

اثرات ناهمدوسی بر اطلاعات فیشر کوانتومی در حالت‌های W چند کیوبیتی

توفیق همایون و کوروش آقاییار

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

پست الکترونیکی: t.homayun@urmia.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۷/۰۱/۲۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۲/۲۱)

چکیده

اطلاعات فیشر کوانتومی مربوط به یک پارامتر، میزان حساسیت حالت را نسبت به تغییر آن پارامتر مشخص می‌کند. در این مقاله ما اطلاعات فیشر کوانتومی را برای حالت خالص W برای چهار، پنج، شش و هفت ذره را در کانال‌های ناهمدوسی از قبیل میرایی دامنه، میرایی فاز و کانال واقطیش مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از نمایش کراوس برای مؤلفه‌های کانال‌های ناهمدوسی، اطلاعات فیشر کوانتومی را به صورت کاملاً تحلیلی بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که برای حالت خالص W میزان اطلاعات فیشر کوانتومی و در نتیجه میزان درهم‌تنیدگی با اعمال نوفه‌های کوانتومی، که به طور یکسان هر یک از ذرات را تحت تأثیر قرار می‌دهند، کاهش یافته و در بعضی مواقع برای افزایش نسبی در میزان اطلاعات فیشر کوانتومی به ازای مقادیری خاصی از ضریب واپاشی، p است. همچنین نشان می‌دهیم که نوفه میرایی فاز باعث صفر شدن اطلاعات فیشر کوانتومی برای حالت خالص W می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اطلاعات فیشر کوانتومی، درهم‌تنیدگی، حالت W ، وادوسی

۱. مقدمه

اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی می‌توان به معیار تلاقی، آنتروپی، نگاتیویته و... اشاره کرد [۵-۷]. درهم‌تنیدگی در دستگاه‌های بس‌ذره‌ای از مباحث مورد توجه محققان در سال‌های اخیر بوده است [۸ و ۹] که در اطلاعات کوانتومی [۱۰-۱۲]، فرابرد کوانتومی [۱۳-۱۵]، کد گذاری چگال [۱۶] و... کاربرد دارد. اطلاعات فیشر کوانتومی که در اطلاعات فیشر کلاسیکی در دنیای کوانتومی است [۱۷ و ۱۸] یکی از روش‌های مطالعه درهم‌تنیدگی در دستگاه‌های چند ذره‌ای است [۱۹-۲۲]. در سال‌های اخیر نشان داده شده است که مقدار اطلاعات فیشر

درهم‌تنیدگی یکی از ویژگی‌های اساسی مکانیک کوانتومی است که نمایگر تمایز موجود بین کلاسیک و کوانتوم است [۱]. اندازه‌گیری و مطالعه خواص درهم‌تنیدگی در دستگاه‌های کوانتومی از مباحث قابل توجه در علم مکانیک کوانتومی، اطلاعات و محاسبات کوانتومی است که می‌توان به بازی‌های کوانتومی [۲] و مدارهای کوانتومی [۳] اشاره کرد. در دستگاه‌های دوتایی با هر نوع برهم‌کنشی، اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی ممکن است [۴]. از جمله سنج‌های مهم

۲. نظریه مسئله

همان طور که در بخش مقدمه توضیح داده شد، از کاربردهای مهم اطلاعات فشر کوانتومی تخمین فاز نامعین به کمک آن است. هنگامی که دستگاه یک تحویلی را تجربه می‌کند چگالی حالت دستگاه ρ به حالت $\rho e^{i\theta\hat{A}} e^{-i\theta\hat{A}}$ ، که وابسته به فاز نامعین θ و عملگر \hat{A} دارد، تبدیل می‌شود. عدم قطعیت در اندازه‌گیری فاز و ارتباط آن با اطلاعات فشر کوانتومی با رابطه زیر داده می‌شود [۲۶ و ۲۷].

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{\sqrt{m F}} \geq \frac{1}{\sqrt{m F_Q}}, \quad (1)$$

در این جا m تعداد اندازه‌گیری‌های مستقل را نشان می‌دهد. در حالت خاص فرض می‌کنیم که عملگر \hat{A} همان عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای باشد که برای دستگاه‌های اسپینی داریم

$$J_{\vec{n}} = \sum_{i=x,y,z} \frac{1}{2} n_i \sigma_i, \quad (2)$$

طبق مراجع [۳۱-۳۳] اطلاعات فشر کوانتومی برای ماتریس چگالی حالت ρ با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$F_Q(\rho, J_n) = 2 \sum_{i \neq j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{(\lambda_i + \lambda_j)} \left| \langle \varphi_i | J_n | \varphi_j \rangle \right|^2, \quad (3)$$

که λ_i ها و φ_i ها ویژه مقادیر و ویژه توابع متناظر ماتریس چگالی اولیه ρ هستند.

همان طور که در بخش مقدمه اشاره شد مقدار فشر کوانتومی برای حالت‌های جدایی‌پذیر و درهم‌تنیده متفاوت است. با استفاده از این تفاوت مقداری در فشر کوانتومی می‌توان از آن به‌عنوان معیاری برای درهم‌تنیدگی نام برد. برای مولد انتقال فاز خطی، رابطه (۲)، در یک دستگاه N -تایی [۲۴] اگر دستگاه جدایی‌پذیر باشد آنگاه داریم

$$F_Q[\rho, J_n] \leq N. \quad (4)$$

و اگر دستگاه درهم‌تنیده باشد خواهیم داشت

$$F_Q[\rho, J_n] \leq N^2, \quad (5)$$

بنابراین ناحیه $N < F_Q[\rho, J_n] \leq N^2$ ناحیه درهم‌تنیدگی دستگاه را نشان می‌دهد. همچنین برای حالت‌های جدایی‌پذیر و درهم‌تنیده به ترتیب قیود زیر بر مجموع فشر کوانتومی حاکم است

کوانتومی برای حالت‌های درهم‌تنیده و جدایی‌پذیر متفاوت است [۲۳ و ۲۴]. اطلاعات فشر کوانتومی کمیتهی مهم در تعیین دقت اندازه‌گیری در اندازه‌گیری کمیت‌های مجهول در مسئله است [۲۵-۲۷]. به عنوان مثال هنگامی که دستگاهی تحول دورانی با فاز مجهول را تجربه می‌کند با اندازه‌گیری اطلاعات فشر کوانتومی می‌توان دقت در اندازه‌گیری فاز و میزان اطلاعاتی که از دستگاه می‌توان به دست آورد را تعیین کرد.

مسئله دیگری که مورد توجه محققان در سال‌های اخیر بوده است، موضوع نوفه‌های کوانتومی و تأثیر آن در اطلاعات فشر کوانتومی است [۲۸-۳۰]. نوفه‌ها همواره عامل از دست رفتن اطلاعات در دستگاه‌های کوانتومی هستند، و مطالعه آنها همواره مورد توجه هستند.

در این مقاله ما برای اولین بار، اطلاعات فشر کوانتومی را برای حالت خالص W برای چهار، پنج، شش و هفت ذره در کانال‌های کوانتومی میرایی دامنه، میرایی فاز و کانال واقطبش مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از نمایش کراوس برای مؤلفه‌های کانال‌های وادوسی، اطلاعات فشر کوانتومی را به صورت کاملاً تحلیلی بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم برای مسئله مورد نظر، میزان اطلاعات فشر کوانتومی و در نتیجه میزان درهم‌تنیدگی با اعمال نوفه‌های کوانتومی که به طور یکسان و مشابه هر یک از ذرات را تحت تأثیر قرار می‌دهند، کاهش یافته و در بعضی مواقع درای افزایش نسبی در میزان اطلاعات فشر کوانتومی به ازای مقادیری خاصی از ضریب واپاشی p است. در بخش اول این مقاله مروری کوتاه به اطلاعات فشر کوانتومی و قیود حاکم بر مقادیر آن در حالت‌های جدایی‌پذیر و درهم‌تنیدگی را خواهیم داشت. در ادامه این بخش حالت خالص W را برای دستگاه چهار، پنج، شش و هفت‌تایی معرفی کرده و اطلاعات فشر آن را محاسبه می‌کنیم. در بخش دوم نوفه‌های کوانتومی میرایی دامنه، میرایی فاز و واقطبش را معرفی کرده و تأثیر آن بر دستگاه مورد مطالعه را بررسی خواهیم کرد. در بخش آخر به بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

جدول ۱. اطلاعات فیشر کوانتومی برای حالت خالص W به ازای تعداد ذرات چهار تا هفت. ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد ذرات بیشینه مقدار فیشر نیز افزایش می‌یابد ولی نسبت آن به تعداد ذره تقریباً تغییر چندانی نمی‌کند.

N	$F(\rho, J_x)$	$F(\rho, J_y)$	$F(\rho, J_z)$	$\sum_{n=x,y,z} F_Q[\rho, J_n]$	\bar{F}_{\max}
۴	۱۰	۱۰	۰	۲۰	$\frac{5}{2}$
۵	۱۳	۱۳	۰	۲۶	$\frac{13}{5}$
۶	۱۶	۱۶	۰	۳۲	$\frac{8}{3}$
۷	۱۹	۱۹	۰	۳۸	$\frac{19}{7}$

آورده شده است.

طبق نتایج ارائه شده در جدول ۱ و با توجه به روابط (۴) تا (۷) فیشر کوانتومی درهم‌تنیدگی را می‌تواند آشکار کند. بنابراین می‌توان فیشر را به عنوان سنج‌ای برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی به کار برد. در ادامه به بررسی اثرات نوفه‌های کوانتومی میرایی دامنه، میرایی فاز و واقطبش می‌پردازیم.

۳. کانال کوانتومی

در این بخش تأثیر کانال میرایی دامنه، میرایی فاز و واقطبش را بر فیشر کوانتومی مطالعه خواهیم کرد. فرض خواهیم کرد که اجزای دستگاه اثرات ناهمدوسی یکسانی را تجربه می‌کنند. هنگامی که دستگاهی تحت تأثیر کانال‌های ناهمدوسی قرار گیرد حالت تبدیل یافته خواهد شد

$$\varepsilon(\rho) = \sum_k M_k \rho M_k^\dagger, \quad (16)$$

که M_k عملگرهای کراوس هستند و در رابطه تمامیت، $\sum_k M_k^\dagger M_k = \mathbb{I}$ ، صدق می‌کنند [۱ و ۱۰].

۴. کانال میرایی دامنه

میرایی دامنه [۱ و ۱۰] توصیف می‌کند که چگونه یک دستگاه کوانتومی به محیط پیرامون خود انرژی می‌دهد. برای تک کیوبیت عملگرهای کراوس

$$M_0 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|, \quad M_1 = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|, \quad (17)$$

p احتمال واپاشی از $|1\rangle$ به $|0\rangle$ است. تأثیر کانال میرایی دامنه

$$\sum_n F_Q[\rho, J_n] \leq N \quad (6)$$

و

$$\sum_n F_Q[\rho, J_n] \leq N(N+2) \quad (7)$$

که $n = x, y, z$ است.

بیشینه مقدار فیشر کوانتومی به ازای واحد ذره یکی از پرکاربردترین تعاریف و روند در مطالعه و بررسی فیشر است.

طبق مرجع [۳۴] می‌توان نوشت

$$\bar{F}_{\max}(\rho) = \frac{c_{\max}}{N} \quad (8)$$

که طبق تعریف c_{\max} بزرگ‌ترین ویژه مقدار ماتریس $C_{3 \times 3}$ است که عناصر ماتریسی زیر را دارد

$$C_{k,l} = \sum_{i \neq j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{(\lambda_i + \lambda_j)} \langle \varphi_i | J_k | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | J_l | \varphi_i \rangle + \langle \varphi_i | J_l | \varphi_j \rangle \langle \varphi_j | J_k | \varphi_i \rangle, \quad (9)$$

$\bar{F}_{\max}(\rho) \leq 1$ جدایی‌پذیر بودن حالت‌های دستگاه را نشان می‌دهد و مقادیر بزرگ‌تر از واحد، درهم‌تنیدگی را نشان می‌دهند.

حالت خالص W برای دستگاه N ذره‌ای به صورت زیر

نمایش داده می‌شود

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \{ |100\dots 0\rangle + |0100\dots 0\rangle + \dots + |000\dots 1\rangle \}, \quad (10)$$

برای حالت‌های خالص اطلاعات فیشر کوانتومی به رابطه عدم قطعیت (واریانس) تقلیل می‌یابد به طوری که

$$F(\rho, J_n) = \varphi (\Delta J_n)^2 = \varphi \left(\langle J_n^2 \rangle - \langle J_n \rangle^2 \right), \quad (11)$$

در جدول ۱ اطلاعات فیشر کوانتومی به ازای $N = 4, 5, 6, 7$

جدول ۲. اطلاعات فیشر کوانتومی برای حالت خالص W به ازای تعداد ذرات چهار تا هفت در کانال میرایی دامنه.

N	$F(\rho, J_x) = F(\rho, J_y)$	$F(\rho, J_z)$	$\sum_{n=x,y,z} F_Q[\rho, J_n]$	\bar{F}_{\max}
۴	$4(1-2p)^2$	۰	$8(1-2p)^2$	$(1-2p)^2$
۵	$5(1-2p)^2$	۰	$10(1-2p)^2$	$(1-2p)^2$
۶	$6(1-2p)^2$	۰	$12(1-2p)^2$	$(1-2p)^2$
۷	$7(1-2p)^2$	۰	$14(1-2p)^2$	$(1-2p)^2$

ناشی از میرایی فاز است. در اثر این نوفه حالت ورودی دستگاه یک انتقال فازی را تجربه می‌کند که در اثر این انتقال فاز $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$ و $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ با احتمال p صورت می‌پذیرد [۱ و ۱۰]. بنابراین عمگر کراوس برای تک اسپین خواهد شد

$$\begin{aligned} M_0 &= \sqrt{1-p} \mathbb{I}, \\ M_1 &= \sqrt{p} |0\rangle\langle 0|, \\ M_2 &= \sqrt{p} |1\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (18)$$

ویژه مقدارهای غیرصفر W_N در کانال میرایی فاز در جدول ۳ آورده شده است. در اثر اعمال میرایی فاز بر دستگاه مورد مطالعه فیشر متوسط دارای مقدار صفر می‌شود. بنابراین کانال میرایی فاز را می‌توان به عنوان عامل از بین برنده فیشر برای حالت‌های W معرفی کرد.

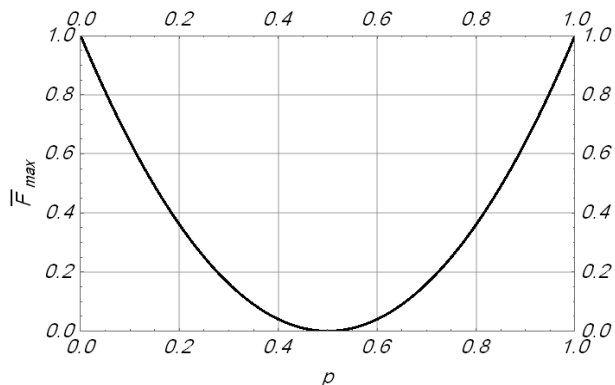
۶. کانال واقطبش

هنگامی که یک دستگاه کوانتومی d ترازوی متحمل نوفه واقطبش گردد با احتمال p به حالت $\frac{\mathbb{I}}{d}$ که بیشینه درهم‌تنیده‌گی را دارد نگاهت می‌شود و همچنین با احتمال $1-p$ بدون تغییر باقی می‌ماند. با این توصیف عمگر کراوس برای توصیف این نگاهت خواهند شد [۱ و ۱۰]

$$\begin{aligned} E_0 &= \sqrt{1-\frac{3p}{4}} \mathbb{I}, & E_1 &= \sqrt{\frac{p}{4}} \sigma_x, \\ E_2 &= \sqrt{\frac{p}{4}} \sigma_y, & E_3 &= \sqrt{\frac{p}{4}} \sigma_z, \end{aligned} \quad (19)$$

نتایج مربوط به کانال واقطبش و نحوه رفتار فیشر متوسط به صورت نمادین در شکل ۲ آورده شده است.

کانال واقطبش نیز به مثابه میرایی فاز باعث نزولی یکنواخت در مقدار فیشر متوسط می‌شود ولی نکته قابل توجه در این مورد صفر شدن فیشر به ازای $p \approx 0.9$ است. به وضوح مشاهده



شکل ۱. فیشر متوسط برای حالت خالص W در کانال میرایی دامنه.

بر حالت اولیه W_N مستقل از تعداد ذرات آن است به طوری که ویژه مقادیر غیرصفر ماتریس چگالی نگاهت یافته $\varepsilon(p)$ برای هر تعداد از ذره مقادیر $\lambda_1 = 1-p$ و $\lambda_2 = p$ هستند. در جدول ۲ نتایج مربوط به محاسبات به اطلاعات فیشر کوانتومی با فرض این که تمام ذرات به طور یکسان تحت تأثیر نوفه میرایی دامنه قرار گرفته‌اند را آورده‌ایم.

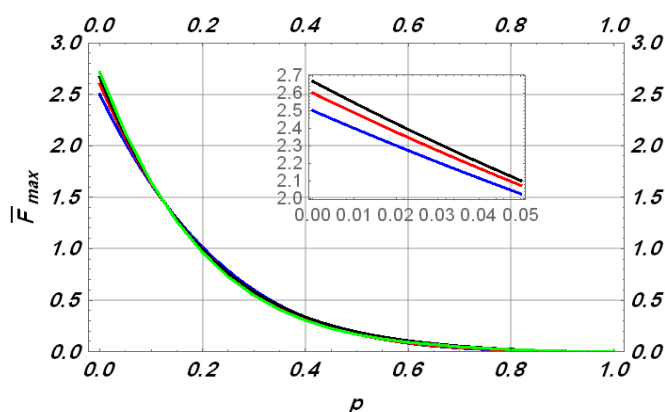
شکل ۱ نشان می‌دهد که فیشر متوسط (بیشینه مقدار فیشر به ازای واحد ذره) مستقل از تعداد ذرات است و برای هر ذره‌ای دارای مقدار $(1-2p)^2$ است. ملاحظه می‌شود که ابتدا با افزایش مقدار p فیشر متوسط کاهش می‌یابد و تا $p = 0.5$ این کاهش ادامه دارد. با دقت کردن در شکل مشاهده می‌شود که بعد از $p = 0.5$ مقدار فیشر متوسط حالت صعودی پیدا می‌کند به طوری که از $p = 1$ به مقدار اولیه خود یعنی مقدار واحد می‌رسد.

۵. کانال میرایی فاز

در مواردی دستگاه کوانتومی اطلاعاتی را از دست می‌دهد که

جدول ۳. ویژه مقادیر غیرصفر $\varepsilon(\rho)$ در کانال میرایی فاز به ازای تعداد ذرات مختلف.

تعداد ذرات	ویژه مقادیر غیرصفر
۴	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}(2p - p^2), \quad \lambda_4 = \frac{1}{4}(4 - 6p + 3p^2)$
۵	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{5}(2p - p^2), \dots, \lambda_5 = \frac{1}{5}(5 - 8p + 4p^2)$
۶	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \frac{1}{6}(2p - p^2), \dots, \lambda_6 = \frac{1}{6}(6 - 10p + 5p^2)$
۷	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \frac{1}{7}(2p - p^2), \dots, \lambda_7 = \frac{1}{7}(7 - 12p + 6p^2)$



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) اطلاعات فیشر کوانتومی برای حالت خالص W به ازای تعداد ذرات چهار تا هفت در کانال واقطبش. رنگ آبی مربوط به چهار، رنگ قرمز مربوط به پنج، رنگ سیاه مربوط به شش و رنگ سبز مربوط به هفت ذره است.

لذا فیشر را می‌توان به عنوان سنجه درهم‌تنیدگی نیز معرفی کرد. در ادامه فرض کردیم که دستگاه تحت تأثیر نوفه‌های کوانتومی میرایی دامنه، میرایی فاز و واقطبش قرار بگیرد. به طور کاملاً تحلیلی تأثیر نوفه‌های کوانتومی بر فیشر را بررسی و مطالعه کردیم. نشان دادیم که متوسط فیشر که به صورت بیشینه مقدار فیشر بر تعداد ذرات تعریف می‌شود، در اثر اعمال این نوفه‌ها تغییراتی نشان می‌دهد. نشان دادیم که برای حالت مذکور، میرایی دامنه ابتدا باعث کاهش فیشر متوسط و سپس سبب افزایش آن می‌شود در حالی که میرایی فاز مقدار فیشر متوسط را صفر می‌کند و کانال واقطبش با افزایش ضریب واپاشی p ، سبب کاهش فیشر متوسط می‌شود.

می‌شود که بعد از $p \approx 0.2$ درهم‌تنیدگی از بین رفته و با نزدیک شدن ضریب واپاشی به مقدار یک، مقدار متوسط فیشر نیز به صفر می‌کند. به عبارتی دقیق‌تر کانال واقطبش به عنوان از بین برنده فیشر برای حالت‌های W_N می‌تواند معرفی شود.

۷. نتیجه‌گیری

به طور خلاصه، در این جا دستگاه فیزیکی شامل $N = 4, 5, 6, 7$ ذره را که در حالت اولیه W_N در نظر گرفتیم اطلاعات فیشر کوانتومی را برای این حالت‌های محاسبه کردیم و نشان دادیم که فیشر کوانتومی درهم‌تنیدگی این حالت‌ها مشخص می‌کند

مراجع

12. O Ghne, G Tth, and H J Briegel, *New Journal of Physics* **7** (2005) 229.
13. Y Yeo, *Phys. Rev. A* **68** (2003) 022316.
14. S Bose, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 207901.
15. J P Barjaktarevic *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 230501.
16. L Qiu, A M Wang, and X S Ma, *Physica A* **383** (2007) 325.
17. O E Barndorff-Nielsen and R D Gill, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **33** (2000) 4481.
18. I Apellaniz *et al.*, *Phys. Rev. A* **95** (2017) 032330.
19. L Pezzé and A Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 100401.
20. N Li and S Luo, *Phys. Rev. A* **88** (2013) 014301.
21. S S Mirkhalaf and A Smerzi, *Phys. Rev. A* **95** (2017) 022302.
22. Y Hong, S Luo, H Song, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 042313.
23. G Tóth, *Phys. Rev. A* **85** (2012) 022322.
24. P Hyllus *et al.*, *Phys. Rev. A* **85** (2012) 022321.
25. S L Braunstein and C M Caves, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 3439.
26. C W Helstrom, *Journal of Statistical Physics* **1** (1969) 231.
27. A S Holevo, “*Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*”, New York, Amsterdam (1982).
28. F Ozaydin, *Phys. Lett. A* **378** (2014) 3161.
29. F Chapeau-Blondeau, *Phys. Lett. A* **381** (2017) 1369.
30. D Hosler and P Kok, *Phys. Rev. A* **88** (2013) 052112.
31. S Luo, “*Wigner-Yanase Skew Information vs. Quantum Fisher Information*”, Proceedings of the American Mathematical Society **132** (2004) 885.
32. G Tóth and I Apellaniz, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47** (2014) 424006.
33. S L Braunstein, C M Caves, and G Milburn, *Annals of Physics* **247** (1996) 135.
34. J Ma, Y-x Huang, X Wang, and C P Sun, *Phys. Rev. A* **84** (2011) 022302.
1. M Nakahara and T Ohmi, “*Quantum Computing: from Linear Algebra to Physical Realizations*”, CRC Press (2008).
۲. س رشیدی و هـ گودرزی، مجله پژوهش فیزیک ایران **۱۶**، ۱ (۱۳۹۵) ۱۱۱.
2. S Rashidi and H Goudarzi, *Iranian Journal of Physics Research* **16**, 1 (2016) 111.
۳. ع شکری و م شلیله، مجله پژوهش فیزیک ایران **۱۳**، ۳ (۱۳۹۲) ۲۴۱.
3. A Shokri and M Shalileh, *Iranian Journal of Physics Research* **13**, 3 (2013) 241.
۴. ن غفوریان مومن رضوی، ع آهانج و م سربیشه‌ای، مجله پژوهش فیزیک ایران **۱۵**، ۴ (۱۳۹۴) ۴۱۵.
4. N Ghafourian Momen Razavi, A Ahanj and M Sarbishei, *Iranian Journal of Physics Research* **15**, 4 (2016) 415.
۵. ر افضلی، م صالح کوتاهی و ج سبجانی، مجله پژوهش فیزیک ایران **۱۲**، ۴ (۱۳۹۱) ۱۳۹۱.
5. R Afzali, M Saleh kotahi, and J Sobhani, *Iranian Journal of Physics Research* **12**, 2 (2013) 289.
6. R Horodecki, P Horodecki, M Horodecki, and K Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 865.
7. W K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2245.
8. J Audretsch, “*Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics*”, John Wiley & Sons (2008).
9. L Amico, R Fazio, A Osterloh, and V Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 517.
10. M A Nielsen and I L Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information*”, Cambridge University press (2010).
11. M C Arnesen, S Bose, and V Vedral, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 017901.