می‌شود که با خط چین دوزنقه‌ای قرمز نشان داده شده است. ب) کد چنبره با شرایط مرزی دوره‌ای. دایره‌های قرمز و آبی نماینده عملگرهای توپولوژیکی غیر بدیهی است که به صورت ضرب عملگرهای نوع \mathbf{X} نوشته می‌شود.

۲. کد چنبره و کد رنگ

کد کوانتومی توپولوژیکی چنبره با نظم توپولوژیکی Z_2 یکی از مهم‌ترین کدهای تصحیح خطای کوانتومی است که بر روی هر شبکه دلخواه، قابل تعریف است. برای مثال یک شبکه مثلثی را در نظر بگیرید که کیوبیت‌ها روی یال‌های آن قرار گرفته‌اند (شکل ۱. آ). هامیلتونی آن بر حسب عملگرهای راس A_v و عملگرهای وجه B_p به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{TC} = -J \sum_v A_v - J \sum_p B_p \quad (1)$$

که \mathbf{J} انرژی همبستگی و A_v و B_p به ترتیب عملگرهای راس و وجه هستند.

$$B_p = \prod_{i \in \partial p} X_i, \quad A_v = \prod_{i \in v} Z_i \quad (2)$$

که \mathbf{X} و \mathbf{Z} عملگرهای پاولی هستند و $\mathbf{i} \epsilon \mathbf{V}$ به کیوبیت‌هایی اشاره دارد که بر روی یال‌هایی زندگی می‌کنند که به راس \mathbf{V} وارد می‌شوند. همچنین $\mathbf{i} \epsilon \partial \mathbf{P}$ به کیوبیت‌هایی اشاره دارد که بر روی یال‌هایی که وجه \mathbf{P} را احاطه کرده، قرار دارند (شکل ۱. آ). عملگرهای دلخواه A_v و B_p یا هیچ کیوبیت مشترکی ندارند یا در دو کیوبیت اشتراک خواهند داشت. به همین دلیل عملگرهای راس و وجه با یکدیگر جابجا می‌شوند. بنابراین حالت پایه کد چنبره صرف نظر از ضریب بهنجارش را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$|GS\rangle = \prod_v (1 + B_p) |0\rangle^{\otimes n} \quad (3)$$

که در این جا n تعداد کیوبیت‌ها می‌باشد. با توجه به اینکه هر

¹ Genus

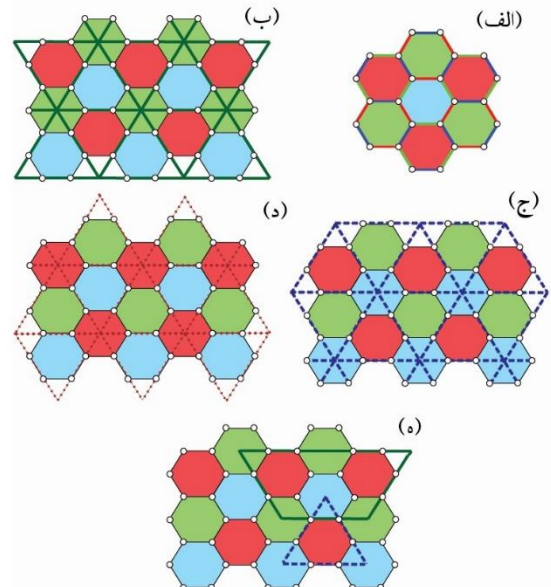
² Manifold

که یال‌های شبکه مثلثی بر یال‌های سبز رنگ شبکه اولیه منطبق باشد. با توجه به اینکه هر مثلث از شبکه مثلثی متناظر با یک وجه از شبکه لانه زنبوری است، لذا عملگر B_p^x را می‌توان بر حسب یک حلقه مثلثی نمایش داد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که یک نمایش حلقه برای کد رنگ همانند کد چنبره وجود دارد. با این تفاوت که در کد رنگ به خاطر وجود عنصر رنگ (سه رنگ در دو بعد)، نیاز به حلقه دیگری با رنگی متفاوت برای نمایش تمام پایدارسازهای نوع X می‌باشد.

به عنوان مثال همان طور که در شکل ۲.ب می‌بینید، حلقه سبز رنگ تنها وجوهی با دو رنگ را پوشش می‌دهد، و برای نمایش پایدارسازهای متناظر با وجوهی با رنگ سبز نیاز به حلقه دیگری با یکی از دو رنگ قرمز یا آبی خواهد بود. بنابراین حالت پایه کد رنگ را می‌توان به وسیله برهم‌نهی از حلقه‌هایی با دو رنگ متفاوت نمایش داد (شکل ۲.ه).

اضافه شدن رنگ در این مدل منجر به بروز ویژگی‌هایی متفاوت از کد چنبره می‌شود. در مورد کد چنبره با شرط مرزی دوره‌ای به علت وجود دو نوع حلقه غیر بدیهی غیر جمع پذیر در دو راستای مختلف تبهگنی چهارگانه داشتیم. در مورد کد رنگ، ما چهار حلقه با دو رنگ مختلف بر روی مسیرهای غیر جمع پذیر خواهیم داشت که باعث افزایش تبهگنی حالت پایه به یک تبهگنی ۱۶ گانه در کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌شود. بنابراین اضافه شدن عنصر رنگ در شرایط مرزی یکسان منجر به افزایش تبهگنی کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌شود. علاوه بر این، عنصر رنگ در کد رنگ باعث بالا رفتن توان محاسباتی کد رنگ نسبت به کد چنبره شده است [۱۲].

علی‌رغم تفاوت‌هایی که بین کد چنبره و کد رنگ وجود دارد، شباهت بین ساختار حلقه‌ها نشان دهنده وجود یک رابطه بین این دو کد است. به خصوص دیدیم که در عمل حلقه‌های تشکیل دهنده کد رنگ، مشابه کد چنبره بودند با این تفاوت که دو نوع حلقه با دو رنگ مختلف مورد نیاز بود. بر همین مبنا نشان داده می‌شود که یک تبدیل یکانی موضعی وجود دارد که حالت پایه کد رنگ را به دو کپی از حالت پایه کد چنبره تبدیل می‌کند. در واقع، از آنجا که حالت‌های توپولوژیکی با درهم‌تنیدگی بلند برد شناخته می‌شوند، اعمال یکانی قادر به



شکل ۲. (الف) کد رنگ روی یک شبکه شش ضلعی دو بعدی. در اینجا کیوبیت‌ها روی راس‌های وجوه قرار گرفته‌اند و یال‌هایی با یک رنگ مشخص وجوه با همان رنگ را به یکدیگر وصل می‌کنند. به عنوان مثال یال‌های سبز رنگ وجوه سبز را به یکدیگر وصل می‌کند. (ب) عملگرهای وجوه آبی و قرمز توسط شبکه مثلثی سبز رنگ توصیف می‌شود. (ج) عملگرهای وجوه قرمز و سبز توسط شبکه مثلثی آبی رنگ توصیف می‌شود. (د) عملگرهای وجوه آبی و سبز توسط شبکه مثلثی قرمز رنگ توصیف می‌شود. (ه) ضرب عملگرهای وجوه در کد رنگ منجر به ساختار حلقه‌ای می‌شود که از دو رنگ مختلف ساخته شده است.

هامیلتونی کد رنگ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{CC} = -J \sum_p B_p^x - J \sum_p B_p^z \quad (5)$$

که در آن P به وجه اشاره دارد و B_p^x و B_p^z به ترتیب عملگرهای جابجاشونده وجه نوع X و نوع Z می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_p^z = \prod_{i \in p} Z_i, \quad B_p^x = \prod_{i \in p} X_i \quad (6)$$

که $i \in P$ به کیوبیت‌های متعلق به وجه P اشاره می‌کند (شکل ۲.ا).

همانند کد چنبره، حالت پایه کد رنگ را می‌توان بر حسب عملگرهای نوع X به صورت زیر نوشت:

$$|GS\rangle_{CC} = \prod_v (1 + B_v^x) |0\rangle^{\otimes n} \quad (7)$$

که n تعداد راس‌ها در شبکه لانه زنبوری است.

مطابق شکل ۲.ب یک شبکه مثلثی با رنگی دلخواه (مثلاً سبز) را می‌توان بر روی شبکه لانه زنبوری اولیه رسم کرد. به طوری

را خواهد داد. به عبارت دیگر، پایه‌های GHZ ویژه حالات مولدهای $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ با ویژه مقادیر مختلف هستند. به این ترتیب ما می‌توانیم همه 2^6 پایه GHZ را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, \bar{m}_5, \bar{m}_6\rangle = \frac{1}{8} \prod_{i=1}^6 (1 + (-1)^{m_i} g_i) |+++++\rangle \quad (10)$$

که $m_i=0,1$ ها معرف این پایه‌ها هستند. از آنجا که هر عملگر g_i به یک یال از شبکه منسوب می‌شود، مناسب است که متغیرهای $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3, \bar{m}_4, \bar{m}_5, \bar{m}_6$ به صورت نمادین با کیوبیت‌هایی که روی یال‌های شبکه زندگی می‌کنند نشان داده شوند. به این ترتیب از این به بعد کیوبیت‌های فیزیکی کد رنگ را کیوبیت‌های راس و کیوبیت‌های متناظر با پایه جدید را کیوبیت‌های یال می‌نامیم و به صورت دایره‌هایی متناظر با رنگ یالی که کیوبیت بر روی آن قرار دارد، رنگ آمیزی می‌کنیم. به خصوص از آنجا که هر وجه آبی با یال‌های سبز رنگ و قرمز رنگ احاطه می‌شود، کیوبیت‌های یال نیز به همین دو رنگ خواهند بود. به عنوان مثال در شکل ۳ کیوبیت‌های قرار گرفته بر روی یال‌های وجه آبی رنگ به دو دسته دایره‌های سبز و قرمز متناظر با رنگ یال‌ها تقسیم شده‌اند. به عبارت دیگر کیوبیت‌های $\bar{m}_1, \bar{m}_3, \bar{m}_5$ (سبز) را با توجه به رنگ یالی که بر روی آن قرار داده شده‌اند با دایره‌های سبز (قرمز) نشان داده‌ایم. با توجه به اینکه گروه پایدارساز g^6 یک زیرگروه از گروه یالی است، بنابراین حتماً تبدیل یکانی کلیفوردی وجود خواهد داشت که پایه‌های محاسباتی را به پایه‌های GHZ تعریف شده در بالا، تغییر دهد.

۴. هم ارزی یکانی بین کد رنگ و کد چنبره

اکنون می‌خواهیم چنین تبدیل یکانی را بر حالت کد رنگ اعمال کنیم. به این منظور بایستی پایدارسازهای کد رنگ را در پایه‌های جدید (۱۰) بازنویسی کنیم و به این ترتیب پایدارسازهای جدیدی خواهیم یافت که مشخص کننده حالت کوانتومی نهایی خواهند بود. توجه به این نکته نیز حائز اهمیت است که چون تبدیل بالا بر روی وجه آبی رنگی که هیچ کیوبیت مشترکی با هم ندارند، اعمال شده است، نتیجه می‌شود که این تبدیل یک تبدیل موضعی است (شکل ۳).

تغییر در هم تنیدگی بلند برد نیستند و نظم توپولوژیکی را تغییر نمی‌دهند. در نتیجه حالت‌های کوانتومی که تحت اعمال یکانی موضعی هم ارز هستند، در یک کلاس توپولوژیکی قرار می‌گیرند. در رابطه زیر منظور از یک تبدیل یکانی موضعی بین دو حالت توپولوژیکی را روشن کرده‌ایم.

$$|\Psi\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_N |\Phi\rangle \quad (8)$$

که $|\Phi\rangle$ و $|\Psi\rangle$ متعلق به یک فاز توپولوژیکی هستند و U_i به عمل‌های یکانی موضعی اشاره دارد. در حالی که وجود تبدیلات یکانی موضعی بین کد رنگ و دو کپی از کد چنبره به منظور نشان دادن یکسان بودن کلاس توپولوژیکی آن‌ها کافی است، اما اینکه این تبدیلات صراحتاً چه هستند و به چه میزان در هم تنیدگی‌های کوتاه برد را تغییر می‌دهند، کمتر مورد توجه بوده است. این مساله می‌تواند برای درک تفاوت در قابلیت‌های محاسباتی این دو کد حائز اهمیت باشد. در بخش‌های بعدی این مقاله به معرفی چنین تبدیلاتی که آن‌ها را واهم‌تنده‌های موضعی می‌نامیم، خواهیم پرداخت.

۳. واهم‌تنده‌های موضعی GHZ

به منظور معرفی واهم‌تنده‌های موضعی، وجه آبی رنگ شش کیوبیتی از یک شبکه لانه زنبوری را در نظر بگیرید که کیوبیت‌های آن مطابق الگوی نشان داده شده در شکل ۳ از شماره یک تا شماره شش نامگذاری شده است. یک پایه GHZ برای این شش کیوبیت معرفی می‌کنیم.

حالت GHZ شش کیوبیتی به صورت $|\text{GHZ}\rangle_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000000\rangle + |111111\rangle)$ توسط یک گروه پایدارساز با مولدهای زیر پایدار می‌شود:

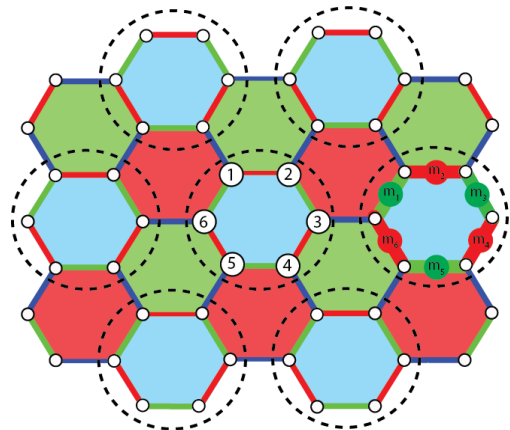
$$g^{(6)} = \{Z_1 Z_2, Z_2 Z_3, Z_3 Z_4, Z_4 Z_5, Z_5 Z_6, Z_6 Z_1, \prod_{i=1}^6 X_i\}. \quad (9)$$

مولدهای بالا را به ترتیب $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$ می‌نامیم. به دلیل اینکه هر مولد g_i متناظر با یکی از یال‌های وجه آبی رنگ است ما آن‌ها را عملگر یال g_i نامگذاری می‌کنیم. با استفاده از این مولدها قادر خواهیم بود حالت‌های دیگر GHZ را برای ایجاد یک پایه کامل شش کیوبیتی بنویسیم. برای مثال حالت $|\text{GHZ}\rangle_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000000\rangle - |111111\rangle)$ یکی دیگر از حالت‌های GHZ است با این تفاوت که اثر g_6 بر روی آن، ویژه مقدار -1

داده شده در شکل ۴ به صورت $(Z_1Z_2)(Z_3Z_4)(Z_5Z_6)$ خواهد بود که عملاً معادل با $g_1g_3g_5$ است. از طرف دیگر مطابق با رابطه (۱۲) هر g_i متناظر با عملگر پائولی Z_i روی کیوبیت یال متناظر است. بنابراین همان طور که در شکل ۴.آ نشان داده‌ایم، پایدارساز نوع Z (B_p^z) مربوط به وجه قرمز، معادل با ضرب تانسوری سه عملگر Z روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ است که ما آن را با $B_p^z(1)$ نمایش می‌دهیم.

حال به پایدارسازهای نوع X (B_p^x) کد رنگ مربوط به وجه قرمز می‌پردازیم که برابر با ضرب تانسوری عملگرهای پائولی X روی شش کیوبیت راس است. ابتدا اثر این عملگرها را بر کیوبیت‌های یال سبز بررسی می‌کنیم. واضح است که وجه قرمز رنگ با همه یال‌های سبز رنگ احاطه کننده آن، دو کیوبیت راس مشترک دارد و در نتیجه عملگر B_p^x با همه Z_iZ_j های متناظر با یال‌های سبز رنگ جابجا می‌شود (شکل ۴.ب) و اثر آن متناظر با عملگر واحد است. اما اثر B_p^x بر کیوبیت‌های یال قرمز رنگ نیز بایستی بررسی شود. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، وجه قرمز با شش یال قرمزی که به آن وجه وارد می‌شوند، تنها یک کیوبیت مشترک دارد و در نتیجه B_p^x با Z_iZ_j های متناظر با یال‌های قرمز پادجابجا می‌شود. به این ترتیب و از آنجا که هر عملگر X_i در B_p^x اثری مشابه رابطه (۱۱) را در پایه جدید خواهد داشت نتیجه می‌شود:

$$B_p^x(1 + (-1)^{m_i}Z_iZ_j) = (1 + (-1)^{m_i+1}Z_iZ_j)B_p^x \quad (13)$$
 بنابراین عملگر B_p^x عملاً نقش عملگر X را روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ ورودی به وجه قرمز بازی می‌کند. در نهایت B_p^x معادل با یک ضرب تانسوری شش تایی از عملگرهای X روی کیوبیت‌های یال قرمز است که ما آن را با $B_p^x(1)$ نشان می‌دهیم (شکل ۴.ب). به همین ترتیب یک تبدیل مشابه برای پایدارسازهای متناظر با وجه سبز وجود دارد که طبق آن پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه سبز معادل با یک ضرب سه تایی از عملگرهای Z روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ است که ما آن را با $B_p^z(2)$ نشان می‌دهیم (شکل ۴.آ). پایدارسازهای نوع X مربوط به وجه سبز نیز به یک ضرب شش تایی از عملگرهای X روی کیوبیت‌های یال سبز نگاشته می‌شود که ما آن را با $B_p^x(2)$ نشان می‌دهیم (شکل ۴.ب).



شکل ۳. نمایش کیوبیت‌های یال که بر روی یال‌های وجوه آبی تعریف شده‌اند. دایره‌های خط چین مشکی نشانگر موضعی بودن تبدیل GHZ است.

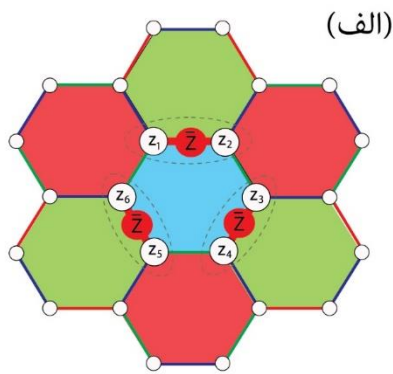
از آنجا که پایه‌های جدید را به وسیله کیوبیت‌های جدید یال نمایش داده‌ایم، به منظور بررسی تبدیل پایدارسازها، باید بررسی کنیم که اثر عملگرهای پائولی روی کیوبیت‌های راس، در پایه جدید، متناظر با اثر چه عملگری بر کیوبیت‌های یال است. به عنوان مثال برای بررسی یک عملگر پائولی X_i بر کیوبیت راس i ، به این نکته توجه می‌کنیم که چون $g_i = Z_iZ_{i+1}$ پس $X_i g_i = -g_i X_i$ و در نتیجه اثر X_i بر عبارت $(1 + (-1)^{m_i}g_i)$ در پایه GHZ (۱۰) به صورت زیر خواهد بود:

$$X_i(1 + (-1)^{m_i}g_i) = (1 + (-1)^{m_i+1}g_i)X_i \quad (11)$$

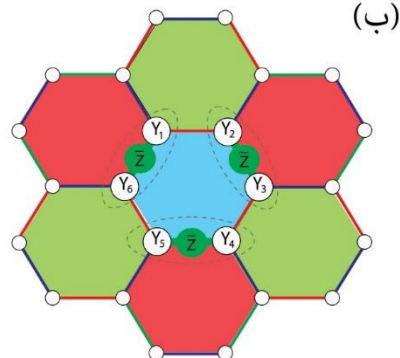
و از آنجا که $(+|+) = |X|+$ نتیجه می‌شود که اثر X_i معادل با یک عملگر بالا برنده یا یک عملگر پائولی X بر کیوبیت یال $(|m_i\rangle)$ است. مثال ساده دیگر اثر عملگر $g_i = Z_iZ_{i+1}$ بر پایه (۱۰) است. از آنجا که

$$g_i(1 + (-1)^{m_i}g_i) = (-1)^{m_i}(1 + (-1)^{m_i}g_i) \quad (12)$$

به سادگی نتیجه می‌شود که اثر g_i بر پایه GHZ معادل با یک عملگر فاز یا عملگر پائولی Z بر کیوبیت یال $(|m_i\rangle)$ است. خوشبختانه همین دو مثال ساده بالا به ما کمک خواهد کرد تا همه پایدارسازهای کد رنگ را بر حسب عملگرهای پائولی جدیدی بر کیوبیت‌های یال بنویسیم. همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده است ابتدا پایدارسازهای نوع Z و نوع X متناظر با یک وجه شش ضلعی قرمز متعلق به کد رنگ را در نظر می‌گیریم. پایدارسازهای نوع Z (B_p^z) قرمز را به صورت ضرب Z_iZ_j ها متناظر با یال‌های سبز می‌نویسیم که برای وجه نشان

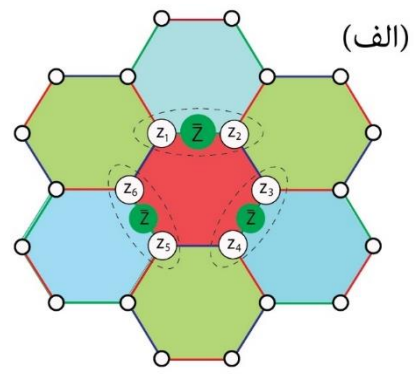


(الف)

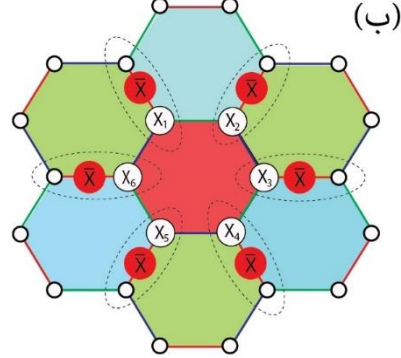


(ب)

شکل ۶. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه آبی به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های سبز (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع Y مربوط به راس آبی به ضرب ۳ تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ



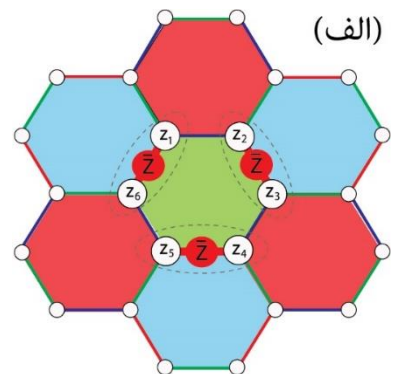
(الف)



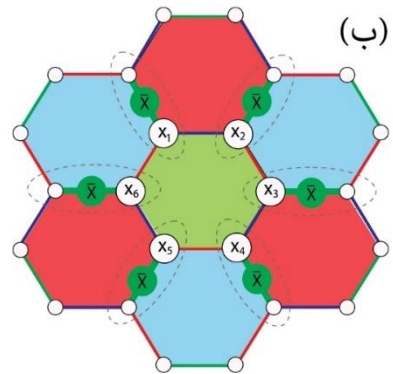
(ب)

شکل ۴. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه قرمز به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع X مربوط به راس قرمز به ضرب ۶ تایی از عملگرهای پاولی نوع X روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ

در نهایت تبدیلی مشابه را برای پایدارسازهای متناظر با وجه آبی رنگ در نظر می‌گیریم. در مورد پایدارساز نوع Z برای وجه آبی رنگ، نگاهت پایدارسازها شبیه به دیگر وجوه است، به این معنا که پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه آبی رنگ معادل با یک ضرب سه تایی از عملگرهای نوع Z روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ است که با $B_p^Z(3)$ مشخص می‌کنیم (شکل ۶.الف). با این حال اثر پایدارساز نوع X بدیهی است به این معنا که به دلیل اینکه این نوع پایدارساز با همه عملگرهای g_i جابجا می‌شود، به عملگر یکانی روی کیوبیت‌های یال نگاهت خواهد شد. اما می‌دانیم که یک ضرب از پایدارسازهای نوع X و نوع Z که B_p^Y نامیده می‌شود یک عضو از گروه پایدارساز مربوط به کد رنگ است. اگر چنین عملگری را به شکل $(Z_2 Z_3)(Z_4 Z_5)(Z_6 Z_1 B_x^p)$ بنویسیم، معادل با $g_2 g_4 g_6$ خواهد بود. در چنین شرایطی، اثر این عملگر بر روی پایه‌های GHZ ، معادل با حاصلضرب سه عملگر Z روی کیوبیت‌های قرمز رنگ است که ما آن را با $B_p^Y(3)$ نشان می‌دهیم (شکل ۶.ب).



(الف)



(ب)

شکل ۵. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه سبز به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع X مربوط به وجه سبز به ضرب ۶ تایی از عملگرهای پاولی نوع X روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ

در نتیجه اگر تبدیل مورد نظرمان را به همه پایدارسازهای کد رنگ اعمال کنیم، پایدارسازها به دو دسته متناظر با کیوبیت‌های یال قرمز و سبز تبدیل می‌شوند که در آن $B_p^x(1)$ و $B_p^x(2)$ و $B_p^y(3)$ به کیوبیت‌های یال سبز و $B_p^z(1)$ و $B_p^z(2)$ و $B_p^z(3)$ به کیوبیت‌های یال قرمز اعمال می‌شوند. این بدین معنی است که تحت تبدیل یکانی انجام شده، حالت کد رنگ به یک حالت ضربی از دو حالت پایدار ساز متناظر با کیوبیت‌های یال قرمز و سبز تبدیل شده است. $B_p^z(1)$ و $B_p^x(2)$ و $B_p^z(3)$ پایدارسازهای یک حالت پایدار شده متناظر با کیوبیت‌های یال سبز است.

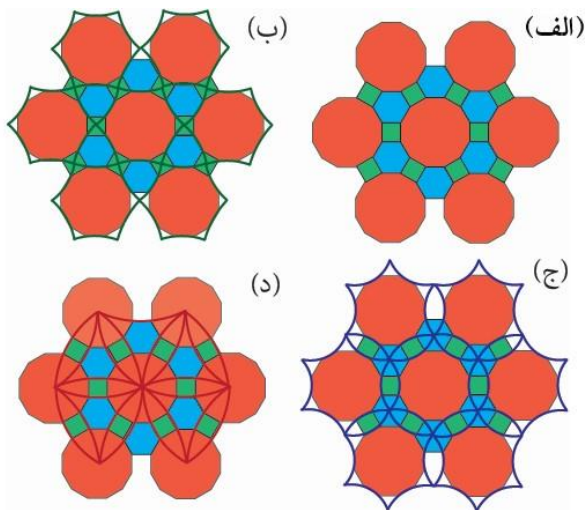
همان طور که در شکل ۲.ب مشاهده می‌کنید، کیوبیت‌های یال سبز رنگ بر روی یال‌های یک شبکه مثلثی قرار دارند که راس‌های این شبکه مثلثی در مرکز وجوه سبز شبکه لانه زنبوری اولیه واقع شده است. $B_p^z(1)$ و $B_p^z(3)$ متناظر با پایدارسازهای وجه کد چنبره تعریف شده بر روی شبکه مثلثی و $B_p^x(2)$ متناظر با پایدارسازهای راس کد چنبره روی شبکه مثلثی است. بنابراین حالت پایدارساز روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ با حالت کد چنبره روی شبکه مثلثی یکسان است. به روشی مشابه به آسانی می‌توان نشان داد که حالت پایدارساز متناظر با کیوبیت‌های یال قرمز رنگ نیز با حالت کد چنبره روی شبکه مثلثی که رئوس آن در مرکز وجوه قرمز رنگ شبکه لانه زنبوری اولیه قرار دارد، یکسان است (شکل ۲.ج و د).

این کدهای چنبره ایجاد شده بر روی شبکه مثلثی سبز (شامل کیوبیت‌های یال سبز) و شبکه مثلثی قرمز (شامل کیوبیت‌های یال قرمز) هیچ کیوبیت مشترکی با هم ندارند بنابراین این دو کد چنبره کاملاً از هم واهمتمتیده هستند. با این روش، ما به سادگی اثبات کردیم که یک حالت کد رنگ روی شبکه لانه زنبوری معادل با دو کپی واهمتمتیده از کدهای چنبره تعریف شده روی شبکه‌های مثلثی است.

۵. تبدیل GHZ به عنوان یک نگاشت دوگان بر روی کدهای کوانتومی

همان طور که در قسمت قبل نشان دادیم با انتخاب یک وجه با رنگی دلخواه (در اینجا وجه آبی رنگ) از شبکه لانه زنبوری و

اعمال تبدیل GHZ روی کیوبیت‌های متعلق به آن، کد رنگ روی شبکه لانه زنبوری به دو کپی واهمتمتیده از کدهای چنبره روی دو شبکه مثلثی (قرمز و سبز) تبدیل می‌شود به طوری که راس‌های شبکه‌های مثلثی در وسط وجوه شش ضلعی با رنگی غیر از آبی (در اینجا سبز و قرمز) قرار گرفته‌اند. با توجه به تقارن مسئله واضح است که اگر وجهی با رنگی دیگر مثلاً رنگ قرمز را انتخاب کرده و این تبدیل را انجام می‌دادیم کدهای چنبره به وجود آمده همانند قبل بر روی شبکه‌های مثلثی تعریف می‌شدند که راس‌های شبکه، این بار درون وجوهی با رنگی غیر از قرمز قرار می‌گرفتند. همین روند برای وجه شش ضلعی سبز رنگ نیز صادق است که تبدیل GHZ بر روی کیوبیت‌های واقع بر شش ضلعی سبز، کد رنگ را به دو کپی از کدهای چنبره مثلثی تبدیل می‌کند که راس شبکه‌های مثلثی در وسط وجوه با رنگهای قرمز و آبی قرار دارند. دوباره یادآور می‌شویم که چون شبکه‌های مثلثی نهایی دارای هیچ کیوبیت مشترکی نیستند لذا کدهای چنبره تعریف شده بر روی آن‌ها کاملاً از هم واهمتمتیده هستند. شبکه‌های ثانویه ایجاد شده بر روی شبکه اولیه را شبکه‌های دوگان می‌نامیم. شبکه دوگان تعریف شده بر روی کد رنگ شبکه‌ای است که راس‌های آن در وسط وجوه شبکه اولیه با یک رنگ خاص قرار گرفته و یال‌های آن منطبق بر یال‌هایی با همان رنگ از شبکه اولیه است. شبکه دوگانی که بر روی یک کد رنگ دو بعدی تعریف می‌شود را با سه رنگ مختلف، متناظر با رنگ وجوهی که راس‌های شبکه دوگان در آن قرار گرفته، رنگ آمیزی می‌کنیم. همان طور که در شکل ۲ می‌بینید شبکه لانه زنبوری سه شبکه دوگان مثلثی خواهد داشت که با سه رنگ آبی، قرمز و سبز مشخص شده است. راس‌های هر کدام از شبکه‌های دوگان درون وجوه شش ضلعی با همان رنگ واقع شده است. متناظر با اینکه تبدیل GHZ ما بر روی کدام رنگ از وجوه شش ضلعی کد رنگ اعمال شده، کد چنبره بر روی شبکه‌های دوگانی با رنگ‌های دیگر تعریف می‌شود. با توجه به این که روش ما مبتنی بر تغییر پایه است، این روش، قابل تعمیم به حالت‌های کد رنگ روی هر شبکه دو بعدی سه رنگ پذیر دلخواه خواهد بود.

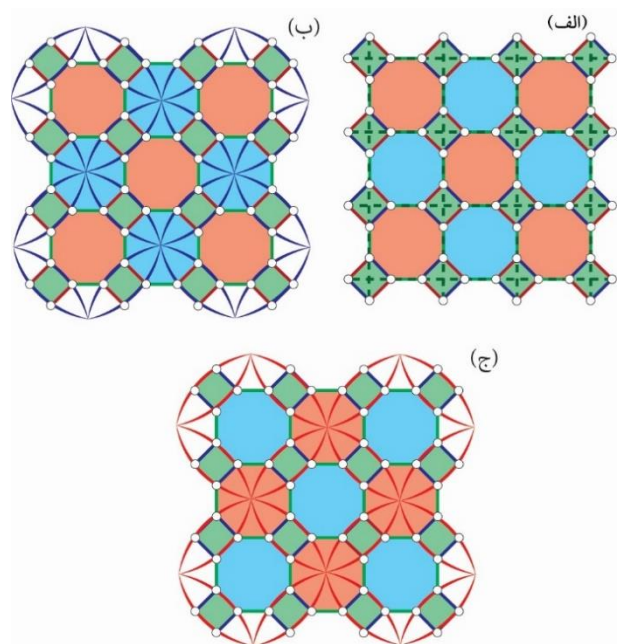


شکل ۸. (الف) شبکه ۴.۶.۱۲ با وجوه سبز، آبی و قرمز (ب) شبکه دوگان سبز رنگ با راس‌هایی واقع در وجوه سبز (ج) شبکه دوگان آبی با راس‌هایی واقع در وجوه آبی (د) شبکه دوگان قرمز با راس‌هایی واقع در وجوه قرمز رنگ

به عبارت دیگر در اینجا نیز اگر تبدیل **GHZ** را به عنوان یک نگاشت دوگان در نظر بگیریم با توجه به اینکه شبکه ۴.۸.۸ دارای سه شبکه دوگان (یک شبکه مربعی و دو شبکه ستاره‌ای) است بسته به اینکه تبدیل **GHZ** بر روی کیوبیت‌های متعلق به کدام وجه اعمال می‌شود، کد رنگ به کپی‌هایی از کد چنبره تبدیل می‌شود به طوری که راس‌های کد چنبره بر روی وجوهی با رنگی متفاوت از رنگ وجهی که تبدیل **GHZ** بر روی آن اثر کرده، قرار می‌گیرند.

به عنوان مثال دیگر در شکل ۸، شبکه ۴.۶.۱۲ که دارای سه شبکه دوگان با سه ساختار مختلف است را نشان داده‌ایم [۴۵]. در اینجا نیز همانند قبل با اعمال تبدیل **GHZ** روی کیوبیت‌های واقع بر روی یک نوع از وجوه، کد چنبره‌ای روی شبکه دوگان ایجاد خواهد شد. متناظر با اینکه تبدیل **GHZ** بر روی کدام وجه اعمال شده است کد چنبره بر روی دو تا از سه نوع شبکه دوگان قابل تعریف بر روی شبکه اولیه ۴.۶.۱۲ ایجاد می‌شود (شکل ۸).

بنابراین تبدیل **GHZ** یک نگاشت دوگان بین کد رنگ دو بعدی و کد چنبره دو بعدی است، به طوری که از ساختار دوگان شبکه‌ها تبعیت می‌کند. این مساله به خصوص از این نظر مهم است که امکان مقایسه الگوی درهم‌تنیدگی بین کدهای رنگ روی شبکه‌های مختلف را فراهم می‌کند. به بیان دیگر در



شکل ۷. (الف) شبکه دوگان مربعی سبز رنگ با راس‌هایی واقع در وجوه سبز رنگ شبکه اولیه (ب) و (ج) شبکه دوگان ستاره‌ای آبی (قرمز) با راس‌هایی واقع در وجوه آبی (قرمز).

به عنوان مثال کد رنگ در شکل ۷ بر روی یک شبکه ۴.۸.۸ که دارای دو نوع ساختار هشت ضلعی و مربعی است تعریف شده است [۱۲ و ۴۳ و ۴۴]. همانند قبل در این جا نیز با اعمال تبدیل **GHZ** که متناظر با یک الگوی خاص از تبدیلات یکانی موضعی بر روی یک وجه با رنگی خاص است، کد رنگ به دو کپی از کدهای چنبره نگاشته می‌شود.

با این حال بسته به اینکه تبدیل **GHZ** به کدام نوع وجه (هشت ضلعی یا مربعی) اعمال شود کد چنبره بر روی شبکه‌های مختلفی از نظر ساختار ایجاد می‌شود.

به عنوان مثال اگر تبدیل **GHZ** به کیوبیت‌های متعلق به وجه مربعی اعمال شود کد چنبره بر روی شبکه‌های ستاره‌ای با رنگ‌های قرمز و آبی واقع خواهد شد که این شبکه‌ها، دوتا از سه شبکه دوگان قابل تعریف بر روی شبکه اولیه ۴.۸.۸ است. از طرفی از آن جا که دو نوع وجه هشت ضلعی با دو رنگ مختلف در شبکه ۴.۸.۸ وجود دارد، اگر تبدیل **GHZ** را به وجوه هشت ضلعی متناظر با یکی از رنگ‌ها اعمال کنیم، این الگو، کد رنگ را به دو کد چنبره بر روی شبکه مربعی سبز و شبکه ستاره‌ای با رنگی دیگر تبدیل می‌کند.

حالیکه همه کدهای رنگ توسط واهمتتندها در نهایت به دو کد چنبره تبدیل می‌شوند اما ساختار شبکه‌های دوگان مربوط به کدهای چنبره با یکدیگر متفاوت بوده و در نتیجه الگوی درهم‌تنیدگی، متفاوت خواهد بود. این مساله می‌تواند توضیحی برای تفاوت بین قابلیت‌های کدهای رنگ روی شبکه‌های مختلف دو بعدی باشد [۱۲].

۶. نتیجه‌گیری

در حالیکه اثبات وجود تبدیلاتی موضعی بین کدهای کوانتومی توپولوژیکی، در فهم مشابه بودن نظم توپولوژیکی آن‌ها راهگشا است، اما شناخت و معرفی صریح این تبدیلات به منظور درک تفاوت‌های بین این کدها ضروری است. بر این اساس، در این مقاله به بررسی هم ارزی بین کدهای کوانتومی توپولوژیکی چنبره و کد رنگ پرداختیم و با معرفی واهمتتندهای GHZ نشان دادیم که کد رنگ با اعمال چنین تبدیلاتی به دو کد چنبره تبدیل می‌شود. به ویژه، با توجه به ماهیتی با بیشینه درهم‌تنیدگی برای حالت‌های GHZ، نتیجه ما امکان مقایسه درهم‌تنیدگی

کوتاه برد در کد چنبره با کد رنگ را فراهم می‌کند که به منظور بررسی تفاوت‌های مهم این دو کد کوانتومی مفید است. قابل ذکر است که این کار می‌تواند برای یافتن مدارهای کوانتومی به منظور تبدیل کدهای کوانتومی رنگ و چنبره به یکدیگر نیز به کار آید. ما نشان دادیم که این روش قابل تعمیم به انواع شبکه‌های دو بعدی سه رنگ پذیر مثل شبکه‌های ۴.۸.۸ و ۴.۶.۱۲ نیز است. به خصوص، با معرفی سه نوع شبکه دوگان متناظر با سه رنگ از شبکه‌های سه رنگ پذیر مربوط به کد رنگ، نشان دادیم که تبدیل بین کد رنگ و کد چنبره به نوعی می‌تواند به عنوان یک نگاشت دوگان تلقی شود. در همین راستا دیدیم که تبدیل GHZ بر روی کد رنگ لانه زنبوری آن را به کپی‌هایی از کد چنبره بر روی سه ساختار یکسان تبدیل می‌کند. در حالیکه این تبدیل، کد رنگ روی شبکه ۴.۸.۸ را به دو ساختار متفاوت و شبکه ۴.۶.۱۲ را به سه ساختار متفاوت می‌نگارد. این تفاوت در ساختارهای دوگان برای کدهای رنگ لانه زنبوری و ۴.۸.۸ و ۴.۶.۱۲، می‌تواند برای درک تفاوت‌های بین این کدها نیز راهگشا باشد.

مراجع

1. H. Jiang, Z. Wang and L. Balents, "Identifying topological order by entanglement entropy". *Nature Phys* **8** (2012), 902–905.
2. S. Sachdev, "Quantum Phase Transition", Cambridge University Press. (2nd ed.). (2011) ISBN 978-0-521-51468-2.
3. Carr, Lincoln D. "Understanding Quantum Phase Transitions". CRC Press. ISBN 978-1-4398-0251-9. (2010).
4. B. Kraus, "Local unitary equivalence of multipartite pure states", *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 020504.
5. B. Kraus, "Local unitary equivalence and entanglement of multipartite pure states", *Phys. Rev. A* **82** (2010) 032121.
6. B. Liu, J. L. Li, X. Li, and C. F. Qiao, "Local unitary classification of arbitrary dimensional multipartite pure states" *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 050501.
7. M. Grassl, M. Rotteler, and T. Beth, "Computing local invariants of quantum-bit systems", *Phys. Rev. A* **58** (1998) 1833.
8. X. -G. Wen, "Topological order: from long-range entangled quantum matter to an unification of light and electrons" *ISRN Condensed Matter Physics*, (2013). Article ID 198710, 20 pages.
9. M. Levin and X. G. Wen "Detecting topological order in a ground state wave function" *Phys. Rev. Lett.* **96**, 11 (2006) 110405.
10. E. Dennis, A. Kitaev, A. Landahl and J. Preskill, "Topological quantum memory", *J. Math. Phys.* **43**, (2002), 4452
11. A.Y. Kitaev, "Fault-tolerant quantum computation by anyons", *Ann. Phys.*, **303**, (2007) 160502
12. H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, "Topological quantum distillation", *Phys. Rev. Lett.*, **98**, (2007) 160502
13. H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, "Topological computation without braiding", *Phys. Rev. Lett.* **98**, (2007) 160502
14. B. J. Brown, D. Loss, J. K. Pachos, C. N. Self, J. R. Wootton, "Quantum memories at finite temperature", *Rev. Mod. Phys.* **88**, (2016) 045005
15. A Y Kitaev, "Fault-tolerant quantum computation by anyons" *Ann. Phys. (N.Y.)* **2** (2003) 303
16. C. L. Kane and E. J. Male, "Z₂ Topological order and the quantum spin Hall effect", *Phys. Rev. Lett.* **95**, (2005) 14
17. S Trebst, P Werner, M Troyer, K Shtengel, and C Nayak, "Breakdown of a topological phase: quantum phase transition in a loop gas model with tension", *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070602.
18. J Vidal, S Dusuel, and K P Schmidt, "Low-energy effective theory of the toric code model in a parallel magnetic field" *Phys. Rev. B* **79** (2009) 033109.

19. J Vidal, R Thomale, K P Schmidt, and S Dusuel, “Self-duality and bound states of the toric code model in a transverse field”, *Phys. Rev. B* **80** (2009) 081104
20. I S Tupitsyn, A Kitaev, N V Prokofev, and P C E Stamp, “Topological multicriticalpoint in the phase diagram of the toric code model and three-dimensional gauge higgs model”, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 085114.
21. F Wu, Y Deng, and N Prokof'ev, “Phase diagram of the toric code model in a parallel magnetic field”, *Phys. Rev. B* **85** (2012) 195104.
22. M H Zarei, “Robustness of topological quantum codes: Ising perturbation” *Phys. Rev. A* **91**, 2 (2015) 022319.
23. M H Zarei, “Strong-weak coupling duality between two perturbed quantum many-body systems: Calderbank-Shor Steane codes and Ising-like systems”, *Phys. Rev. B* **96** (2017) 165146.
24. M H Zarei and A Montakhab, "Phase transition in a noisy Kitaev toric code model" *Phys. Rev. A* **99** (2019) 052312
25. C Castelnovo and C Chamon, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 054433.
26. A. Jamadagni, H. Weimer, A. Bhattacharyya, "Robustness of topological order in the toric code with open boundaries", *Phys. Rev. B* **98** (2018), 235147
27. A. Hama and D. A. Lidar, “Adiabatic preparation of topological order”, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 030502
28. S. Dusuel, M. Kamfor, R. Orus, K. P. Schmidt, and J. Vidal, “Robustness of a perturbed topological phase”, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 107203.
29. S. Dusuel, M. Kamfor, R. Orus, K. P. Schmidt, and J. Vidal, “Robustness of a perturbed topological phase”, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 107203.
30. H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, “Quantum measurements and gates by code deformation”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 9. (2009).
31. H. Bombin, "Gauge color codes: optimal transversal gates and gauge fixing in topological stabilizer codes", *New J. Phys.* **17** (2015) 083002.
32. H. Bombin and M. A. Martin-Delgado, “Exact topological quantum order in $D=3$ and beyond: Branyons and brane-net condensates”, *Phys. Rev. B* **75** (2007) 075103.
33. S. Bravyi, R. Konig, “Classification of topologically protected gates for local stabilizer codes” *Phys. Rev. Lett.* **110**, (2013) 170503.
34. A. Kubica, B. Yoshida, and F. Pastawski, “Unfolding the color code”, *New J. Phys.* **17** (2015) 083026.
35. A. B. Alosious and P. K. Sarvepalli, “Projecting threedimensional color codes onto three-dimensional toric codes”, *Phys. Rev. A* **98**, (2018) 012302.
36. A. Kubica and N. Delfosse, Efficient color code decoders in $d \leq 2$ dimensions from toric code decoders, arXiv preprint arXiv:1905.07393 (2019).
37. H. Bombin, G. Duclos-Cianci, and D. Poulin, “Universal topological phase of 2D stabilizer codes”, *New J. Phys.*, **14** (2012) 073048.
38. N. Delfosse, “Decoding color codes by projecting onto surface codes”. *Phys. Rev. A* **89** (2014) 012317.
39. A. B. Alosious and P. K. Sarvepalli, “Erasure decoding of two-dimensional color codes”, *Phys. Rev. A* **100**, (2019) 042312
40. A. Bhagoji and P. Sarvepalli, “Equivalence of 2d color codes (without translational symmetry) to surface codes”, *2015 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, (1):1109-1113, (2015)
41. M. H. Zarei, “Quantum phase transition from $Z_2 \times Z_2$ to Z_2 topological order”, *Phys. Rev. A*, 93(4), 042306 (2016).
42. M. H. Zarei, M. R. Haghghi “Layer-by-layer disentangling two-dimensional topological quantum codes” *Phys. Rev. B* **108** (2023) 035116.
43. P. Parrado-Rodriguez, M. Rispler, and M. Muller, “Rescaling decoder for 2D topological quantum color codes on 4.8.8 lattices,” *Phys. Rev. A* **106**, (2021) 032431.
44. A. J. Landahl and C. Ryan-Anderson, “Quantum computing by color code lattice surgery” arXiv: 1407.5103 (2014).
45. D. Amaro, J. Bennett, D. Vodola and M. Muller, “Analytical percolation theory for topological color codes under qubit loss”, *Phys. Rev A* **101** (2020) 032317.