

برهم کنش هیدرودینامیکی دو کره در حضور گرادیان دما، اثر هم‌پستگی میان حرکت دو ذره بر ضریب سره

گلناز نجفی گل‌وندانی^۱، فرشته سالاری^۱، و سید نادر رسولی^۲

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گیلان، رشت

۲. پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی (IPM)، تهران

پست الکترونیکی: gnajafig@phd.guilan.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۲۳؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۷/۰۸)

چکیده:

برای روشن شدن تأثیر ساختار داخلی مولکول‌ها در اثر سره، ما به بررسی اعمال گرادیان دما به یک تک ذره شناور در سیال می‌پردازیم. تک ذره مورد بررسی با دو ریز کره که با فنر نرمی به یکدیگر متصل شده‌اند، یا به صورت جداگانه در دام دو انبرک نوری قرار گرفته‌اند، مدل شده است. ما نیرویی که این مجموعه دو کره‌ای در حضور گرادیان دما، به سیال پیرامون خود وارد می‌کند را محاسبه کرده، و با استفاده از آن ضریب سره مربوط به این مدل دو ذره‌ای را به دست می‌آوریم. در گام بعدی، وابستگی گرانشی سیال به دما را در محاسبات وارد کرده، و اثر این تصحیح را بر نتایج خود بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گرادیان دما، اثر سره، محلول کلئیدی، وابستگی دمایی گرانشی، برهم‌کنش هیدرودینامیکی، معادله لانژون

۱. مقدمه

به دلیل دمای غیریکنواخت تغییر می‌کنند. در نتیجه، نتایج ترمودینامیک تعادلی از جمله یکنواختی چگالی متوسط، نیز لزوماً مشاهده نمی‌شوند [۲].

پاسخ چگالی یک محلول به اعمال گرادیان دما - به احترام دانشمند سوئسی شارل سره^۱ - اثر سره یا دماپخش^۲ نامیده می‌شود [۳]. دلیل این نام‌گذاری مطالعات وسیعی است که شارل سره در نیمه دوم قرن نوزدهم در مورد چگالی محلول آب+نمک طعام در حضور گرادیان دما انجام داده است [۴ و ۵]. هرچند سابقه کار دقیق روی این پدیده حداقل به ۲۵ سال پیش‌تر از سره و مطالعات کارل لودیگ، فیزیولوژیست آلمانی بازمی‌گردد [۶]، و به همین دلیل این اثر گاهی اثر لودیگ-سره نیز گفته می‌شود. اما متغیری که برای بررسی کمی چگالی

اعمال گرادیان دما به یک محلول چندتایی موجب خروج آن از شرایط تعادل ترمودینامیکی می‌شود. یکی از ساده‌ترین نتایج خروج از تعادل ترمودینامیکی، برهم‌خوردن چگالی اولیه ذرات در محلول است. در غیاب یک برهم‌کنش بلندبرد داخلی یا میدان خارجی، تعادل ترمودینامیک به معنای چگالی یکنواخت برای مواد تشکیل دهنده محلول است. می‌توان این یکنواختی را با پیشینه‌کردن آنتروپی مجموعه، به سادگی فهمید [۱]. اما وقتی دمای محلول از یک‌سوی آن به دیگر سو تغییر می‌کند، تعریف تعادلی آنتروپی دیگر قابل استفاده نیست، در واقع معادلات پایه‌ای که پیشینه‌شدن آنتروپی از آنها نتیجه شده بود،

غیریکنواخت محلول/حلال در حضور گرادیان دما اندازه‌گیری/محاسبه می‌شود، به ضریب سُرهِ مشهور است [۲]. پس از لودینگ و سُرهِ، این اثر در طیف وسیعی از محلول‌ها، مانند محلول‌های دوتایی [۷]، محلول‌های پلیمری [۸-۱۰]، کلئیدی [۱۱-۱۴] و ... مورد مطالعه قرار گرفت. اما جالب است که علیرغم گذشت حدود ۱۶۵ سال از بررسی کمی و دقیق این اثر، هنوز سازوکار آن محل بحث و حتی مناقشه علمی است [۱۴ و ۱۵].

یکی از ساده‌ترین مثال‌های مورد بررسی در اثر سُرهِ، محلول‌های دوتایی مانند آب + الکل، بنزن + سایکلوهگزان^۱، و ... هستند [۷]. در چنین مثال‌هایی دو ماده به‌خوبی در یکدیگر حل می‌شوند، و در شرایط هم‌دما ترکیبی یکنواخت و همگن را ایجاد می‌کنند. اما زمانی که دمای محلول از یکسو به دیگری می‌تغییر می‌کند، چگالی دو ماده دیگر یکنواخت نمی‌ماند؛ یک ماده بیشتر در ناحیه گرم‌تر و دیگری در ناحیه سردتر جمع می‌شود [۶ و ۱۶]. یک سؤال پایه‌ای برای پژوهشگران، حالت حدی بسیار رقیق در چنین محلول‌هایی است [۷]. یعنی اگر برای مثال چگالی الکل بسیار کمتر از آب باشد، طوری که بتوان مطمئن بود احتمال برهم‌کنش مولکولی مستقیم الکل-الکل بسیار ناچیز است، مسئله به حرکت یک تک مولکول الکل، در آب پیرامون آن فرومی‌کاهد. طبیعی است که اگر در یک آزمایش ذهنی، تک مولکول الکل را برداشته و با یک (یا چند) مولکول آب جایگزین کنیم، اثر سره عملاً ناپدید می‌شود. یعنی ما با ظرفی که در آن تنها مولکول‌های آب قرار دارند مواجه خواهیم بود. اگر چنین ظرفی در معرض گرادیان دما قرار بگیرد، به دلیل تعادل مکانیکی، فشار در سرتاسر آن یکسان خواهد بود [۱۷]. در عین حال، به دلیل تراکم‌ناپذیری آب، چگالی آب نیز در تمام ظرف ثابت خواهد بود [۱۷]. یعنی، آن دسته از مولکول‌های آب که جایگزین مولکول الکل شده‌اند، با احتمال یکسان در هریک از دو ناحیه گرم یا سرد قرار خواهند گرفت. اما زمانی که یک تک مولکول الکل در ظرف آب قرار دارد، احتمال قرار داشتن آن در دو ناحیه سرد و گرم متفاوت می‌شود. یعنی در

حد محلول رقیق، ریشه اثر سره مستقیماً به تفاوت در ساختار مولکول الکل در مقایسه با مولکول‌های آب برمی‌گردد. به‌همین دلیل بخشی از پژوهش در این مورد به‌صورت مشخص به‌بررسی اثر ساختار یا درجات آزادی داخلی مولکول‌های حل‌شده بر اثر سُرهِ اختصاص دارند [۸ و ۱۹]. برای مثال در مورد محلول بنزن+سایکلوهگزان، هردو مولکول بنزن و سایکلوهگزان به لحاظ هندسی تقارن دارند، و در داخل این مولکول‌ها شکست تقارن راست-چپ، یا بالا-پایین رخ نداده‌است که بتوان حرکت یک‌سویه مولکول‌های مربوطه در حضور گرادیان دما را به شکست تقارن در داخل مولکول‌ها نسبت داد. در نتیجه، ریشه پدیده جایی میان تفاوت در درجات آزادی و ساختار داخلی دو مولکول است.

سؤال چالش برانگیزی که بلافاصله طرح می‌شود، این است که آیا می‌توان برای بررسی این پدیده از معادلات مربوط به ماده پیوسته- در این جا نَوی-استوکس^۲ و نیز لانژون^۳- استفاده کرد. دو معادله مذکور با فرض ساختار بسیار ریز سیال، در مقایسه با ذراتی که در آن غوطه‌ور هستند، نگاشته شده‌اند. حال اگر ریشه مسئله سُرهِ مربوط به تفاوت در ساختار مولکولی ماده حل‌شده، با مولکول‌های حلال باشد، آیا این انتظار معقولی است که با استفاده از این معادله‌ها به بررسی اثر سُرهِ پردازیم؟ یا آن‌که باید از ابتدا و مستقیماً با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به بررسی این پدیده پردازیم؟ این چالش آشنایی است که در بسیاری از مسئله‌هایی که با ریزسیال، و مواد حل‌شده‌ای در ابعاد چند نانومتر ($\sim 1\text{nm}$) یا کمتر سروکار دارند، وجود دارد [۲۰]. یک راه ساده برای روبروشدن با این چالش، اعتماد به معادلات مربوط به ماده پیوسته و محاسبه نتایج مربوطه و سپس مقایسه آن‌ها با داده‌های تجربی موجود است. به تجربه دیده شده‌است که در موارد متعددی این مدل‌ها به‌خوبی کار می‌کنند، و می‌توانند بخشی از مشاهدات تجربی را توضیح دهند [۱۲ و ۱۳]، اما در عین حال مواردی هم وجود دارند که برای این‌که بتوان اثر سُرهِ را توصیف کرد، باید یک تصحیح مفهومی یا پدیده‌شناختی را در این معادلات در نظر گرفت [۲۱]؛

۱. Benzene + Cyclohexane

۲. Navier Stokes

۳. Langevin

یکی از مزیت‌های غیربدیهی این مدل‌سازی ساده آن است که علاوه بر مطالعه نظری، می‌تواند به صورت تجربی نیز مورد مطالعه مستقیم قرار بگیرد. یعنی اگر دو کره به ابعاد میکرومتر را با یک فنر نازک و انعطاف‌پذیر به یکدیگر متصل کنیم و درون سیال قرار بدهیم، معادلات حاکم بر حرکت آن‌ها همان معادله‌هایی خواهند بود که اگر دو کره با ابعاد چند نانومتر را با یک برهم‌کنش هماهنگ به یکدیگر مقید کرده و در سیال غوطه‌ور می‌ساختیم. حال آن‌که می‌توان دو کره میکرومتری را در زیر میکروسکوپ دید، و حرکت آن‌ها را ثبت کرد. در نتیجه می‌توان پیش‌بینی‌های نظری چنین مدل‌سازی ساده‌ای را در آزمایشگاه بررسی کرد و سپس نتایج آن در ابعاد میکرومتر را تا ابعاد چند نانومتر تعمیم داد [۲۴].

برای آن‌که بتوان رفتار چنین مدل ساده‌ای را به شکل کامل ثبت کرد، لازم است که دو کره از محدوده دید میکروسکوپ نیز خارج نشوند، این یک محدودیت آزمایشگاهی است. برای همین چه در این مسئله، و چه در خانواده‌ای از مسائل مشابه، پژوهشگران ترجیح می‌دهند با استفاده از چند انبرک نوری^۳ کره‌ها را در آب مقید سازند، تا کره‌ها در ناحیه کانونی میکروسکوپ باقی بمانند، و مکان آن‌ها با دقت قابل ثبت باشد. این قید تجربی، برای طیفی از آزمایش‌هایی که با ریزکره‌های غوطه‌ور در آب انجام شده است، مطرح است؛ و البته محدودیت جدی هم ایجاد نمی‌کند. برای مثال، نخستین آزمایش مربوط به ریزشناگر سه‌کره‌ای که یکی از مشهورترین مدل‌ها برای ساختن ریزشناگر در ابعاد میکرومتر و پایین‌تر است، با سه ریزکره انجام شد که هر کدام به وسیله یک انبرک نوری به دام افتاده بودند [۲۵].

حال آن‌که مدل اولیه این شناگر شامل سه کره‌ای بود که در امتداد یک خط قرار گرفته و به جای تله‌های نوری با دو میله انعطاف‌پذیر به همدیگر متصل شده بودند [۲۶].

براین مبنای مدل مورد بررسی ما مطابق با شکل ۱ دو کره صلب به شعاع a است که هر کدام با یک تله نوری با ضریب سختی یکسان K_S در دو نقطه از فضا مقید شده‌اند. این

تصحیحی که بتواند اثر تقریب میدان میانگین را - که در هنگام استخراج معادلات ماده پیوسته از ساختار گسسته به کار رفته است - جبران کند.

اگر بخواهیم با استفاده از معادلات محیط پیوسته، اثر سره را در یک محلول دوتایی رقیق بررسی کنیم، یک رویکرد ساده استفاده از مدل جرم و فنر غوطه‌ور در سیال است. یعنی مولکول‌های غوطه‌ور را به صورت کره‌های صلبی که به واسطه تعدادی فنر به یکدیگر متصل شده‌اند، در نظر بگیریم. سابقه چنین شکلی از مدل‌سازی - حداقل - به بررسی رفتار مولکول‌های پلیمری در سیال برمی‌گردد. برای مثال، مدل زیم^۱ مدلی است که در آن عناصر تشکیل دهنده یک مولکول پلیمری به صورت کره‌های سختی هستند که به واسطه فنر به یکدیگر متصل شده و یک زنجیره را تشکیل داده‌اند. این مدل می‌تواند بخشی از رفتار تعادلی و ویسکوالاستیک^۲ محلول‌های پلیمری را توصیف کند [۲۲]. البته، این توصیف محدودیت‌هایی دارد و در شرایط غیرتعادلی استفاده از این مدل با محدودیت‌هایی مواجه می‌شود [۲۳].

به عنوان ساده‌ترین مدل برای یک مولکول تنها، که در دریایی از سیال غوطه‌ور است، می‌توان دو کره را که با یک فنر به همدیگر متصل شده‌اند، در نظر گرفت. برهم‌کنش فنی ساده‌ترین شکل از یک برهم‌کنش کلی است که می‌توان میان دو ذره تصور کرد. در غیاب گرادیان دما، این مجموعه، یعنی دو کره متصل با فنر، هیچ حرکت خالصی در جهت موازی یا مخالف گرادیان دما ندارد. دلیل این مطلب تقارن جهت است که هنوز به واسطه یک میدان خارجی شکسته نشده است. اما وجود گرادیان دمای $\vec{T} = (\partial T / \partial x) \hat{x}$ تقارن $x \leftrightarrow -x$ را می‌شکند و می‌تواند موجب حرکت خالص این مجموعه در سیال شود. در این صورت انتظار این است که با بررسی حرکت تصادفی دو کره، که حال به واسطه برهم‌کنش مستقیم فنی، و نیز برهم‌کنش‌های هیدرودینامیکی جفت شده‌اند، بتوان حرکت خالص این مجموعه را در جهت موازی یا مخالف گرادیان دما مشاهده کرد.

۱. Zimm

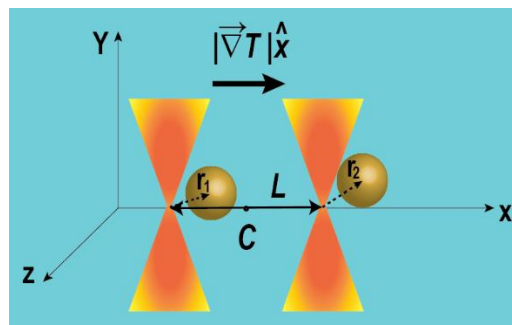
۲. Viscoelastic

۳. Optical tweezer

وقتی میدان خارجی اعمال شده از جنس گرادیان دما باشد، تکرار می‌کنیم. مشخصاً اگر اعمال گرادیان دما به مدل ساده دو کره‌ای ما موجب این شود که نیروی خالصی به سیال وارد شود، می‌توان این محاسبه را به صورت مستقیم به اثر سُرِه، یعنی وقتی دو کره مقید با فنر می‌توانستند آزادانه در سیال حرکت کنند، مرتبط ساخت.

پیشینه تحقیق در مورد کره‌های به دام افتاده در دو دمای مختلف به پژوهش س. چیلیبرتو^۴ و همکارانش در سال ۲۰۱۴ برمی‌گردد. آن‌ها به مطالعه هم‌بستگی دو کره که توسط دو انبرک نوری - در دو دمای مؤثر متفاوت - به دام افتاده بودند، پرداختند [۲۹]. آن‌ها با اعمال یک نیروی تصادفی به یکی از کره‌ها به آن دمای مؤثر بالاتری نسبت دادند [۳۰]. سپس با در نظر گرفتن برهم‌کنش هیدرودینامیکی کره‌ها و حل معادلات لانژون نتایج مربوط به خودهم‌بستگی^۵ هر کره، و نیز هم‌بستگی متقابل^۶ آن‌ها در شرایط تعادل ترمودینامیکی را اصلاح کردند. در نهایت، آن‌ها به محاسبه جریان انرژی منتقل شده از کره گرم‌تر به سردتر پرداختند. اما نیروی خالص وارد شده به سیال، جریان سیال ناشی از گرادیان دما، و نیز ضریب سُرِه متغیرهایی هستند، که اساساً مورد بررسی چیلیبرتو و همکارانش قرار نگرفتند.

ما به طور مشخص سه متغیر ذکر شده را بررسی می‌کنیم. در عین حال، از آن‌جا که وابستگی مکانی دما، موجب وابستگی مکانی گرانیروی سیال است، ما اثر وابستگی دمایی/مکانی گرانیروی سیال را نیز در محاسبات خود لحاظ می‌کنیم. بررسی گرانیروی وابسته به مکان، یکی از مسائل پرتکرار در حوزه مواد نرم و زیستی است. به عنوان مثال میکروشناگرها در طبیعت (سلول‌ها و انواع باکتری‌ها) حین عبور از محیطی با گرانیروی متفاوت تحت تأثیر قرار گرفته و جهت حرکت خود را تغییر می‌دهند [۳۱]. درست مانند انواع گرادیان نوری، شیمیایی، مغناطیسی، دمایی و گرانشی که منجر به حرکت خاص شناگر



شکل ۱. دو کره به شعاع a ، که هریک در یک تله نوری به دام افتاده است. فاصله مرکز دو تله از هم L است و گرادیان دما موازی با خط واصل فرضی دو تله در جهت محور x ها است، $\vec{\nabla}T = (\partial T / \partial x)\hat{x}$

مجموعه را در معرض گرادیان دمای $\vec{\nabla}T = (\partial T / \partial x)\hat{x}$ قرار می‌دهیم. سؤال این است که آیا جفت‌شدگی در حرکت دو کره در حضور گرادیان دما می‌تواند موجب اعمال یک نیروی خالص به سیال و ایجاد یک جریان دائمی در آن بشود؟

سابقه بررسی دو کره که هریک به وسیله یک انبرک نوری مقید شده‌اند، نخست به آزمایش مینرز و کوئیک^۱ در سال ۱۹۹۹ برمی‌گردد [۲۷]. هرچند در آن آزمایش میدان خارجی وجود ندارد، و حرکت تعادلی دو کره بررسی می‌شود. اما اثر برهم‌کنش هیدرودینامیکی به صورت یک هم‌بستگی غیربدیهی میان حرکت دو ذره، خود را نشان داده است. بعد از آن چند آزمایش مشابه برای زمانی که حرکت دو کره از یک الگوی خاص^۲ تعیینی^۲ [۲۸]، یا تصادفی^۳ [۲۹] تبعیت کند، و یا این‌که این مجموعه در معرض جریان سیال قرار داشته باشد [۲۴]، انجام شده است.

در سال ۲۰۱۹ و در همکاری با آزمایشگاه چیکوتا، دو نفر از ما اثر جریان خارجی سیال را بر دو کره مقید شده - به وسیله انبرک نوری - بررسی کردیم [۲۴]. یکی از سئوال‌های مطرح شده در آن پژوهش این بود که آیا میدان خارجی جریان سیال می‌تواند اثر نابدیهی بر نیروی خالصی که دو کره به سیال وارد می‌کنند داشته باشد. حال در این پژوهش ما همین پرسش را

۱. Meiners & Quake
۲. Deterministic
۳. Stochastic
۴. S.Ciliberto
۵. Autocorrelation
۶. Cross-correlation

در این معادله، x_R (یا x_L) جابه‌جایی ریزکره سمت راست (یا چپ) از محل تله نوری مربوطه، $F_{R,x}$ (یا $F_{L,x}$) نیروی هیدرودینامیکی وارد شده به ریزکره سمت راست (یا چپ) و نیز ζ_R (یا ζ_L) نوفه افت‌وخیز کننده وارد شده به ریزکره راست (یا چپ) هستند.

مجموعه دو کره و سیال پیرامون آن‌ها، در معرض گرادیان دمای $\vec{T} = (\partial T / \partial x)\hat{x}$ قرار گرفته است، که $(\partial T / \partial x) > 0$ یعنی اگر دمای نقطه C در وسط دو تله را T بنامیم، دما در محل تله سمت راست $T_R = T + (\partial T / \partial x) \times L/2$ و در محل تله سمت چپ $T_L = T - (\partial T / \partial x) \times L/2$ خواهد بود. این اختلاف دما به معنای تفاوت در شدت افت‌وخیز گرمایی برای دو کره، و نیز تغییر در گرانشی سیال است. با توجه به رفتار کاهشی گرانشی برحسب دما در اغلب سیالات [۳۸ و ۳۹]، گرانشی سیال در محل کره سمت راست کمتر از مقدار آن در محل کره سمت چپ است. تغییر در شدت افت‌وخیز و گرانشی سیال، به طور مستقیم در نیروی هیدرودینامیکی که به دو کره وارد می‌شود، تأثیر می‌گذارد، و تقارن مسئله را می‌شکند. در عین حال، تغییر دما به معنای تغییر در ضریب شکست سیال نیز هست. این یعنی سختی فزنی تله‌های نوری - که اساساً به دلیل تفاوت در ضریب شکست نوری ریزکره‌ها با سیال پیرامون آن‌ها رخ می‌دهد - در میان دو تله متفاوت خواهد بود، $K_{S,R} \neq K_{S,L}$. چون این مدلی ساده برای مسئله دو کره است که با یک فنر با ضریب سختی مشخص به همدیگر متصل شده‌اند، و در آن حالت به دلیل جنس نیروی میان دو کره - که از قانون سوم نیوتن پیروی می‌کند - وابستگی نیرو برحسب جابه‌جایی برای هر دو کره یکسان است. در نتیجه ما در این مسئله، ضریب سختی دو تله را برابر فرض می‌کنیم،

$$K_{S,R} = K_{S,L}$$

در نهایت، تنها برای سادگی و بدون از دست دادن کلیت مسئله، ما خود را به حرکت دو ریزکره در جهت افقی محدود کرده، و

با عناوین مختلف مانند فوتوتاکسی^۱، کموتاکسی^۲ و غیره می‌شوند، وجود گرادیان گرانشی نیز می‌تواند منجر به حرکت ویسکوتاکسی^۳ برای سلول/شناگر زیستی شود. به همین منظور مقالات متعددی به بررسی حرکت تک شناگر غیرفعال^۴ به شکل ریزکره و یا پیکربندی ترکیبی از ریزکره‌ها در گرانشی وابسته به دما/مکان پرداخته‌اند [۳۲-۳۴]. بررسی اثر گرادیان گرانشی روی تانسور اوسین در برهم‌کنش هیدرودینامیکی نیز توسط هلموت لون^۵ و همکارانش حین بررسی اثر ویسکوتاکسی روی شناگرها در سال ۲۰۱۷ انجام شده است [۳۲]. همین‌طور در سال ۲۰۲۲ داس^۶ به حل معادله استوکس در حضور نقاطی با شکسانی متفاوت پرداخت و اختلال ناشی از این گسستگی گرانشی را روی میدان سیال بررسی کرده است [۳۵]. ما نیز با در نظر گرفتن گرادیان گرانشی تلاش می‌کنیم، نیروی خالصی که دو کره مقید شده در مسئله ما به سیال وارد می‌کنند، و نیز ضریب سره مربوط به آن‌ها را اصلاح کنیم.

۲. ساختار مسئله

چنانچه گفته شد، ما دو ریزکره به شعاع a ($a \sim 1 \mu\text{m}$) را که در سیال غوطه‌ورند و با دو تله نوری با سختی برابر K_S به‌دام افتاده‌اند، در نظر می‌گیریم. دو تله روی محور x قرار گرفته‌اند، و به‌اندازه L از یکدیگر فاصله دارند. دمای متوسط این مجموعه حدود دمای اتاق ($298 \text{K} \sim T$) است، و با توجه به گرانشی آب که حدود 10^{-3}kg/ms است، مسئله در حد عدد رینولدز^۷ پایین رخ می‌دهد [۳۶]. این یعنی می‌توانیم از جملات اینرسی در معادلات حرکت صرف نظر کنیم. در نتیجه، معادله حرکت دو کره در جهت x به صورت دو معادله لائون [۳۷] جفت‌شده درمی‌آیند:

$$\begin{aligned} -K_S x_R + F_{R,x} + \zeta_R &= 0, \\ -K_S x_L + F_{L,x} + \zeta_L &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

۱. Phototaxis
۲. Chemotaxis
۳. Viscotaxis
۴. Passive swimmer
۵. Hartmut Löwen
۶. Das
۷. Reynolds number

صفر است. در این صورت برای بررسی اثر ذره $\dot{\mathbf{r}}_i$ بر میدان سرعت سیال، باید معادله

$$-\nabla P(\vec{r}) + \eta \nabla^2 \vec{V}(\vec{r}) = -\vec{f}_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (5)$$

را با شرط مرزی فشار و سرعت صفر در بی‌نهایت حل کرد، که جواب شناخته شده استوکس است، برای فشار:

$$P(\vec{r}) = \vec{f}_i \cdot \vec{r} / (6\pi\eta |\vec{r}|^3), \quad (6\text{-الف})$$

و سرعت سیال:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{\vec{f}_i}{8\pi\eta} \left(\frac{\hat{\mathbf{I}}}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right), \quad (6\text{-ب})$$

به دست می‌آید [۳۶ و ۴۲]. در این رابطه $\hat{\mathbf{I}}$ تانسور همانی است. رابطه (۶-ب) ریشه شکل عمومی تانسور اوسین است که نیروی وارد شده از سوی هر ذره را به سرعت سیال در هر نقطه دلخواه از فضا، و از این طریق به سرعت سیال در مکان ذرات دیگر مربوط می‌سازد. مشخصاً اگر شرط مرزی بدون لغزش روی سطح ریزذرات برقرار باشد، سرعت سیال در محل هریک از ذرات برابر با سرعت همان ذره خواهد بود، و در نتیجه با معادلات جفت شده

$$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} \vec{f}_j, \quad (7)$$

روبرو خواهیم بود که \vec{f}_i سرعت ذره دلخواه $\dot{\mathbf{r}}_i$ ، و \vec{f}_j نیروی هیدرودینامیکی وارد شده از سوی ذره $\dot{\mathbf{r}}_j$ به سیال هستند. به‌طور مشخص عناصر تانسور اوسین را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{6\pi\eta a} & i = j \\ \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{1 + e_{ij} e_{ij}}{r_{ij}} \right) & i \neq j \end{cases}, \quad (8)$$

که r_{ij} اندازه برداری است که هر جفت ذره را به هم وصل می‌کند و e_{ij} بردار یکه در این راستاست.

تصویر ذهنی که به معادله (۷) می‌انجامد، شامل این تقریب است که اولاً ابعاد ریزذرات از هر طول فیزیکی دیگر در مسئله به‌اندازه کافی کوچک‌تر است، در نتیجه می‌توان ذرات را به‌صورت نقاط مادی، و نیروی وارد شده از سوی آن‌ها به سیال را به صورت نیروی نقطه‌ای در نظر گرفت. همچنین گرانیروی

از حرکت سه‌بعدی آن‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم. محاسبات ما که در مورد حرکت دو ریز کره در حضور جریان سیال (یعنی میدان خارجی، جریان سیال است) انجام شده است، این انتظار را تأیید می‌کنند که محدود کردن مسئله به یک بعد، کلیت نتیجه اصلی آن را تغییر نمی‌دهد [۲۴ و ۴۰]. مشخصاً حل مسئله در سه بعد نتیجه‌ای مشابه با حل یک‌بعدی آن دارد، که تنها روی تعداد بیشتری از درجات آزادی جمع خورده است. در نتیجه اندازه متغیرهای مربوطه افزایش یافته است، بی‌آن‌که تغییر علامتی مشاهده شود، یا به‌لحاظ مفهومی تغییری رخ دهد.

۳. نیروهای هیدرودینامیکی و افت‌وخیز گرمایی:

تانسور اوسین ۱

برای حل دو معادله لائزون جفت‌شده، معادله (۱)، لازم است وابستگی نیروهای هیدرودینامیکی و نیز نوفه را بشناسیم. به‌دلیل عدد رینولدز پایین، معادله حاکم بر سیال شکل خطی شده معادله نوی استوکس است [۱۷].

$$-\nabla P + \nabla \cdot (\eta [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T]) = -\vec{f}, \quad (2)$$

در این‌جا، P فشار سیال، η گرانیروی آن، \vec{V} میدان سرعت سیال، و \vec{f} چگالی نیرویی است که به واسطه میدان نیروی خارجی، یا ذرات خارجی معلق در سیال به آن وارد می‌شود. اگر η وابستگی فضایی نداشته باشد با عملگر ∇ جابه‌جا می‌شود، و پس از کمی محاسبه [۱۷] معادله (۱) ساده شده و آنچه به معادله استوکس مشهور است [۴۱]، به دست می‌آید:

$$-\nabla P(\vec{r}) + \eta \nabla^2 \vec{V}(\vec{r}) = -\vec{f}(\vec{r}), \quad (3)$$

برای مسئله N ریزذره معلق در سیال، می‌توان نیروی ناشی از هر ذره را به صورت یک تابع دلتای دیراک در نظر گرفت، و در این صورت چگالی نیروی شکل عمومی:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{i=1, \dots, N} \vec{f}_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (4)$$

را خواهد داشت، که $\vec{f}_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$ نشان دهنده چگالی نیرویی است که ذره $\dot{\mathbf{r}}_i$ در نقطه \vec{r}_i به سیال وارد می‌کند. در مسئله ما سیال تا بی‌نهایت امتداد دارد، و سرعت سیال نیز در بی‌نهایت

تعریف می‌کنیم و خود را به افت‌وخیزهای کوچک یعنی $x_R, x_L \ll L$ محدود می‌کنیم. از طرفی فرض می‌کنیم شعاع دو کره از فاصله بین آن دو خیلی کوچک‌تر باشد، ($r \ll a$). در نهایت می‌توانیم با معکوس کردن تانسور اوسین (پیوست) و بسط دادن روابط تا مرتبه اول نسبت به ε ، نیروی هیدرودینامیکی که هر کره به سیال وارد می‌کند را محاسبه کنیم:

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \varepsilon \pi \eta a \begin{pmatrix} \dot{x}_R - \varepsilon \dot{x}_L \\ \dot{x}_L - \varepsilon \dot{x}_R \end{pmatrix} + \varepsilon \pi \eta a \begin{pmatrix} \varepsilon \frac{x_R - x_L}{L} \dot{x}_L \\ \varepsilon \frac{x_R - x_L}{L} \dot{x}_R \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

در رابطه بالا $\varepsilon = 3a/4L$ ، معیاری از قدرت برهم‌کنش هیدرودینامیکی بین کره‌ها است. نیرویی که به هر کره از سمت سیال وارد می‌شود قرینه نیرویی است که هر کره مطابق با رابطه (۱۲) به سیال وارد می‌کند.

۲.۳. محاسبه هم‌بستگی میان نوفه کره راست با نوفه کره چپ (دو خودهم‌بستگی، و یک هم‌بستگی متقابل)

در شرایط تعادل ترمودینامیکی و در غیاب هر گونه عامل اختلالی خارجی می‌توانیم به کمک قضیه همپاری انرژی به بررسی رفتار آماری نیروی نوفه سیال در محل هر کره، پردازیم. در این شرایط هر کدام از کره‌ها که مقید به فنری با ضریب سختی K_S شده‌اند مستقل از یکدیگر به افت‌وخیز حول نقطه تعادل می‌پردازند

$$\begin{cases} \langle x_R^2(t) \rangle = \langle x_L^2(t) \rangle = k_B T / K_S, \\ \langle x_R(t) x_L(t) \rangle = \langle x_R(t) \rangle \langle x_L(t) \rangle = 0. \end{cases} \quad (13)$$

در حضور گرادیان دمایی $\vec{\nabla} T = (\partial T / \partial x) \hat{x}$ فرض می‌کنیم که هر یک از کره‌ها در دمای مکان خود یعنی T_R و T_L تعادل موضعی حرارتی دارند، یعنی

$$\begin{cases} \langle x_R^2(t) \rangle = k_B T_R / K_S, \\ \langle x_L^2(t) \rangle = k_B T_L / K_S \end{cases} \quad (14)$$

در نتیجه کافی است با حل معادلات جفت شده لانژون به محاسبه متوسط مربع جابه‌جایی هر کره پردازیم و نتیجه را با

ذرات وابستگی مکانی نداشته، و در تمام سیال مقدار مشخصی دارد.

همان‌طور که از رابطه (۷) می‌توان مشاهده کرد، سرعت هر ذره ترکیب خطی است از نیرویی که همان کره به سیال وارد می‌کند به اضافه تصحیح میدان سرعت سیال به واسطه نیروهایی که بقیه ذرات به سیال وارد می‌کنند. یعنی اگر تنها یک تک ذره به سیال نیروی \vec{f} وارد می‌کرد سرعت آن ذره برابر بود با $\vec{v} = \frac{\vec{f}}{\varepsilon \pi \eta a}$ ، اما حضور ذرات دیگر این سرعت را به صورت خطی تصحیح می‌کند.

ما ابتدا مسئله حرکت جفت‌شده دو ذره در حضور گرادیان دما را با همین شکل از تانسور اوسین حل کرده و در مورد نتایج فیزیکی آن بحث می‌کنیم. سپس اثرات ناشی از وابستگی گرانی به مکان را به صورت یک تصحیح مرتبه اول روی نتایج خود بررسی می‌کنیم.

۱.۳. محاسبه نیروی هیدرودینامیکی وارد شده به هر یک از دو کره، برای حالت دلخواه حرکتی

همان‌طور که قبلاً بیان شد، در مسئله مورد بررسی ما مرکز تله‌های نوری روی محور \hat{x} ها واقع شده است و کره‌ها محدود به حرکت در راستای \hat{x} هستند. یعنی نیرویی که هر کره به سیال پیرامون خود وارد می‌کند در راستای خط واصل آن‌ها (محور \hat{x}) است، در نتیجه می‌توان تانسور اوسین را برای این مسئله به صورت یک ماتریس 2×2 نوشت:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix}, \quad (9)$$

که عناصر تانسور فوق عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{22} &= \frac{1}{\varepsilon \pi \eta a}, \\ M_{12} = M_{21} &= \frac{\gamma}{\lambda \pi \eta r}. \end{aligned} \quad (10)$$

می‌توان رابطه (۹) را به صورت

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \left\{ \frac{I}{\varepsilon \pi \eta a} + \frac{1}{\lambda \pi \eta r} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix}, \quad (11)$$

بازنویسی کرد که در آن I تانسور همانی 2×2 است. ما در این مسئله، فاصله بین دو کره را به صورت $r = L + x_R - x_L$

$$\begin{aligned} \cdot &= -K_S \bar{x} - \epsilon \pi \eta a \{ \bar{x} (1 - 2 \epsilon) \\ &+ 2 \epsilon \frac{\Delta x}{L} \dot{\bar{x}} \} + \bar{\zeta}(t), \\ \cdot &= -K_S \Delta x - \epsilon \pi \eta a \{ \Delta \dot{x} (1 + 2 \epsilon) \\ &+ 2 \epsilon \frac{\Delta x}{L} (\Delta \dot{x}) \} + \Delta \zeta(t). \end{aligned} \quad (20)$$

دو معادله بالا این اجازه را به ما می‌دهند که دستگاه معادلات را به صورت اختلالی تا مرتبه دلخواه ϵ حل کنیم. با حفظ تنها جملات خطی بر حسب جابه‌جایی کره‌ها و تعریف $\tau = \gamma / K_S$ و $\gamma = \epsilon \pi \eta a$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x(0) e^{-\frac{t}{\tau(1+2\epsilon)}} \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\Delta \zeta(s)}{\gamma(1+2\epsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1+2\epsilon)}} \right) ds, \end{aligned} \quad (21\text{-الف})$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \bar{x}(0) e^{-\frac{t}{\tau(1-2\epsilon)}} \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\bar{\zeta}(s)}{\gamma(1-2\epsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1-2\epsilon)}} \right) ds. \end{aligned} \quad (21\text{-ب})$$

زمانی که $t \gg \tau$ ، جملات مربوط به شرایط اولیه در جواب‌ها به سمت صفر میل می‌کند، و آن بخش از جواب‌ها باقی می‌مانند که به هم‌بستگی‌ها و متوسط‌های پایای سامانه مربوط می‌شوند. ما ابتدا به محاسبه هم‌بستگی‌ها در غیاب شرایط اولیه می‌پردازیم. سپس بر مبنای آن‌ها رفتارهای پایای مجموعه را محاسبه می‌کنیم.

برای حل عمومی مجموعه معادلات (۲۰)، می‌توان با استفاده از بسط اختلالی بر حسب توان‌های ϵ به حل مراتب بالاتر نزدیک شد

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \epsilon \bar{x}_1 + O(\epsilon^2), \quad (22)$$

$$\Delta x = \Delta x_0 + \epsilon \Delta x_1 + O(\epsilon^2).$$

باید توجه داشت که ما در حین نوشتن معادلات (۲۰) از تانسور اوسینی استفاده کردیم که بسط آن تنها تا مرتبه اول نسبت به ϵ نگه داشته شده بود. بنابراین در بسط جابه‌جایی‌ها نیز توجه می‌کنیم که به این قرارداد پایبند بمانیم. با برگرداندن روابط (۲۲) در معادلات پایه و مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های برابر ϵ ، معادله متناسب با هر مرتبه از اختلال به دست می‌آید. به‌عنوان

رابطه (۱۴) تطبیق دهیم. در این صورت می‌توانیم همبستگی

متقابل بین نوفه سیال در مکان دو کره را به دست آوریم

$$\langle \zeta_R(t) \zeta_L(t') \rangle = 2k_B T_L (-\epsilon \pi \eta a \times 2 \epsilon) \delta(t-t'), \quad (15)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود جمله داخل پرانتز همان عنصر قطر فرعی تانسور اوسین است. یعنی:

$$\langle \zeta_R(t) \zeta_L(t') \rangle = 2k_B T_L \hat{M}_{ij}^{-1} \delta(t-t'), \quad (16)$$

در واقع از آنجایی که نیروی نوفه در بستر سیال شکل گرفته‌است، اثر آن نیز با همان تانسور اوسین منتقل می‌شود. به همین ترتیب همبستگی نیروی نوفه در مکان هر کره عبارت است از:

$$\begin{cases} \langle \zeta_R(t) \zeta_R(t') \rangle = 2k_B T_R (\epsilon \pi \eta a) \delta(t-t'), \\ \langle \zeta_L(t) \zeta_L(t') \rangle = 2k_B T_L (\epsilon \pi \eta a) \delta(t-t') \end{cases} \quad (17)$$

۴. حل معادلات لانژون، بدون وابستگی دمایی گرانروی

در گام نخست از وابستگی دمایی در گرانروی سیال صرف‌نظر می‌کنیم. در این صورت تنها اثر گرادیان دمای غیر صفر به‌صورت تفاوت میان شدت افت و خیز گرمایی در محل دو کره خواهد بود. به منظور نشان دادن این تفاوت، به کمک روابط (۱۲) نیروی هیدرودینامیکی را که به هر کره وارد می‌شود در معادلات رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم. در نتیجه معادلات جفت‌شده لانژون به شکل زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \cdot &= -K_S x_R - \epsilon \pi \eta a \{ (\dot{x}_R - 2 \epsilon \dot{x}_L) \\ &+ 2 \epsilon \frac{x_R - x_L}{L} \dot{x}_L \} + \zeta_R(t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \cdot &= -K_S x_L - \epsilon \pi \eta a \{ (\dot{x}_L - 2 \epsilon \dot{x}_R) \\ &+ 2 \epsilon \frac{x_R - x_L}{L} \dot{x}_R \} + \zeta_L(t), \end{aligned}$$

در حالت هم‌دما، $T_R = T_L$ ، می‌توان دستگاه معادلات (۱۸) را قطری کرد. به این منظور به پایه

$$\begin{cases} \Delta x = x_R - x_L, \bar{x} = (x_R + x_L) / 2 \\ \Delta \zeta = \zeta_R - \zeta_L, \bar{\zeta} = (\zeta_R + \zeta_L) / 2 \end{cases} \quad (19)$$

می‌رویم. در حضور گرادیان دما نیز این پایه‌ها بسیار در حل مسئله کمک‌کننده هستند

$$\langle x_L(t)x_L(t+\Delta t) \rangle =$$

$$\frac{K_B}{2K_S} (T - \frac{T_R - T_L}{2}) (e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}) \quad (27)$$

$$= \frac{K_B T_L}{2K_S} (e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}),$$

همان‌طور که واضح است در حالت هم‌دما، یعنی $T_R = T_L$ ، به نتیجه آشنای مینرز و کوئیک [۳۵] می‌رسیم. می‌توان ملاحظه کرد در حد $\Delta t \rightarrow 0$ ، هر دو تابع نمایی به یک میل می‌کنند، و متوسط افت‌وخیز کره چپ برابر با همان مقداری است که از قضیه همپاری انرژی سراغ داریم

$$\langle x_L^2(t) \rangle = \frac{K_B T_L}{K_S}, \quad (28)$$

اکنون برای محاسبه خودهم‌بستگی کره راست کافی است در رابطه (۲۶) جای شاخص L و R را عوض کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle x_R(t)x_R(t+\Delta t) \rangle =$$

$$\frac{K_B}{2K_S} (T - \frac{T_L - T_R}{2}) (e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} + e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}), \quad (29)$$

همان‌طور که انتظار داریم کره راست که در دمای بالاتری نسبت به کره چپ قرار گرفته است با دامنه بیشتری نسبت به آن افت‌وخیز می‌کند (پرانتر اول در رابطه بالا برابر است با T_R). در گام آخر می‌توانیم هم‌بستگی متقابل بین کره‌ها را به دست آوریم:

$$\langle x_L(t)x_R(t') \rangle =$$

$$\langle \bar{x}(t)\bar{x}(t') \rangle - \frac{1}{4} \langle \Delta x(t)\Delta x(t') \rangle \quad (30)$$

$$+ \frac{1}{4} \langle \bar{x}(t)\Delta x(t') - \bar{x}(t')\Delta x(t) \rangle.$$

با جایگذاری هم‌بستگی‌های مورد نیاز در رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$\langle x_L(t)x_R(t+\Delta t) \rangle =$$

$$\frac{K_B T_L}{2K_S} \times (e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} - e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}}). \quad (31)$$

دوباره با تبدیل L و R به یکدیگر، آخرین وابستگی متقابل به صورت زیر به دست می‌آید:

مثال پاسخ معادله مربوط به جملات مرتبه صفر مربوط به \bar{x} برابر است با ($t \gg \tau$):

$$\bar{x}_1(t) = \int_0^t \frac{\bar{c}_1(s)}{\gamma} e^{-\frac{t-s}{\tau}} ds, \quad (23)$$

با جایگذاری مجدد نتایج مرتبه صفر به روش بازگشتی می‌توان معادله مربوط به \bar{x}_1 را به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\bar{x}}_1 + \frac{1}{\tau} \bar{x}_1 = \gamma (1 - \frac{\Delta x(t)}{L}) (-\frac{\bar{x}_1(t)}{\tau} + \frac{\bar{c}_1(t)}{\gamma}), \quad (24)$$

می‌توان نشان داد اگر در رابطه بالا از جمله $\Delta x(t)$ صرف‌نظر کنیم، و معادله را برای \bar{x}_1 حل کنیم، حاصل همان چیزی می‌شود که اگر رابطه (۲۱-ب) را بر حسب ε بسط دهیم و نتیجه را تا مرتبه اول نگه داریم. این کار معادل این است که در اعلام نتیجه \bar{x} ، تنها خود را به محدود به افت و خیز مربوط به همان متغیر کنیم و از اثر جملات ضربی $\bar{c}_1(t)\Delta c_1(t)$ صرف‌نظر کنیم. تمام این استدلال در مورد متغیر Δx نیز صادق است.

۴.۱. محاسبه هم‌بستگی‌ها

با توجه به تعریف جابه‌جایی نسبی و متوسط کره‌ها می‌توانیم جابه‌جایی هر کره را در فضای حقیقی به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$x_L = \bar{x} - \Delta x / 2, \quad (25)$$

$$x_R = \bar{x} + \Delta x / 2,$$

اکنون می‌توانیم خودهم‌بستگی هر کره را بر حسب هم‌بستگی‌های مربوط به Δx و \bar{x} بازنویسی کنیم:

$$\langle x_L(t)x_L(t') \rangle = \langle \bar{x}(t)\bar{x}(t') \rangle + \frac{1}{4} \langle \Delta x(t)\Delta x(t') \rangle \quad (26)$$

$$- \frac{1}{4} \langle \bar{x}(t)\Delta x(t') + \bar{x}(t')\Delta x(t) \rangle,$$

خودهم‌بستگی کره راست نیز مانند رابطه (۲۶) است با این تفاوت که علامت جمله سوم مثبت است. به کمک روابط (۲۱) می‌توانیم هم‌بستگی‌های مورد نیاز در رابطه (۲۶) را به دست آوریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 2 \times S_G &= \langle x_R \dot{x}_L - x_L \dot{x}_R \rangle = \langle \dot{\bar{x}} \Delta x - \bar{x} \Delta \dot{x} \rangle \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t) \bar{x}(t + \Delta t) - \bar{x}(t) \Delta x(t + \Delta t)}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (35)$$

و با استفاده از روابط (۲۱) می‌توان حاصل را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$S_G = -\varepsilon(D_R - D_L), \quad (36)$$

که $D_i = K_B T_i / \gamma$ ضریب پخش کره نام است. در نتیجه متوسط نیروی افقی خالص برابر خواهد بود با:

$$\langle \vec{F}_{NQ} \rangle = -4\varepsilon^2 K_B \vec{V} T, \quad (37)$$

مشخص است که در عدم حضور گرادیان دما، متوسط نیرویی که به سیال وارد می‌شود صفر است، اما در حضور گرادیان دما

جریانی از ناحیه گرم سیال به ناحیه سرد برقرار می‌شود.

حال مسئله این است که آیا نیروی که دست آمده در رابطه (۳۷) منطقی به نظر می‌رسد؟ ما انتظار داریم که نیروی کل متناسب با قرینه گرادیان افت و خیز حرارتی دو کره باشد. از آنجایی که دامنه افت و خیز گرمایی در مکان کره راست بیشتر از کره چپ است انتظار می‌رود که نیرویی سیال را از ناحیه گرم‌تر به ناحیه سردتر هل دهد. از طرفی از آنجایی که برهم‌کنش هیدرودینامیکی عامل ایجاد این نیرو است پس حاصل باید با a^2 یعنی حاصل ضرب شعاع دو کره متناسب باشد. عامل بدون شدت برهم‌کنش را نشان می‌دهد ε است. در نتیجه، انتظار داریم حاصل متوسط نیروی خالص با ε^2 متناسب باشد.

اگر به محاسبه فشار و میدان سرعت سیال در فواصل دور علاقمند باشیم، $\langle \vec{F}_{NQ} \rangle$ به عنوان چشمه‌ای برای جمله غالب در نتایج مربوط به نیروی نقطه‌ای اثر خواهد کرد

$$\langle \vec{P}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \vec{r} \cdot \frac{\langle \vec{F}_{NQ} \rangle}{|\vec{r}|^3}, \quad (38\text{-الف})$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\eta} \left(\frac{\langle \vec{F}_{NQ} \rangle}{|\vec{r}|} + \frac{\langle \vec{F}_{NQ} \rangle \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right). \quad (38\text{-ب})$$

۳.۴ محاسبه سرعت سیال در مرکز دو تله

علاوه بر فواصل دور، محاسبه سرعت سیال در مرکز دو تله نیز از اهمیت برخوردار است؛ زیرا در حالتی که دمای سیال برای

$$\begin{aligned} \langle x_R(t) x_L(t + \Delta t) \rangle &= \\ &= \frac{K_B T_R}{2K_S} \times \left(e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1-2\varepsilon)}} - e^{-\frac{\Delta t}{\tau(1+2\varepsilon)}} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود تنها اختلاف در دو هم‌بستگی متقابل محاسبه شده در بالا تفاوت در دمای دو کره است. به طور کلی در حالت هم‌دما این دو رابطه هیچ تفاوتی با هم ندارند و نمودارهای آنها کاملاً روی هم قرار می‌گیرند (مطابق با شکل (۲)).

۲.۴ محاسبه نیروی خالص که در جهت افقی به سیال

وارد می‌شود

برای محاسبه نیروی خالصی که به سیال وارد می‌شود، با توجه به تقارن موجود در راستای y و z می‌توان استدلال کرد که نیازی به محاسبه نیرو در این دو راستا نیست، چون متوسط آن‌ها صفر خواهد بود. اما برای محاسبه نیروی افقی کافی است اولین جملات غالب در نتایج نیروی هیدرودینامیکی دو کره را در رابطه (۱۲) نظر بگیریم

$$F_{NQ} = F_R + F_L = \gamma \times \frac{4\varepsilon}{L} \left(\frac{x_R \dot{x}_L - x_L \dot{x}_R}{2} \right), \quad (33)$$

که NQ نماینده خارج از تعادل است. عبارت داخل پرانتز در رابطه بالا نرخ سطح جاروب شده در فضای فاز دو بعدی $x_R - x_L$ جابه‌جایی کره‌ها است. ما متوسط آنسامبلی آن را متغیر روبش نامیده‌ایم [۲۴]

$$S_G = \left\langle \frac{x_R \dot{x}_L - x_L \dot{x}_R}{2} \right\rangle, \quad (34)$$

در شرایطی که هیچ عامل بیرونی تقارن مسئله را به هم نزنند، $S_G = 0$ است. این یعنی F_{NQ} حول صفر نوسان می‌کند، و متوسط آن صفر است. اما در شرایط مسئله ما که گرادیان دما، تقارن راست-چپ را شکسته است، می‌توانیم به محاسبه مقدار آن بپردازیم.

با استفاده از جفت معادلات (۲۰) (البته به صورت خطی شده) و معادلات (۲۴) می‌توانیم متغیر روبش را برحسب جابه‌جایی نسبی و متوسط بازنویسی کنیم

تا اینجا در مسئله ما چیزی به نام سرعت سوق وجود ندارد و برعکس، هردو کره به دام افتاده‌اند. می‌توان نیروی متوسط $\langle \vec{F}_{NQ} \rangle$ را که دو کره به سیال وارد می‌کنند، برای محاسبه سرعت سوق آن‌ها، در حالتی که در دام تله‌ها نیفتاده بودند، اما با یک فنر نرم به یکدیگر متصل بودند، به کار برد. فرض می‌کنیم، میدان سرعت خارجی سیال، $V \cdot \hat{x}$ ، نیز در مسئله ما وجود می‌داشت. سؤال می‌کنیم مقدار و جهت سرعت سیال چقدر باید می‌بود، تا نیروی خالص وارده به دو کره صفر بشود؟ نیروی خالص وارده به دو کره از رابطه

$$\langle \vec{F}_{drag} \rangle = 2 \times (\epsilon \pi \eta a) (1 - 2\epsilon) V \cdot \hat{x} + O(\epsilon^2), \quad (43)$$

پیروی می‌کند [۴۰]. به همین شکل، اگر به جای میدان سرعت خارجی $V \cdot \hat{x}$ ، دو کره با سرعت سوق متوسط $V_{drift} \cdot \hat{x}$ حرکت کنند، نیروی متوسط وارده به آن‌ها

$$\langle \vec{F}_{drag} \rangle = -2 \times (\epsilon \pi \eta a) (1 - 2\epsilon) V_{drift} \cdot \hat{x}, \quad (44)$$

خواهد بود. در حالت پایا، کل نیروی وارده به دو کره - ناشی از گرادیان دما + رانش آن‌ها - صفر خواهد بود، $\langle \vec{F}_{drag} \rangle + \langle \vec{F}_{drag} \rangle = 0$ و در نتیجه سرعت سوق از

$$V_{drift} = + \frac{\langle \vec{F}_{NQ} \rangle}{2 \times (\epsilon \pi \eta a)} + O(\epsilon^2) = -4\epsilon^2 \frac{K_B \bar{V} \cdot T}{2 \times (\epsilon \pi \eta a)}, \quad (45)$$

به دست می‌آید [۲۴]. حال اگر ضریب پخش دو کره را از

$$\text{رابطه } D = \frac{K_B T}{2 \times (\epsilon \pi \eta a)} \text{ جایگذاری کنیم، برای ضریب سره مقدار}$$

$$S_T = + \frac{4\epsilon^2}{T} = + \frac{9}{16} \frac{a^2}{L^2} \times \frac{1}{T}, \quad (46)$$

به دست می‌آید. جالب است که در این سطح از تقریب، ضریب سره مستقل از سختی فنر، در اینجا سختی تله‌ها، به دست آمده‌است. این مطلب احتمالاً ناشی از تقریب عدد رینولدز پایین است. مشخصاً تنها متغیرهایی که بخشی از ابعاد آن‌ها از جنس جرم است، سختی فنری، چگالی سیال، و نیز جرم دو کره هستند. حال اگر ما به دلیل عدد رینولدز پایین از دو متغیر از این سه متغیر صرف‌نظر کرده باشیم، طبیعی است که متغیر سوم هم نمی‌تواند ظاهر شود، چون در ضریب سره نیز ردپایی از بعد جرم وجود ندارد. در نتیجه حذف شدن سختی فنری نتیجه دور از پیش‌بینی نیست.

هر دو کره یکسان و شرایط کاملاً متقارن است انتظار داریم که سرعت در مرکز خط واصل دو کره حول صفر نوسان داشته باشد. اما در حضور گرادیان دمایی چه اتفاقی می‌افتد؟ با در نظر گرفتن تقریب استوکس-لت برای کره‌ها می‌توانیم سرعت را در نقطه C محاسبه کنیم

$$\vec{V}_R = \frac{1}{4\pi\eta} \left\{ \frac{F_R \hat{x}}{\left(\frac{L}{\gamma} + x_R\right)} + \frac{F_R \hat{x} \cdot \hat{x}}{\left(\frac{L}{\gamma} + x_R\right)} \right\}, \quad (39)$$

$$\vec{V}_L = \frac{1}{4\pi\eta} \left\{ \frac{F_L \hat{x}}{\left(\frac{L}{\gamma} - x_L\right)} + \frac{F_L \hat{x} \cdot \hat{x}}{\left(\frac{L}{\gamma} - x_L\right)} \right\}.$$

در نتیجه مجموع سرعت ناشی از حرکت کره راست و چپ در نقطه C برابر است با:

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}_C \rangle &= \frac{24\epsilon^2}{L} \langle x_R \dot{x}_L - x_L \dot{x}_R \rangle \\ &= -2 \times \frac{24\epsilon^2 K_B}{\gamma} \bar{V} \cdot T, \end{aligned} \quad (40)$$

نتیجه به دست آمده دوباره متناسب با متغیر روبش شده‌است، بنابراین انتظار داریم زمانی سرعت غیر صفر داشته باشیم که عاملی تقارن مسئله را شکسته باشد.

۵. ارتباط با ضریب سره

در حالت کلی، ضریب سره تنها تابع سرعت رانش ذرات در حضور گرادیان دما نیست، و محاسبه آن می‌تواند پیچیدگی‌های بیشتر داشته باشد [۴۳]. اما این پیچیدگی‌ها ریشه در محاسبات ترمودینامیک غیر تعادلی دارند. در بسیاری از موارد، می‌توان از این پیچیدگی‌ها صرف‌نظر کرد، و به سادگی ضریب سره را به سرعت سوق مربوط ساخت. در این صورت اگر سرعت رانش یک ذره، مولکول، یا ... در حضور گرادیان دما به صورت $V_{drift} = cte \bar{V} T$ بیان شود، این سرعت به‌طور مستقیم به ضریب سره مربوط می‌شود [۱۲]

$$V_{drift} = -S_T D \bar{V} T, \quad (41)$$

در نتیجه ضریب سره به سادگی

$$S_T = -cte / D, \quad (42)$$

به دست می‌آید.

به این منظور مرکز مختصات را در نقطه C وسط خط واصل دو کره در نظر می‌گیریم. با توجه به این که کره راست در دمای بالاتری قرار گرفته است گرانشی آن کاهش یافته و برابر خواهد بود با $\eta_R = \eta \cdot (1 - \beta |\nabla T| (\frac{L}{\gamma} + x_R))$ و گرانشی در مکان کره چپ برابر است با $\eta_L = \eta \cdot (1 - \beta |\nabla T| (-\frac{L}{\gamma} + x_L))$. از طرفی استفاده از نتیجه پیوست در جمله اصلاحیه تابع گرین در این مسئله معادل این است که در نتایج قبلی خود از تابع گرین یعنی رابطه (۹) به جای η ، گرانشی در مکان کره مورد نظر را قرار دهیم. در نتیجه تانسور اوسین (\hat{M}) تا مرتبه اول نسبت به $\beta |\nabla T|$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$\hat{M} = \frac{1}{\gamma} \times \begin{pmatrix} 1 + \beta |\nabla T| (\frac{L}{\gamma} + x_R) & \frac{\gamma a}{4|r|} (1 + \beta |\nabla T| |r|) \\ \frac{\gamma a}{4|r|} (1 - \beta |\nabla T| |r|) & 1 + \beta |\nabla T| (-\frac{L}{\gamma} + x_L) \end{pmatrix},$$

$$k = 6\pi \eta \cdot a \quad \text{و} \quad r = L + x_R - x_L$$

به‌عنوان مثال، تنها تفاوت در عناصر قطر اصلی تانسور بالا، استفاده از η_R و η_L به جای η در رابطه (۹) است. همین‌طور ضریب تغییر کرده در عناصر قطر فرعی مثل M_{12} (M_{21}) نیز اصلاح ناشی از تغییر گرانشی در مکان کره راست (چپ) است که نسبت به کره دیگر سنجیده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود جمله اصلاحی در تانسور اوسین از مرتبه $\beta |\nabla T| \times a$ است، یعنی اگر شیب تغییرات و شکسانی نسبت به شعاع کره‌ها خیلی کوچک‌تر باشد ($\beta |\nabla T| \times a \ll 1$) می‌توان از تصحیح ایجاد شده برای برهمکنش هیدرودینامیکی در بلند برد صرف نظر کرد.

۶.۱. تصحیح ایجاد شده در معادلات لانژون و

همبستگی‌ها

با معکوس کردن رابطه (۵۲) می‌توانیم نیروهای هیدرودینامیکی اصلاح شده را به دست آوریم. با جایگذاری در معادلات لانژون

همچنین ضریب سره برحسب ابعاد شناگر/ذره معلق در سیال، L ، به صورت یکنوا نزولی است. این مطلب به وضوح با داده‌های تجربی که اغلب صعودی بودن ضریب سره با ابعاد ذره را نشان می‌دهند، در تناقض است. این ممکن است به دلیل محدود بودن محاسبات به اولین جمله غیر صفر ($\sim \varepsilon^2$) باشد. یعنی، اگر مراتب بالاتر ε را در محاسبات لحاظ کنیم، این مشاهده تغییر کند.

دست آخر این مشاهده با نتیجه مشابه پوسانه-نجفی [۴۴] در تناقض است. ما هنوز نمی‌دانیم ریشه این تناقض در کجا است. اما امیدواریم در کارهای بعد، که مسئله را در حالت کلی‌تر حل خواهیم کرد، این تناقض نیز حل شود، یا ریشه آن کاملاً شفاف شود.

۶. اثر وابستگی فضای گرانشی بر تانسور اوسین، و

نیروهای مؤثر در مسئله

وابستگی مکانی گرانشی، یعنی $\nabla \eta \neq 0$ ، ساختار مسئله ما را تغییر می‌دهد. هرچند گرانشی تابعیت دمایی آرنیوسی دارد، $\eta(T) = \eta(T_0) \exp(-\kappa(T - T_0))$ ، اما برای بازه کوچک، $T_L < T < T_R$ ، ما تنها به وابستگی خطی آن بسنده می‌کنیم، و ثابت β را به صورت

$$\beta = -\frac{\partial \ln(\eta)}{\partial T}, \quad (47)$$

تعریف می‌کنیم. دلیل علامت منفی در تعریف فعلی این است که می‌خواهیم β مثبت باشد، و می‌دانیم که گرانشی آب و بسیاری از سیال‌های نیوتنی با افزایش دما کاهش می‌یابد. با این تعریف، β در تمام بازه میان نقطه ذوب تا جوش آب، در فشار اتاق مثبت خواهد بود.

با این تعریف، گرانشی سیال در نقطه دلخواه فضا از رابطه $\eta \approx \eta \cdot (1 - \beta |\nabla T| x) = \eta \cdot (1 - \beta |\nabla T| x)$ ، (48)

به‌دست خواهد آمد که $|\nabla T|$ گرادین میدان دما در مبدأ است. در نتیجه می‌توان گرانشی را در هر x دلخواه از رابطه $\eta = \eta \cdot (1 - \beta |\nabla T| x)$ به دست آورد. در مرحله بعد سعی می‌کنیم تابع گرین مربوط به معادله استوکس را در این شرایط حل کنیم (پیوست). در نتیجه می‌توانیم به تانسور اوسین اصلاح شده دست پیدا کنیم.

با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۴۹)، برای حالتی که $x_R = x_L = 0$ (زیرا در این مرحله تنها به جملات خطی نسبت به جابه‌جایی نیاز داریم تا دستگاه معادلات را به صورت خطی حل کنیم)، یعنی

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta|\nabla T|L}{2} & \tau\varepsilon(1 + \frac{\beta|\nabla T|L}{2}) \\ \tau\varepsilon(1 - \frac{\beta|\nabla T|L}{2}) & 1 - \frac{\beta|\nabla T|L}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix}, \quad (52)$$

خواهیم داشت:

$$|\dot{x}_i\rangle + \frac{1}{\tau}\hat{Q}|x_i\rangle = \frac{1}{\gamma}\hat{Q}|\zeta_i\rangle, \quad (53)$$

که $\hat{Q} = \gamma\hat{M}$ ، $\tau = \gamma/K_S$ و $|x_i\rangle = \begin{pmatrix} x_R \\ x_L \end{pmatrix}$ در نتیجه با استفاده از رابطه عملگری (۵۳) می‌توان نتایج کلی دینامیک هر کره را در حالتی که مدت به اندازه کافی طولانی از شرایط اولیه مسئله گذشته باشد به دست آورد

$$|x_i\rangle = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t ds e^{-\frac{(t-s)\hat{Q}}{\tau}} \hat{Q}|\zeta_i\rangle, \quad (54)$$

در این مرحله می‌کوشیم ماتریس \hat{Q} را بر اساس ماتریس $\hat{I} + \tau\varepsilon\hat{N}$ که در آن $\hat{N} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$ و \hat{I} ماتریس همانی 2×2 است

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \hat{I} + \tau\varepsilon \begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix} + \frac{\beta|\nabla T|L}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau\varepsilon \\ -\tau\varepsilon & -1 \end{pmatrix} \\ &= \hat{I} + \tau\varepsilon\hat{N} + \frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A}, \end{aligned} \quad (55)$$

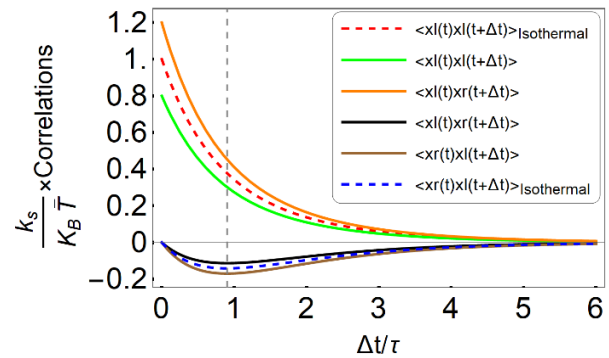
حال با توجه به پیوست ۵ می‌توان نوشت

$$e^{-\frac{(t-s)\hat{Q}}{\tau}} = e^{-\frac{(t-s)}{\tau} \left(\hat{I} + \frac{s-t}{\tau}(\tau\varepsilon\hat{N} + \frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A}) \right)}, \quad (56)$$

به کمک رابطه بالا می‌توانیم عبارت عملگری در رابطه (۵۴) را تا مرتبه اول نسبت به ε و $|\nabla T|L$ بسط تیلور دهیم

$$|x_i\rangle = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t ds e^{-\frac{(t-s)}{\tau} \left\{ \hat{I} + \left(1 + \frac{s-t}{\tau}\right) (\tau\varepsilon\hat{N} + \frac{\beta|\nabla T|L}{2}\hat{A}) \right\}} |\zeta_i\rangle, \quad (57)$$

از طرفی می‌دانیم که ویژه بردارها و ویژه مقدارهای متناظر برای ماتریس $\hat{I} + \tau\varepsilon\hat{N}$ برابرند با:



شکل ۲. خودهم‌بستگی و هم‌بستگی متقابل برای جابه‌جایی دو کره برحسب زمان بهنجار شده. زمان برحسب یکای زمانی $\tau = 6\pi\eta a / K_S$ بهنجار شده و تمام مقادیر هم‌بستگی نیز بر مقدار تعادلی خودهم‌بستگی $\langle x^2 \rangle = K_B T / K_S$ تقسیم شده‌اند. برای این‌که دو تفاوت نمودارها در حضور گرادیان دما با حالت هم‌دما (نمودارهای خط‌چین) به‌سادگی دیده شود، اختلاف دمای دو کره ۴.۰ دمای متوسط آن‌ها اختیار شده‌است. مقدار کمینه نمودارهای هم‌بستگی متقابل در $t = \tau \times (1 - \frac{2}{3}\varepsilon^2)$ رخ می‌دهد که در شکل با خط‌چین مشخص شده‌است.

و رفتن به پایه‌های جابه‌جایی متوسط و نسبی خواهیم دید که معادلات همچنان جفت‌شده باقی می‌مانند. در نتیجه استفاده از مسیر قبلی حل مسئله در این حالت چندان کمک‌کننده نخواهد بود.

$$\begin{aligned} -k_s \bar{x} - \gamma(1 - \tau\varepsilon)\dot{\bar{x}} \\ + 4\gamma L \beta |\nabla T| (1 - \tau\varepsilon) \Delta \dot{\bar{x}} + \bar{\zeta} = 0, \\ -k_s \Delta x - \gamma(1 + \tau\varepsilon) \Delta \dot{x} \\ + \gamma L \beta |\nabla T| (1 + \tau\varepsilon) \dot{\bar{x}} + \Delta \zeta = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

یک راه حل مسئله این است که دستگاه معادلات را در حالت کلی قطری کنیم و با استفاده از پایه‌های به دست آمده جدید جفت‌شدگی معادلات را رفع کنیم. باید توجه داشت که در این شرایط باید با استفاده از قضیه افت‌وخیز تلف هم‌بستگی نوفه سیال را در پایه‌های جدید به دست آوریم. اما با توجه به این‌که از حل مسئله در شرایط $\beta = 0$ هم‌بستگی نوفه در پایه‌های ζ_i و $\bar{\zeta}_i$ را می‌شناسیم، سعی می‌کنیم مسیر حلی را انتخاب کنیم که بتوانیم از اطلاعات قبلی مسئله استفاده کنیم.

به این منظور می‌توانیم دستگاه معادلات (۱) را به صورت ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix} = -K_S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ x_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_R \\ \zeta_L \end{pmatrix}, \quad (51)$$

شاید مقایسه جملات اضافه شده به عناصر معکوس تانسور اوسین خالی از فایده نباشد. معکوس ماتریس تعریف شده در رابطه (۱۲) برابر است با:

$$\hat{M}^{-1} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \gamma \varepsilon \left(\frac{x_R - x_L}{L} - 1 \right) \\ \gamma \varepsilon \left(\frac{x_R - x_L}{L} - 1 \right) & 1 \end{pmatrix}. \quad (62)$$

اکنون می‌توانیم به محاسبه نیروی خالص وارد شده به سیال پردازیم

$$F_{NQ} = F_R + F_L = \gamma \times \frac{\gamma \varepsilon}{L} \left(\frac{x_R \dot{x}_L - x_L \dot{x}_R}{2} \right). \quad (63)$$

محاسبه مجدد متغیر روبش

با بهره‌گیری از روابط (۵۹) می‌توانیم اختلاف هم‌بستگی متقابل موجود در رابطه (۶۳) را محاسبه کنیم. طبق محاسبات به عمل آمده، متغیر روبش تا توان دوم نسبت به β هیچ وابستگی از خود نشان نمی‌دهد و می‌توان این کمیت را به صورت زیر نوشت:

$$S_G = -\frac{\varepsilon}{\gamma} K_B \Delta T. \quad (64)$$

محاسبه سرعت در مرکز تله‌ها

با استفاده از رابطه سرعت می‌توانیم سرعت ناشی از هر کره را در مرکز خط واصل محاسبه کنیم. در نتیجه با توجه به محاسبات ارائه شده در پیوست خواهیم داشت:

$$V_C = \frac{F_R + F_L}{2\pi\eta L} \left(1 - \frac{x_R - x_L}{L} \right) - \frac{F_R - F_L}{2\pi\eta L} \left(\frac{x_R + x_L}{L} + \frac{\beta |\nabla T| L}{4} \right), \quad (65)$$

همانطور که مشخص است برای محاسبه سرعت سیال در نقطه C به مجموع و تفاضل نیروهایی که هر کره به سیال وارد می‌کند نیاز داریم. با استفاده از روابط ارائه شده در معادله (۶۱)، می‌توانیم مقدار متوسط سرعت را محاسبه کنیم

$$\langle V_C \rangle = - \left(2\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{L} - \frac{9}{\lambda} \frac{a^2 \beta^2 |\nabla T|^2}{L} \right) \langle \dot{x}_R x_L - \dot{x}_L x_R \rangle = - \left(2\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{L} - \frac{9}{\lambda} \frac{a^2 \beta^2 |\nabla T|^2}{L} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} L K_B \bar{\nabla T} \right), \quad (66)$$

با توجه به نتیجه به دست آمده می‌توان اظهار کرد این اثر تا مرتبه خطی نسبت به عامل اختلالی تغییری در نتیجه قبلی مسئله ایجاد نمی‌کند. اولین تصحیح غیر صفر مربوط به توان سه $\bar{\nabla T}$

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1 + 2\varepsilon, \quad (58)$$

$$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 - 2\varepsilon,$$

با این حساب می‌توانیم با رفتن به پایه‌های ویژه برداری تعریف شده در بالا، رابطه (۵۷) را برای متغیرهای آشنای $\Delta x = x_R - x_L$ و $\bar{x} = (x_R + x_L)/2$ حل کنیم، با استفاده از ضرب طرفین رابطه (۵۷) در بردارهای سطری $\langle e_1 |$ و $\langle e_2 |$ ، می‌توانیم به تحول زمانی Δx و \bar{x} دست پیدا کنیم

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^t ds \frac{e^{-\gamma(t-s)}}{\gamma} \{ \bar{\zeta}(s) + (1 + \frac{s-t}{\tau}) \} \quad (59-الف)$$

$$\times \left(2\varepsilon \bar{\zeta}(s) + \frac{\beta |\nabla T| L}{4} (1 - 2\varepsilon) \Delta \zeta(s) \right),$$

$$\Delta x(t) = \int_{-\infty}^t ds \frac{e^{-\gamma(t-s)}}{\gamma} \{ \Delta \zeta(s) + (1 + \frac{s-t}{\tau}) \} \quad (59-ب)$$

$$\times \left(-2\varepsilon \Delta \zeta(s) + \beta |\nabla T| L (1 + 2\varepsilon) \bar{\zeta}(s) \right),$$

حال می‌توانیم خودهم‌بستگی و هم‌بستگی متقابل متغیرهای جابه‌جایی متوسط و جابه‌جایی نسبی را به دست آوریم و نرخ متوسط سطح جاروب شده را محاسبه کنیم. به علاوه در یک گام جلوتر می‌توانیم از این متغیرها به متغیرهای حقیقی مسئله یعنی جابه‌جایی کره چپ و راست برگردیم.

۶.۲. تصحیح ایجاد شده در جواب نهایی مسئله

اکنون که اطلاعات ما از اصلاحات تانسور اوسین تکمیل شده است می‌توانیم با معکوس کردن آن، نیروی کلی که به سیال وارد می‌شود را محاسبه کنیم

$$\begin{pmatrix} F_R \\ F_L \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} M^{-1}_{11} & M^{-1}_{12} \\ M^{-1}_{21} & M^{-1}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_L \end{pmatrix}, \quad (60)$$

عناصر این ماتریس عبارت‌اند از:

$$M^{-1}_{11} = 1 - \beta |\nabla T| \left(\frac{L}{\gamma} + x_R \right),$$

$$M^{-1}_{22} = 1 + \beta |\nabla T| \left(\frac{L}{\gamma} - x_L \right),$$

$$M^{-1}_{12} = 2\varepsilon \left(\frac{x_R - x_L}{L} - 1 \right) \quad (61)$$

$$+ \varepsilon \beta |\nabla T| L \left(\frac{\gamma (x_R + x_L)}{L} - 1 \right),$$

$$M^{-1}_{21} = 2\varepsilon \left(\frac{x_R + x_L}{L} - 1 \right)$$

$$+ \varepsilon \beta |\nabla T| L \left(\frac{\gamma (x_R + x_L)}{L} + 1 \right),$$

انتظار داریم وابستگی سرعت سوق، و نیز ضریب سره به شعاع ذرات از جنس a^2 باشد. به همین دلیل جواب خود را صحیح تلقی می‌کنیم.

در مرحله نهایی، وابستگی دمایی گرانشی سیال به دما را وارد محاسبات تانسور اوسین و برهم‌کنش هیدرودینامیکی کره‌ها می‌کنیم. جالب است که اصلاح معادلات بر اساس این تصحیح‌ها، نتایج اولیه ما را تا توان اول نسبت به ∇T دچار تغییر نمی‌کند.

پیوست ۱. حل تابع گرین برای گرانشی وابسته به مکان

در حد عدد رینولدز پایین، معادله کلی استوکس به صورت زیر نوشته می‌شود، که در آن گرانشی سیال ثابت فرض نشده است:

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} + \nabla \cdot (\eta[\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T]) = -\vec{f}, \quad (67)$$

در رابطه فوق، $\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T$ طبق تعریف [17] برابر است با دو برابر نرخ تانسور کرنش $\dot{\epsilon}$ که در سه بعد یک تانسور مرتبه ۲ با ۹ آرایه است. به عنوان مثال، عناصر ماتریسی آن عبارت‌اند

$$\text{از } \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \text{ که در آن شاخص‌ها می‌توانند بین سه}$$

راستای مختلف دستگاه دکارتی تغییر داشته باشند (با $i, j = 1, 2, 3$). برای شرایطی که η ثابت و سیال تراکم‌ناپذیر

فرض می‌شود یعنی $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ، معادله (۶۷) به معادله آشنای

استوکس تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن تابعیت خطی برای گرانشی سیال مطابق با $\eta = \eta_0(1 - \beta|\nabla T|x)$ می‌توانیم رابطه (۶۷) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} + \nabla \cdot (\eta_0[\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T]) + \eta_0 \nabla^2 \mathbf{V} = -\vec{f}(\vec{r}), \quad (68)$$

با استفاده از خاصیت ضرب بردار در تانسور می‌توانیم عبارت دوم از سمت چپ را در معادله فوق به دست آوریم:

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} - \beta |\nabla T| \eta_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V}_x \right) + \eta_0 (1 - \beta |\nabla T| x) \nabla^2 \mathbf{V} = -\vec{f}(\vec{r}), \quad (69)$$

در این رابطه، عبارت $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{V}_x$ را می‌توان به صورت سه عنصر نرخ تانسور کرنش در صفحه عمود بر گرادیان گرانشی در نظر گرفت.

است. یعنی نتیجه به دست آمده تحت تبدیل $x \leftrightarrow -x$ که معادل با قرینه کردن گرادیان دمایی است کلاً تغییر علامت می‌دهد.

۷. نتیجه‌گیری

ما در این مقاله می‌کوشیم با پیشنهاد یک مدل ساده و قابل بررسی در آزمایشگاه به درک اثر سره نزدیک شویم. در نگاه اول، ما مستقیماً به مسئله سره نمی‌پردازیم. دو ریزذره مورد بررسی در دام انبرک نوری گرفتار هستند و جز نوسانات گرمایی - که به واسطه برهم‌کنش هیدرودینامیکی جفت شده‌اند - امکان حرکت یک‌سویه‌ای در مقیاس طولانی را ندارند. به منظور بررسی اثر گرادیان دما بر روی این مدل، ما به نیروی خالصی که به سیال وارد می‌شود نگاه می‌کنیم. نخستین نتیجه این مدل‌سازی آن است که شکست تقارن ناشی از حضور گرادیان دما منجر به اعمال نیروی خالص به سیال می‌شود. مشخصاً اعمال گرادیان دما به‌طور مستقیم هیچ نیروی خالصی به هیچ‌کدام از دو ذره وارد نمی‌کند، اما تقارن حرکت‌های کاتوره‌ای هر ذره در جهت موازی یا مخالف با گرادیان دما را برهم می‌زند. وقتی این شکست تقارن، با یک متغیر افت‌وخیزکننده دیگر جفت می‌شود، موجب اعمال نیروی خالص به سیال می‌شود.

در مرحله بعدی، با استفاده از محاسبه نیروی خالص وارد شده بر سیال، به محاسبه ضریب سره می‌پردازیم ($S_T = +\frac{4\epsilon^2}{T}$).

این نتیجه وابستگی به جرم را که در برخی از محلول‌های دوتایی مشاهده شده بود [۷]، نشان نمی‌دهد. البته این انتظاری بود که از ابتدا می‌داشتیم. چون حل مسئله در عدد رینولدز پایین مستلزم صرف‌نظر کردن از جملات اینرسی بود، و طبیعی است که در نتیجه نهایی اثری از جرم دیده نشود. این بدان معنا است که برای مشاهده اثر مزبور، باید یک مرتبه جلوتر برویم و اثر جملات اینرسی در معادله نوی استوکس را - حداقل تا جمله مرتبه اول - در نظر بگیریم.

در عین حال نتیجه ما با نتیجه محاسبه نجفی-پوسانه [۴۴] در تناقض است. اما بر مبنای استدلالی که در متن مقاله آوردیم،

حل مؤلفه x معادله (۷۶) پیردازیم، در نتیجه معادله مذکور به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\nabla^2 v_{1x} = x \nabla^2 V_x, \quad (77)$$

می‌دانیم [۴۵] که پاسخ گرین معادله لاپلاس برابر است با

$$-\frac{1}{4\pi r}, \quad \text{بنابراین پاسخ معادله (۷۷) برابر خواهد بود با:}$$

$$v_{1x}(r) = \iiint G(r-r') \left(x \nabla^2 V_x \Big|_{r=r'} \right) dx' dy' dz', \quad (78)$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانیم انتگرال را ساده‌تر کنیم

$$G(r,r') x \nabla^2 V_x(r') = \bar{\nabla} \cdot (G(r,r') x \bar{\nabla} V_x(r')) \quad (79)$$

$$- \bar{\nabla} \cdot (V_x(r') \bar{\nabla} (x \cdot G(r,r')))$$

$$+ V_x(r') \nabla^2 (x \cdot G(r,r')),$$

با استفاده از قضیه دیورژانس و در نظر گرفتن شرط مرزی دیریکله [45] برای تابع گرین و سرعت ناشی از نیروی نقطه‌ای روی سطح مرزی محصور در بی‌نهایت، می‌توان دو جمله اول در رابطه بالا را صفر در نظر گرفت. در نتیجه تنها جمله سوم از رابطه (۷۹) باقی می‌ماند که با استفاده از تعریف لاپلاسیان دو تابع می‌توان آن را ساده‌تر کرد [۴۶]

$$\nabla^2 (G(r,r') x) = \nabla^2 \frac{\partial G(r-r')}{\partial x} + x \nabla^2 G(r,r'), \quad (80)$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$v_{1x}(r) = x V_x(r) + \nabla^2 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} V_x(r') \frac{\partial G(r-r')}{\partial x} dx' dy' dz', \quad (81)$$

با اعمال رابطه

$$V_x(r) \frac{\partial G(r-r')}{\partial x} = \frac{\partial (G(r-r') V_x(r'))}{\partial x} - G(r-r') \frac{\partial V_x(r')}{\partial x}, \quad (82)$$

در انتگرال رابطه (۸۱) به شکل نهایی زیر می‌رسیم:

$$-\nabla^2 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} G(r-r') \frac{\partial V_x(r')}{\partial x} dx' dy' dz', \quad (83)$$

در این مرحله می‌توانیم با استفاده از بسط تابع گرین بر اساس توابع هماهنگ‌های کروی [۲۸] و همچنین پاسخ سرعت نیروی نقطه‌ای مطابق با روابط زیر انتگرال را محاسبه کنیم

به منظور به دست آوردن تابع گرین، در قدم اول اثر هر ذره در سیال را به صورت نیروی نقطه‌ای در نظر می‌گیریم. سپس فشار و سرعت سیال را بر حسب پارامتر اختلالی $|\nabla T| \beta$ بسط می‌دهیم و توجه خود را تنها معطوف به اولین جمله در بسط می‌کنیم:

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \beta |\nabla T| \bar{v}_1, \quad (70)$$

$$P = P_0 + \beta |\nabla T| p_1,$$

با جایگذاری مقادیر اختلالی سرعت و فشار در معادله استوکس، پاسخ جملات مرتبه صفر نسبت به عامل اختلالی همان تابع گرین معروف است

$$-\bar{\nabla} P_0 + \eta \nabla^2 \bar{V}_0 = -F \hat{i} \delta(\bar{r} - \bar{r}'), \quad (71)$$

جملات مرتبه یک نسبت به عامل اختلالی برابر است با:

$$-\bar{\nabla} p_1 + \eta \nabla^2 \bar{v}_1 - \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_0 + \bar{\nabla} V_{x0} + x \nabla^2 \bar{V}_0 \right) = 0. \quad (72)$$

اکنون با در نظر گرفتن شرط تراکم ناپذیری سیال ($\bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0$)

می‌توانیم رابطه بالا را به معادله‌ای مستقل از \bar{v} تبدیل کنیم

$$\nabla^2 p_1 = -2\eta \nabla^2 V_{x0}, \quad (73)$$

سپس با در نظر گرفتن بسط فوریه برای فشار و سرعت خواهیم داشت:

$$p_1(r) = \int p_1(k) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{2\pi}} d^3k, \quad (74\text{-الف})$$

$$V_{x0}(r) = \int V_{x0}(k) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{\sqrt{2\pi}} d^3k, \quad (74\text{-ب})$$

با جایگذاری انتگرال‌های تبدیل فوریه در رابطه (۷۳) خواهیم داشت:

$$p_1(k) = -2\eta V_{x0}(k), \quad (75)$$

در نتیجه می‌توان جمله اصلاحی مرتبه اول فشار را برابر با $p_1(r) = -2\eta V_{x0}(r)$ به دست آورد.

پیوست ۲. محاسبه جمله اصلاحی سرعت

با برگرداندن نتیجه فشار در رابطه (۷۲) خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \bar{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x} \bar{V}_0 - \bar{\nabla} V_{x0} + x \nabla^2 \bar{V}_0, \quad (76)$$

با توجه به این که ما فعلاً خود را به حرکت در راستای x محدود کرده‌ایم، بنابراین راحت‌تر است که در مرحله اول به

$$\sin(\theta) \cos(\varphi) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (y_{1,-1}(\theta, \varphi) - y_{1,1}(\theta, \varphi)), \quad (90)$$

با جایگذاری رابطه بالا در انتگرال (۸۳) و با تبدیل المان حجم دکارتی به المان حجم کروی یعنی $r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\varphi$ و همچنین با استفاده از شرط تعامد توابع هارمونیک‌های کروی برای جمله اول انتگرال خواهیم داشت:

$$= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\lambda\pi\eta} (y_{1,-1}(\theta, \varphi) - y_{1,1}(\theta, \varphi)) \times \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{r^3} dr + \int_{r_1}^{\infty} \frac{r}{r^3} dr \right), \quad (91)$$

حاصل انتگرال شعاعی در رابطه (۹۱) برابر خواهد بود با $\frac{3}{4}$. اکنون برای محاسبه جمله دوم سرعت باید x^3 را برحسب هماهنگ‌های کروی بازنویسی کنیم. باید توجه داشت که می‌توانیم از اتحاد $\cos^3 \phi = (\cos^2 \phi + 3 \cos \phi) / 4$ برای پیدا کردن تابع مورد نظر استفاده کنیم:

$$x^3 = r^3 \sin^3(\theta) \cos^3(\varphi) = \frac{r^3}{2} \sqrt{\frac{4\pi}{35}} (y_{3,-3}(\theta, \varphi) - y_{3,3}(\theta, \varphi)) + \frac{3}{4} \frac{r^3}{2} \left\{ -\sqrt{\frac{4\pi}{21}} (y_{3,-1}(\theta, \varphi) - y_{3,1}(\theta, \varphi)) + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (y_{1,-1}(\theta, \varphi) - y_{1,1}(\theta, \varphi)) \right\}, \quad (92)$$

از طرفی حاصل انتگرال شعاعی مورد نیاز نیز برابر خواهد بود با:

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{r^3}{r^4} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3}{r^4} dr + \int_{r_2}^{\infty} \frac{r^3}{r^4} dr = \frac{3}{12}, \quad (93)$$

و در نهایت برای نتیجه نهایی جمله اصلاحی سرعت بر حسب هماهنگ‌های کروی خواهیم داشت:

$$v_{x1}(r) = x v_x(r) = -2 \frac{f}{\lambda\pi\eta} \left\{ -\sqrt{\frac{\pi}{6}} (y_{1,-1}(\theta, \varphi) - y_{1,1}(\theta, \varphi)) + 3 \left[\frac{1}{24} \sqrt{\frac{4\pi}{35}} (y_{3,-3}(\theta, \varphi) - y_{3,3}(\theta, \varphi)) - \frac{3}{12} \sqrt{\frac{4\pi}{21}} (y_{3,-1}(\theta, \varphi) - y_{3,1}(\theta, \varphi)) + \frac{3}{10} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (y_{1,-1}(\theta, \varphi) - y_{1,1}(\theta, \varphi)) \right] \right\}, \quad (94)$$

$$V_{x_1}(r) = \frac{f}{\lambda\pi\eta} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \right), \quad (84)$$

$$G(r-r_1) = -\frac{1}{4\pi} \times 4\pi \sum_l \sum_m \frac{1}{r^{l+1}} \frac{r_1^{l+1}}{r_1^{l+1}} y_{l,m}^*(\theta', \phi') y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (85)$$

نتیجه به دست آمده برای تصحیح مرتبه اول سرعت عبارت است از:

$$v_{x1}(r) = \frac{f}{\lambda\pi\eta} \left(\frac{x}{2r} + \frac{x^3}{2r^3} \right), \quad v_{y1}(r) = \frac{f}{\lambda\pi\eta} \left(\frac{y(x^2 - y^2)}{2r^3} \right), \quad v_{z1}(r) = \frac{f}{\lambda\pi\eta} \left(\frac{z(x^2 - y^2)}{2r^3} \right). \quad (86)$$

پیوست ۳. استخراج رابطه اصلاحیه مرتبه اول سرعت

در مسیر به دست آوردن جمله خطی سرعت نسبت به β به انتگرال زیر رسیدیم

$$-2 \iiint_{-\infty}^{\infty} G(r-r_1) \frac{\partial V_{x_1}(r)}{\partial x} dx dy dz, \quad (87)$$

به منظور حل رابطه انتگرالی بالا از بسط تابع گرین بر اساس هماهنگ‌های کروی استفاده می‌کنیم، یعنی

$$G(r-r_1) = -\frac{1}{4\pi} \times 4\pi \sum_l \sum_m \frac{1}{r^{l+1}} \frac{r_1^{l+1}}{r_1^{l+1}} y_{l,m}^*(\theta', \phi') y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (88)$$

از طرفی از پاسخ سرعت نیروی نقطه‌ای در جهت x می‌دانیم که

$$\frac{\partial V_{x_1}(r)}{\partial x} = \frac{f}{\lambda\pi\eta} \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right), \quad (89)$$

در نتیجه برای محاسبه انتگرال مربوط به جمله اول در رابطه (۸۹) می‌توانیم از مختصات کروی استفاده کنیم، یعنی

$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$ و در نهایت صورت کسر را برحسب هارمونیک‌های کروی بازنویسی کنیم

$$\langle x_R(t)^2 \rangle = \frac{K_B T_R}{k_S} \quad (99)$$

$$\langle x_L(t)^2 \rangle = \frac{K_B T_L}{k_S},$$

در نتیجه می‌توان بلافاصله افت‌وخیز مربوط به متغیرهای جابه‌جایی نسبی و متوسط را به دست آورد

$$\langle \bar{x}(t)^2 \rangle = \frac{K_B \bar{T}}{2k_S},$$

$$\langle \Delta x(t)^2 \rangle = \frac{2K_B \bar{T}}{k_S}, \quad (100)$$

$$\langle \bar{x}(t) \Delta x(t) \rangle = \frac{K_B \Delta T}{2k_S},$$

از طرفی، در شرایط $\beta=0$ ، یعنی با استفاده از روابط (۲۱) داریم

$$\Delta x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Delta \zeta(s)}{\gamma(1+2\varepsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1+2\varepsilon)}} ds \quad (101)$$

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\bar{\zeta}(s)}{\gamma(1-2\varepsilon)} e^{-\frac{t-s}{\tau(1-2\varepsilon)}} ds$$

حال می‌توان به محاسبه $\langle \bar{x}(t)^2 \rangle$ ، $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ و $\langle \bar{x}(t) \Delta x(t) \rangle$ پرداخت و با برابر قرار دادن با نتایج مورد انتظار از قضیه همپاری انرژی، همبستگی نیروی نوبه را در پایه‌های نسبی و متوسط به دست آورد

$$\langle \bar{\zeta}(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \gamma (1-2\varepsilon) K_B \bar{T} \delta(t-t')$$

$$\langle \Delta \zeta(t) \Delta \zeta(t') \rangle = 4\gamma (1+2\varepsilon) K_B \bar{T} \delta(t-t') \quad (102)$$

$$\langle \Delta \zeta(t) \bar{\zeta}(t') \rangle = \gamma K_B \Delta T \delta(t-t')$$

پیوست ۶. استخراج رابطه (۵۶)

با توجه به تعریف سری مک‌لوران، تابع نمایی $e^x = (1 + \frac{x}{N})^N$ را تعریف می‌کنیم. اگر نمای تابع یک عملگر به صورت $A + \varepsilon B$ باشد، می‌توانیم تابع را برحسب ضریب کوچک ε تا مرتبه اول بسط تیلور دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$e^{A+\varepsilon B} = (1 + \frac{A+\varepsilon B}{N})^N = e^A + \sum_{m=1}^{N-1} (1 + \frac{A}{N})^m (\frac{\varepsilon B}{N}) (1 + \frac{A}{N})^{N-m-1} \quad (103)$$

با توجه به این که تعداد جملات سری بالا یعنی N به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، می‌توانیم جمع گسسته بالا را به انتگرال

$$\text{زیر با اعمال تغییر متغیر } \lambda = \frac{m}{N} \text{ تبدیل کنیم}$$

که می‌توانیم با بازنویسی روابط برحسب r نتیجه را در مختصات دکارتی به دست آوریم

$$v_{x1}(r) = \frac{f}{\lambda \pi \eta} \left(\frac{x}{2r} + \frac{x^2}{2r^2} \right),$$

$$v_{y1}(r) = \frac{f}{\lambda \pi \eta} \left(\frac{y(x^2 - y^2)}{2r^3} \right), \quad (95)$$

$$v_{z1}(r) = \frac{f}{\lambda \pi \eta} \left(\frac{z(x^2 - y^2)}{2r^3} \right).$$

پیوست ۴. محاسبه سرعت در نقطه C

برای محاسبه سرعت سیال در مرکز خط واصل دو کره، از پاسخ استوکس-لت برای نیروی نقطه‌ای در راستای x به علاوه اصلاحیه مرتبه اول ارائه شده در بخش ۲ خواهیم داشت:

$$V_{CR} = \frac{f_R}{\lambda \pi \eta} \left(\frac{2}{1+x_R} - \beta |\nabla T| \right) \hat{x}, \quad (96)$$

$$V_{CL} = \frac{f_L}{\lambda \pi \eta} \left(\frac{2}{1-x_L} + \beta |\nabla T| \right) \hat{x},$$

که رابطه اول سرعت ناشی از حرکت کره راست و رابطه دوم سرعت ناشی از کره چپ در مکان موردنظر است. با بسط دادن روابط بالا به ازای $x_R, x_L \ll L$ تا مرتبه اول خواهیم داشت:

$$V_C = \frac{F_R + F_L}{2\pi \eta L} \left(1 - \frac{x_R - x_L}{L} \right) - \frac{F_R - F_L}{2\pi \eta L} \left(\frac{x_R + x_L}{L} \right) + \frac{\beta |\nabla T|}{\lambda \pi \eta} (F_L - F_R), \quad (97)$$

با جایگذاری نیروهایی که کره‌های چپ و راست به سیال وارد می‌کنند با استفاده از رابطه (۲۲) به نتیجه نهایی خواهیم رسید

$$\langle V_C \rangle = - \left(2\beta \frac{\varepsilon^2}{L} - \frac{9}{8} \frac{a^2 \beta^2 |\nabla T|^2}{L} \right) \times \langle \dot{x}_R x_L - \dot{x}_L x_R \rangle. \quad (98)$$

پیوست ۵. قضیه افت‌وخیز تلف

در عدم حضور هرگونه میدان خارجی فرض بر این است که هر کدام از کره‌هایی که در دام پتانسیل فنری گیر افتاده‌اند حرکت میرای مستقل از هم دارند ($\langle \dot{x}_R(t) x_L(t) \rangle = 0$). از طرفی با استفاده از قضیه همپاری انرژی می‌دانیم متوسط دامنه افت‌وخیز کره‌ها به صورت زیر خواهند بود:

اکنون با اعمال رابطه بیکر-هاسدوروف^۱ [46] در رابطه (۱۰۳)

و با توجه به تعریف $\hat{Q} = \hat{I} + \tau \varepsilon \hat{N} + \frac{\beta |\nabla T| L}{\tau} \hat{A}$ می‌توانیم

رابطه (۳۱) را با توجه به بسط بالا بازنویسی کنیم

$$e^{-\frac{(t-s)\hat{Q}}{\tau}} = e^{-\frac{(t-s)}{\tau} \left(\hat{I} + \frac{s-t}{\tau} (\tau \varepsilon \hat{N} + \frac{\beta |\nabla T| L}{\tau} \hat{A}) \right)} \quad (105)$$

$$e^{A+\varepsilon B} = e^A + \varepsilon \int_0^1 e^{\lambda A} B e^{(1-\lambda)A} d\lambda$$

$$= \int_0^1 e^{\lambda A} (I + \varepsilon B) e^{(1-\lambda)A} d\lambda \quad (104)$$

مراجع

1. M Kardar, "Statistical physics of particles", Cambridge University Press (2007).
2. S R De Groot and P Mazur, "Non-equilibrium thermodynamics", Courier Corporation (2013).
3. J K Platten and P Costesèque, *The European Physical Journal*. **15** (2004) 235.
4. C Soret, *Arch Sci Phys Nat*. **2** (1879) 48.
5. C Soret, *Acad. Sci. Paris C. R.* **91** (1880) 289.
6. C Ludwig, *Sitz Math Naturwiss Classe Kaiserlichen Akad Wis*. **20** (1856) 539.
7. C Debuschewitz and W Köhler, *Physical review letters*. **87** (2001) 055901.
8. M E Hovingh, G H Thompson, and J C Giddings, *Analytical Chemistry*. **42** (1970) 195.
9. M E Schimpf and J C Gidding, *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*. **27** (1989) 1317.
10. W Köhler, A Krekhov and W Zimmermann, *Adv. Polym. Sci.* **227** (2010) 145.
11. R Piazza and A Guarino, *Physical Review Letters*. **88** (2002) 208302.
12. S N Rasuli and R Golestanian, *Physical Review Letters*. **101** (2008) 108301.
13. D B Mayer, D Braun and T Franosch, *Physical Review E*. **107** (2023) 044602.
14. D B Mayer, T Franosch and D Braun, *Physical Review Letters*. **130** (2023) 168202.
15. K I Morozov and W Köhler, *Langmuir*. **38** (2022) 2478.
16. S Semenov and M Schimpf, *The Journal of Physical Chemistry B*. **118** (2014) 3115.
17. L D Landau and E M Lifshitz, "Fluid Mechanics: Landau and Lifshitz: Course of Theoretical Physics", Elsevier (2013).
18. T Araki and N Chikakiyo, *Physical Review E*. **103** (2021) 042611.
19. O R Gittus, J D Olarte-Plata and F Bresme, *The European Physical Journal E*. **42** (2019) 1.
20. L Bocquet and E Charlaix, *Chemical Society Reviews*. **39** (2010) 1073.
21. A Wurger, *Physical review letters*. **102** (2009) 078302.
22. B H Zimm, *The journal of chemical physics*. **24** (1956) 269.
23. G Najaf, P Cicuta and S N Rasuli, "Dance of a Polymer Chain Against an External Fluid", Under preparation .
24. G Najafi Gol-Vandani, S Di Leo, J Kotar, P Cicuta, and S N Rasuli, *arXiv:1906.07621* (2019).
25. M Leoni, J Kotar, B Bassetti, P Cicuta and M C Lagomarsino, *Soft Matter*. **5** (2009) 472.
26. A Najafi and R Golestanian, *Physical Review E*. **69** (2004) 062901.
27. J C Meiners and S R Quake, *Physical Review Letters*. **82** (1999) 2211.
28. M Leoni, B Bassetti, J Kotar, P Cicuta and M C Lagomarsino, *Physical Review E*. **81**(2010) 036304.
29. A Béruit, A Petrosyan and S Ciliberto, *Europhysics Letters*. **107** (2014) 60004.
30. I A Martinez, E Roldan, J M R Parrondo and D Peetrov, *Physical Review E*. **87** (2013) 032159.
31. A Swidsinski, *Inflammatory Bowel Diseases*. **13** (2007), 963.
32. B Liebchen, P Monderkamp, B T Hagen and H Löwen, *Phys. Rev. Lett.* **120** (2018) 208002.
33. K Shoele, P S Eastham, *Physical Review Fluids*. **3** (2018) 043101.
34. C Datt and G J Elfring, *Phys. Rev. Lett.*, **123** (2019) 158006.
35. D Das, *Phys. Rev. Fluids*. **8** (2023) L051301.
36. W B Russel, D A Saville and W R Schowalter, "Colloidal dispersions", Cambridge University Press (1991).

۱. Baker-Campbell-Hausdorff formula

37. P Langevin, *Compt. Rendus*. **146** (1908) 530.
38. A K Doolittle, *Journal of Applied Physics*. **22** (1951) 1031.
39. J Hallett, *Proceedings of the Physical Society*. **82** (1963) 1046.
40. S N Rasuli, G Najafi Gol-Vandani and P Cicuta, “Reverse Dance of Two Trapped Beads in External Flow I: A Far Field Approach”, under preparation (2023).
41. G G Stokes, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*. **4** (1851) 8.
42. C W Oseen, “*Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamik*”, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig (1927).
43. E Bringuier, *Philosophical Magazine*. **87** (2007) 873.
44. A Najafi and F Pousaneh, *International Journal of Modern Physics B*. **25** (2011) 4379.
45. J D Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, Wiley (1998).
46. G B Arfcan, H J Weber, and F Harris, “*Mathematical Methods for Physicists*”, Academic Press (2005).
47. C Van den Broeck, R Kawai, and P Meurs, *Physical Review Letters*. **93** (2004) 090601.