



## برهم کنش انتشار دو بیماری با دینامیک‌های متفاوت SIS و SIR

نرگس فردنیا و ناهید عظیمی

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان

پست الکترونیکی: nahid.azimi@iasbs.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱/۲۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۳/۱۱)

### چکیده

برهم کنش بین دو بیماری می‌تواند به صورت رقابت یا همکاری باشد. در این پژوهش به بررسی این برهم کنش‌ها برای دو بیماری که به صورت همزمان در یک جامعه منتشر می‌شوند می‌پردازیم. به این منظور از شبکه دو لایه‌ای استفاده می‌کنیم؛ به گونه‌ای که فرض می‌کنیم هر بیماری در یک لایه از شبکه با ساختاری متفاوت نسبت به لایه دیگر منتشر می‌شود. مسئله را برای حالتی نامتقارن تعریف می‌کنیم که در آن یک بیماری مطابق با دینامیک SIR و بیماری دیگر مطابق با دینامیک SIS منتشر می‌شود. با استفاده از تقریب میدان متوسط ناهمگن، آستانه فراگیری هر یک از بیماری‌ها را در هر دو حالت همکاری و رقابت به دست می‌آوریم. علاوه بر این با تغییر آهنگ انتشار هر یک از بیماری‌ها، فضای فازی به دست می‌آوریم که در بردارنده اطلاعاتی در خصوص میزان شیوع بیماری‌ها است.

**واژه‌های کلیدی:** شبکه‌های چند لایه‌ای، فرایندهای انتشار، آستانه فراگیری، تقریب میدان متوسط، گذار فاز

### ۱. مقدمه

بر بیماری دیگر است، در مسئله نمایان می‌شود. در مقالات متعدد اثر دو بیماری بر یکدیگر به صورت همکاری یا رقابت با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی و همچنین شبیه‌سازی عددی مطالعه شده است و نشان داده شده است که برهم کنش دو بیماری می‌تواند باعث ظهور فازهای جدید، رفتار پسماندی<sup>۲</sup> و ایجاد گذار فازهای مرتبه اول شود [۶-۱۱]. در تعدادی از مقالات، مقیاس زمانی متفاوت برای انتشار دو بیماری در نظر گرفته شده است به طوری که یک بیماری کندتر و دیگری سریع‌تر منتشر می‌شوند [۱۴-۱۱]. به طور خاص در [۱۴] نقش مقیاس زمانی در حالتی که اثر متقابل دو دینامیک انتشار به صورت نامتقارن است (بیماری اول بیماری دوم را تقویت می‌کند در حالی که بیماری دوم باعث تضعیف

مسئله انتشار بیماری از دیر باز توجه بسیاری را به خود جلب کرده است [۱ و ۲]. اهمیت این مسئله با شیوع ویروس کووید-۱۹ در سالی که گذشت بیش از هر زمان دیگری آشکار شده است. جهت پیش‌بینی و روشن ساختن روند انتشار بیماری‌های همه‌گیر از مدل‌سازی ریاضی به عنوان یک ابزار مفید استفاده شده است. مدل‌های اولیه بر اساس فرض همگن بودن جمعیت یک جامعه معرفی شدند و سپس این مدل‌ها با در نظر گرفتن ساختارهای ارتباطی مختلف بین افراد به واقعیت نزدیک‌تر شدند [۳-۵]. یکی از موضوعات مطرح شده در این زمینه، انتشار چند بیماری در یک جامعه است. در این حالت پیچیدگی‌های جدیدی که ناشی از اثر یک بیماری

بیماری اول می‌شود) مطالعه شده است و در رفتار چگالی افراد مبتلا به هر دو بیماری نوسانات زودگذری تا قبل از رسیدن به حالت پایای سیستم مشاهده شده است.

به منظور مطالعه اثر دو فرایند انتشار بر یکدیگر، شبکه‌های چند لایه‌ای ابزار مناسبی هستند و این امکان را فراهم می‌کنند که انتقال یک بیماری از راه‌های ارتباطی مختلف یا انتشار دو یا چند بیماری با دینامیک‌ها و نرخ‌های انتشار متفاوت را مطالعه کرد [۲۲-۱۵]. به عنوان مثال یک مدل مطرح شده در این زمینه، مدلی است که در آن دو بیماری به صورت همزمان با دینامیک سالم-بیمار-سالم (SIS) یا سالم-بیمار-بهبود یافته (SIR) بر روی شبکه دولایه‌ای منتشر می‌شوند [۲۰]. در این مدل فرض می‌شود هر دو بیماری با قاعده و دینامیک یکسانی گسترش می‌یابند. با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های دو بیماری و با استفاده از معادلات تحول زمانی سیستم در تقریب میدان متوسط ناهمگن، آستانه‌های فراگیری بیماری به دست می‌آیند. همچنین ساختارهای مختلف شبکه و تأثیر اندازه شبکه بر میزان شیوع به کمک شبیه‌سازی بررسی شده است. اگر چه این مدل به طور خاص به انتشار دو بیماری می‌پردازد، اما می‌توان آن را به هر نوع فرایند انتشار مانند انتشار اطلاعات، شایعات و ایده‌ها تعمیم داد. به عنوان مثال می‌توان به برهم‌کنش انتشار بیماری در یک لایه و انتشار اطلاعات در مورد بیماری در لایه دیگر اشاره کرد [۱۶].

در واقعیت هر یک از فرایندهای انتشار می‌توانند با دینامیکی خاص و با آهنگ‌های مختلف منتشر شوند. به عنوان مثال اگر در مورد برهم‌کنش دو نوع بیماری متفاوت صحبت می‌کنیم، یکی از بیماری‌ها می‌تواند از نوعی باشد که افراد بعد از ابتلا نسبت به آن مصون می‌شوند اما بیماری دیگر می‌تواند به گونه‌ای باشد که افراد بعد از بهبود مجدداً بتوانند مستعد گرفتن بیماری شوند. بر همین اساس در این مقاله به بررسی مدل نامتقارنی می‌پردازیم که در آن یک بیماری با دینامیک SIR و بیماری دیگر با دینامیک SIS منتشر می‌شوند و خواهیم دید این برهم‌کنش نامتقارن چه اثری بر میزان انتشار و آستانه فراگیری هر یک از بیماری‌ها خواهد گذاشت. در

اینجا هم مدل و نتایج قابل تعمیم به هر نوع فرایند انتشار است.

## ۲. مدل

در این مسئله برای بررسی اثر برهم‌کنش دو بیماری که در یک جمعیت میزبان و به صورت همزمان منتشر می‌شوند، یک شبکه دو لایه‌ای را در نظر می‌گیریم. بیماری ۱ در لایه اول مطابق با دینامیک SIR و بیماری ۲ در لایه دوم مطابق با دینامیک SIS انتشار می‌یابند. همان طور که هر بیماری می‌تواند با دینامیک مربوط به خود شیوع یابد، هر لایه از این شبکه نیز می‌تواند ساختار مخصوص به خود را داشته باشد. این ساختار نشان دهنده ارتباط‌های مختلف در هر لایه شبکه است. فرض می‌کنیم رئوس در این دو لایه به صورت نظیر به نظیر به یکدیگر متصل‌اند (شبکه مولتی پلکس<sup>۳</sup>). به این ترتیب متوسط درجه رئوس را در شبکه اول به صورت  $\langle k \rangle = \sum_{k,l} P(k,l)k$  و در شبکه دوم به صورت  $\langle l \rangle = \sum_{k,l} P(k,l)l$  تعریف می‌کنیم که در آن  $P(k,l)$  احتمال این را نشان می‌دهد که یک رأس در لایه اول درجه  $k$  و در لایه دوم درجه  $l$  داشته باشد.

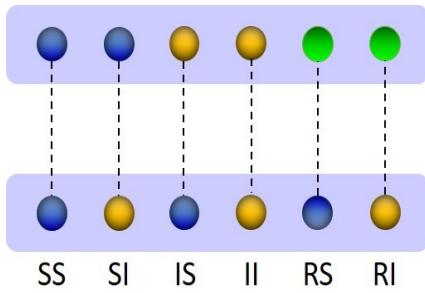
مطابق شکل ۱، هر رأس (فرد) با توجه به وضعیتی که در دو لایه دارد، می‌تواند در یکی از این ۶ حالت قرار بگیرد: ۱-  $SS(k,l)$ ، حالتی که فرد در هر دو لایه سالم است. ۲-  $SI(k,l)$ ، حالتی که فرد مبتلا به بیماری ۲ است اما نسبت به بیماری ۱ سالم است. ۳-  $IS(k,l)$ ، حالتی که فرد مبتلا به بیماری ۱ و نسبت به بیماری ۲ سالم است. ۴-  $II(k,l)$ ، حالتی که فرد مبتلا به هر دو بیماری است. ۵-  $RS(k,l)$ ، حالتی است که فرد از بیماری ۱ بهبود یافته و نسبت به بیماری ۲ سالم است و در نهایت ۶-  $RI(k,l)$ ، حالتی که فرد از بیماری ۱ بهبود یافته و به بیماری ۲ مبتلا است.

گذارهای مجاز در شکل ۲ نمایش داده شده است. در این مدل فرض می‌کنیم که گذار مستقیم از حالت  $SS(k,l)$  به  $II(k,l)$  مجاز نیست؛ به این معنی که شخص کاملاً سالم نمی‌تواند در یک گام زمانی و به صورت همزمان به هر دو

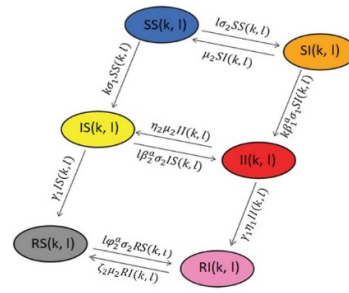
۱. Susceptible- Infected- Susceptible

۲. Susceptible- Infected- Recovered

۳. Multiplex network



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) گذارهای مجاز.



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) حالت‌های ممکن برای هر فرد.

جدول ۱. پارامترهای دینامیکی.

پارامتر	تفسیر
$\lambda_1$	نرخ پخش بیماری ۱
$\lambda_2$	نرخ پخش بیماری ۲
$\gamma_1$	نرخ بهبودی بیماری ۱
$\mu_2$	نرخ سالم شدن از بیماری ۲
$\beta_1^a$	ضریب تغییر در نرخ پخش بیماری ۱ برای رأسی که مبتلا به بیماری ۲ است.
$\beta_1^b$	ضریب تغییر در نرخ پخش بیماری ۱ زمانی که ناقل به بیماری ۲ مبتلاست.
$\beta_2^a$	ضریب تغییر در نرخ پخش بیماری ۲ برای رأسی که مبتلا به بیماری ۱ است.
$\beta_2^b$	ضریب تغییر در نرخ پخش بیماری ۲ زمانی که ناقل به بیماری ۱ مبتلاست.
$\phi_1^a$	ضریب تغییر در نرخ پخش بیماری ۲ برای رأسی که از بیماری ۱ بهبود یافته است.
$\phi_1^b$	ضریب تغییر در نرخ پخش بیماری ۲ زمانی که فرد ناقل از بیماری ۱ بهبود یافته است.
$\zeta_1$	ضریب تغییر در نرخ سالم شدن از بیماری ۲ برای رأسی که از بیماری ۱ بهبود یافته است.
$\eta_1$	ضریب تغییر در نرخ بهبودی از بیماری ۱ برای رأسی که مبتلا به بیماری ۲ است.
$\eta_2$	ضریب تغییر در نرخ سالم شدن از بیماری ۲ برای رأسی که به بیماری ۱ مبتلاست.
$\sigma_1$	$\lambda_1(\theta_1^{IS} + \beta_1^b \theta_1^{II})$
$\sigma_2$	$\lambda_2(\theta_2^{SI} + \beta_2^b \theta_2^{II} + \phi_2^b \theta_2^{RI})$

$$\dot{RS}(k, l) = \gamma_1 IS(k, l) - \phi_1^a l \sigma_1 RS(k, l) + \zeta_1 \mu_2 RI(k, l), \quad (5)$$

$$\dot{RI}(k, l) = \phi_1^a l \sigma_1 RS(k, l) + \eta_1 \gamma_1 II(k, l) - \zeta_1 \mu_2 RI(k, l), \quad (6)$$

شرط بهنجارش، یعنی

$$SS(k, l) + IS(k, l) + SI(k, l) + II(k, l) + RS(k, l) + RI(k, l) = 1,$$

برای این معادلات برقرار است. با استفاده از تحلیل سیستم‌های دینامیکی، می‌توان نقاط ثابت پایدار مدل و آستانه فراگیری را بررسی کرد.

### ۳. آستانه فراگیری

برای به دست آوردن آستانه فراگیری بیماری ۱، دینامیک

بیماری مبتلا شود. پارامترهای دینامیکی در جدول ۱ معرفی شده‌اند. همان طور که مشاهده می‌شود این پارامترها بستگی به این دارند که افراد فقط درگیر یک بیماری هستند یا مبتلا به هر دو بیماری. اکنون می‌توان با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های بین رؤس، تحول زمانی را در تقریب میدان متوسط ناهمگن [۳] به صورت معادلات (۶) - (۱) خلاصه کرد:

$$\dot{SS}(k, l) = (k\sigma_1 + l\sigma_2) SS(k, l) + \mu_2 SI(k, l), \quad (1)$$

$$\dot{IS}(k, l) = k\sigma_1 SS(k, l) - \beta_1^a l \sigma_1 IS(k, l) - \gamma_1 IS(k, l) + \eta_2 \mu_2 II(k, l), \quad (2)$$

$$\dot{SI}(k, l) = l\sigma_2 SS(k, l) - \beta_2^a k\sigma_1 SI(k, l) - \mu_2 SI(k, l), \quad (3)$$

$$\dot{II}(k, l) = \beta_1^a k\sigma_1 SI(k, l) + \beta_2^a l \sigma_2 IS(k, l) - (\eta_1 \gamma_1 + \eta_2 \mu_2) II(k, l), \quad (4)$$

جدول ۲. پارامترهای احتمال.

$\theta_1^{IS} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)kIS(k,l)}{\sum_{k,l} P(k,l)k}$	احتمال این که رأس انتهایی یک یال در حالت IS باشد.
$\theta_1^{II} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)kII(k,l)}{\sum_{k,l} P(k,l)k}$	احتمال این که رأس انتهایی یک یال در حالت II باشد. (لایه اول)
$\theta_1^{SI} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)lSI(k,l)}{\sum_{k,l} P(k,l)l}$	احتمال این که رأس انتهایی یک یال در حالت SI باشد.
$\theta_1^{II} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)lII(k,l)}{\sum_{k,l} P(k,l)l}$	احتمال این که رأس انتهایی یک یال در حالت II باشد. (لایه دوم)
$\theta_1^{RI} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)lRI(k,l)}{\sum_{k,l} P(k,l)l}$	احتمال این که رأس انتهایی یک یال در حالت RI باشد.

اکنون با در نظر گرفتن معادله  $(\theta_1^{IS}, \theta_1^{II}) = f(\theta_1^{IS}, \theta_1^{II})$  و به کمک ماتریس ژاکوبی J قادر خواهیم بود پایداری سیستم را بررسی کنیم:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\langle k^2 SS \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_1 - \frac{\beta_1^a \langle kl \rangle}{\langle k \rangle} \sigma_1 - \gamma_1 \frac{\langle k^2 SS \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_1 \beta_1^b + (\eta_1 \mu_1) \\ \frac{\langle kl \rangle}{\langle k \rangle} \beta_1^a \sigma_1 + \frac{\langle k^2 SI \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_1 \beta_1^a \\ \frac{\langle k^2 SI \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_1 \beta_1^a \beta_1^b - (\eta_1 \gamma_1 + \eta_1 \mu_1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

دو ویژه مقدار این ماتریس در محدوده  $\lambda_1 < \lambda_{1,2}^c$  منفی هستند به طوری که پارامتر  $\lambda_{1,2}^c$  با رابطه زیر داده می شود:

$$\lambda_{1,2}^c = \frac{k\gamma_1 (k\gamma_1 \eta_1 + k\eta_1 \mu_1 + kl\beta_1^a \eta_1 \sigma_1)}{(k^2 SS + k^2 SI\beta_1^a) (k\eta_1 \mu_1 + kl\beta_1^b \beta_1^a \sigma_1) + k\gamma_1 (k^2 SS \eta_1 + k^2 SI\beta_1^a \beta_1^b)} \quad (10)$$

نامگذاری می کنیم.

اگر همین مراحل را برای بیماری ۲ و حول نقطه  $(SI(k,l), II(k,l), RI(k,l)) = (0,0,0)$  که در آن هنوز بیماری ۲ وارد شبکه نشده است، انجام دهیم آستانه اولیه این بیماری برابر با  $\lambda_{1,1}^c = \frac{\mu_2 \langle l \rangle}{\langle l^2 \rangle}$  و آستانه ثانویه آن برابر با رابطه (۱۱) می شود:

$$\lambda_{1,2}^c = \frac{((\eta_1 \mu_1 + \eta_1 \gamma_1) (\mu_1 l + \beta_1^a \sigma_1 kl) \zeta_1 \mu_1 l)}{((\eta_1 \mu_1 + \eta_1 \gamma_1) (\zeta_1 \mu_1 l^2 SS + \phi_1^a \phi_1^b l^2 RS (\mu_1 l + \beta_1^a kl \sigma_1)) + (\beta_1^b \zeta_1 \mu_1 + \phi_1^b \eta_1 \gamma_1) (\beta_1^a kl \sigma_1 l^2 SS + \beta_1^a (\mu_1 l + \beta_1^a kl \sigma_1) l^2 IS))} \quad (11)$$

سیستم را حول نقطه ثابت  $(IS(k,l), II(k,l)) = (0,0)$  که در آن هنوز بیماری ۱ وارد سیستم نشده است، مطالعه می کنیم. هر رأس می تواند نسبت به بیماری ۲ سالم یا بیمار باشد. به عبارت دیگر فرض می کنیم بیماری ۲ در سیستم وجود دارد. به منظور کاهش بعد سیستم می توانیم معادلات تحول را برای متغیرهای  $(\theta_1^{IS}, \theta_1^{II})$  بنویسیم:

$$\dot{\theta}_1^{IS} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)k IS}{\langle k \rangle} = \frac{\langle k^2 SS \rangle}{\langle k \rangle} \lambda_1 \quad (7)$$

$$(\theta_1^{IS} + \beta_1^b \theta_1^{II}) - \beta_1^a \frac{\langle kl \rangle}{\langle k \rangle} \theta_1^{IS} \sigma_1 - \gamma_1 \theta_1^{IS} + \eta_1 \mu_1 \theta_1^{II}$$

$$\dot{\theta}_1^{II} = \frac{\sum_{k,l} P(k,l)k II}{\langle k \rangle} = \frac{\langle kl \rangle}{\langle k \rangle} \theta_1^{IS} \beta_1^a \sigma_1 + \frac{\langle k^2 SI \rangle}{\langle k \rangle} \beta_1^a \lambda_1 (\theta_1^{IS} + \beta_1^b \theta_1^{II}) - (\eta_1 \gamma_1 + \eta_1 \mu_1) \theta_1^{II} \quad (8)$$

بنابراین در محدوده  $\lambda_1 < \lambda_{1,2}^c$ ، نقطه  $(0,0)$  یک نقطه ثابت پایدار است.  $\lambda_{1,2}^c$  را آستانه ثانویه انتشار بیماری ۱ می نامیم. دلیل این نامگذاری وجود بیماری ۲ در سیستم است که بر آستانه انتشار بیماری ۱ تأثیر گذار است. اگر بیماری ۲ در سیستم وجود نداشته باشد، آستانه فراگیری بیماری ۱ همانند حالت معمول بدون برهم کنش، برابر با  $\lambda_{1,1}^c = \gamma_1 \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$  خواهد بود [۲۳]. این آستانه فراگیری را آستانه اولیه بیماری ۱

ثابت (۵) نشان دهندهٔ حالتی است که فقط بیماری دوم در سیستم وجود دارد.

اگر در نقطهٔ ثابت (۱) ماتریس ژاکوبی را محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 l_0 - \mu_1 & 0 & \beta_1^b \lambda_1 l_0 & 0 & \phi_1^b \lambda_1 l_0 \\ 0 & k_0 \lambda_1 - \gamma_1 & \beta_1^b k_0 \lambda_1 + \eta_0 \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta_1 \gamma_1 - \eta_1 \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \zeta_2 \mu_2 \\ 0 & 0 & \gamma_1 \eta_1 & 0 & -\zeta_2 \mu_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ویژه مقادیر این ماتریس برابرند با:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 0, \\ \zeta_2 &= k_0 \lambda_1 - \gamma_1, \\ \zeta_3 &= \lambda_1 l_0 - \mu_1 \\ \zeta_4 &= -\zeta_2 \mu_2, \quad \zeta_5 = -(\eta_1 \gamma_1 + \eta_1 \mu_1) \end{aligned} \quad (13)$$

اگر  $\lambda_1 < \lambda_{1,1}^c = \frac{\gamma_1}{k_0}$  و  $\lambda_2 < \lambda_{2,1}^c = \frac{\mu_1}{l_0}$  باشد، ویژه مقادیر منفی هستند و نقطهٔ ثابت (۱) پایدار است. به عبارت دیگر اگر  $\lambda_1 > \lambda_{1,1}^c$  باشد بیماری ۱ و اگر  $\lambda_2 > \lambda_{2,1}^c$  باشد، بیماری ۲ شیوع می‌یابد. این دو مقدار معادل با آستانهٔ اولیهٔ فراگیری هستند که در بخش قبل به دست آوردیم.

با انجام عملیات مشابه می‌توان محدودهٔ پایداری چهار نقطهٔ ثابت دیگر را نیز به دست آورد. در نقطهٔ ثابت (۲)، به کمک شرط پایداری، آستانهٔ ثانویهٔ فراگیری بیماری ۲ به صورت  $\lambda_{2,2}^c = -\frac{\zeta_2 \mu_2}{l_0 (\zeta_2 \nu_1 - \zeta_2 + \nu_1 \phi_1^a \phi_2^b)}$  به دست می‌آید. از آنجایی که  $\lambda_{2,2}^c$  نمی‌تواند منفی باشد، برای برقراری این رابطه لازم است شرط  $\zeta_2 > \frac{\phi_1^a \phi_2^b \nu_1}{1 - \nu_1}$  برقرار باشد. در نقطهٔ ثابت (۳)، اگر دو شرط

$$\lambda_1 < \lambda_{1,2}^c = \frac{\mu_1}{\beta_1^a k_0 (\nu_1 + 1)}$$

$$\lambda_2 < \lambda_{2,2}^c = -\frac{\zeta_2 \mu_2 (\eta_1 \gamma_1 + \eta_1 \mu_1)}{l_0 \left( \phi_1^b \gamma_1 \eta_1 (-\beta_1^a + (\beta_1^a - \phi_1^a) \nu_1) + \mu_1 (\beta_1^a \beta_1^b \zeta_2 (\nu_1 - 1) - \phi_1^a \phi_2^b \eta_1 \nu_1) \right)}$$

معادل با آستانهٔ ثانویهٔ فراگیری بیماری ۱ است، پایدار است. همچنین در این نقطه  $\lambda_{2,2}^c = \lambda_{2,1}^c \approx 0$  است. در نهایت در نقطهٔ ثابت (۵)، لازم است دو شرط زیر برقرار باشند:

همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر آستانه به واسطهٔ پارامترهای دینامیکی به هر دو بیماری مرتبط می‌شوند. همچنین در روابط (۱۰) و (۱۱) متوسط کمیت‌ها هم ظاهر شده است که برای محاسبهٔ آنها نیاز به تابع توزیع درجه شبکه است. در ادامه به بررسی دینامیک SIR-SIS بر روی دو ساختار متفاوت شبکه منظم و شبکهٔ تصادفی اردوش-رنی می‌پردازیم.

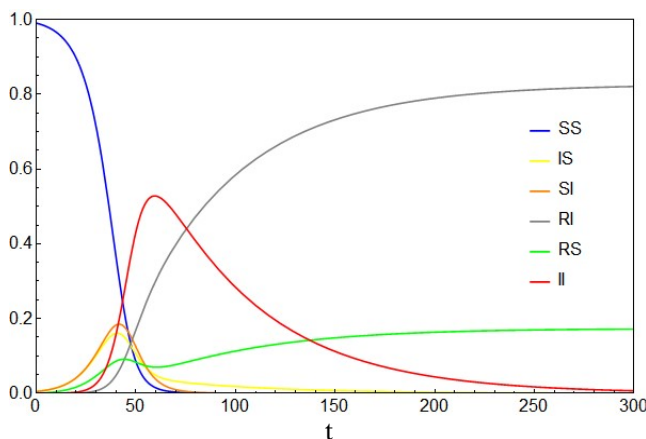
#### ۴. مدل SIR-SIS بر روی شبکهٔ منظم

در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که بیماری‌ها بر روی شبکهٔ منظم منتشر می‌شوند. برای به دست آوردن آستانهٔ فراگیری، در گام نخست تابع توزیع شبکهٔ منظم، یعنی  $P(k, l) = \delta(k - k_0) \delta(l - l_0)$  را در معادلات تحول زمانی (۶) جایگذاری می‌کنیم و نقاط ثابت سیستم را به دست می‌آوریم. این سیستم ۵ نقطهٔ ثابت دارد:

$$\begin{aligned} (SI^*, IS^*, II^*, RS^*, RI^*) = & \\ \begin{cases} (0, 0, 0, 0, 0) & \rightarrow (1) \\ (0, 0, 0, \nu_1, 0) & \rightarrow (2) \\ (0, 1 - \nu_1, 0, \nu_1, 0) & \rightarrow (3) \\ \left( 0, 1 - \nu_1 - \left( \frac{\gamma_1}{k_0 \lambda_1} \right), 0, \nu_1, 0 \right) & \rightarrow (4) \\ \left( 1 - \frac{\mu_1}{l_0 \lambda_1}, 0, 0, 0, 0 \right) & \rightarrow (5) \end{cases} \end{aligned}$$

نقطهٔ ثابت (۱) جایی است که در ابتدای فرایند انتشار هستیم و هیچ یک از بیماری‌ها وجود ندارند. نقطهٔ ثابت (۲) حالتی را نشان می‌دهد که در شبکه، افراد بهبود یافته از بیماری اول را داریم اما بیماری دوم وجود ندارد. در نقطهٔ ثابت (۳) و (۴) هم افراد مبتلا و هم بهبود یافته از بیماری اول وجود دارند و همچنان افراد نسبت به بیماری دوم سالم هستند و نهایتاً نقطهٔ

برقرار باشند در پایداری هستیم. در این نقطه، آستانهٔ ثانویهٔ فراگیری بیماری ۱ و  $\lambda_{2,2}^c = \lambda_{2,1}^c$  آستانهٔ ثانویهٔ فراگیری بیماری ۲ هستند. نقطهٔ ثابت (۴)، به ازای  $\lambda_1 < \lambda_{1,2}^c = \frac{\gamma_1}{k_0 (1 - \nu_1)}$  که



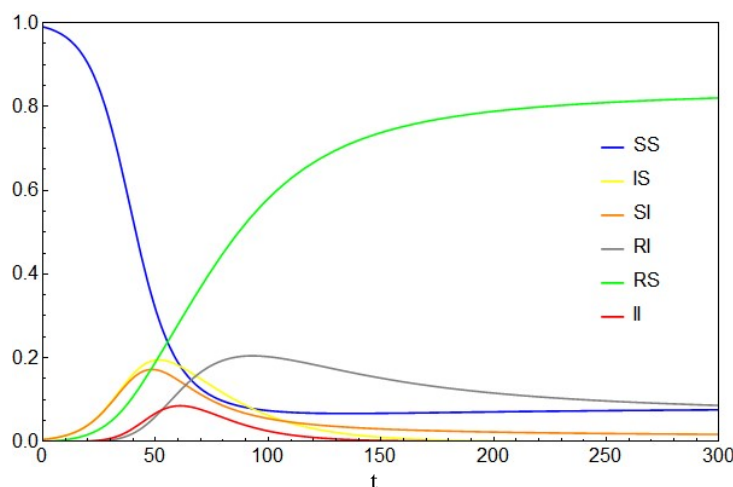
شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول مدل SIR-SIS بر حسب زمان در حالت همکاری دو بیماری. متوسط درجه رئوس در هر دو شبکه منظم  $k = l = 8$  است. پارامترهای دینامیکی برابرند با:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.02$ ،  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0.05$ ،  $\gamma_1 = \mu_2 = 0.05$ ،  $\beta_1^a = \beta_1^b = \beta_2^a = \beta_2^b = 1/3$ ،  $\eta_1 = \eta_2 = 0.33$ ،  $\phi_2^a = \phi_2^b = 1/2$  و  $\zeta_2 = 0.8$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 < \lambda_{2,2}^c = \frac{\mu_2(\phi_2^a - \zeta_2)}{\phi_2^a l_0} \\ \lambda_1 < \lambda_{1,1}^c = \frac{l_1 \gamma_1 \lambda_2 (\gamma_1 \eta_1 + \beta_1^a l_1 \eta_2 \lambda_2 + (\eta_2 - \beta_2^a \eta_1) \mu_2)}{k_0 (\beta_1^a \beta_1^b \beta_2^a l_1^2 \lambda_2^2 + \mu_2 (\gamma_1 (\eta_1 - \beta_1^a \beta_1^b) + (\beta_1^a - 1) (\beta_1^b \beta_2^a - \eta_2) \mu_2) + l_1 \lambda_2 (\beta_1^a \beta_1^b \gamma_1 + (\beta_1^b \beta_2^a - 2 \beta_1^a \beta_1^b \beta_2^a + \beta_1^a \eta_2) \mu_2)} \end{array} \right. \quad (14)$$

حالت SS برمی گردند یا به بیماری ۱ نیز مبتلا می شوند. اما دو بیماری با یکدیگر همکاری دارند، یعنی به شیوع یکدیگر کمک می کنند. پس رفتن به حالت II برای هر دوی آنها محتمل تر از بهبودی و سالم شدن است. این اتفاق در بالاتر قرار گرفتن منحنی II به خوبی دیده می شود. در نهایت، با پیشروی دینامیک، بیشتر افراد از بیماری ۱ بهبود می یابند و در عین حال مبتلا به بیماری ۲ باقی می ماند. به عبارت دیگر در پایان بیشتر جمعیت در حالت RI قرار می گیرند.

در شکل ۴، حالت رقابت دو بیماری را در نظر می گیریم. در رقابت متقابل اگر فردی به یکی از بیماری ها مبتلا شود با احتمال کمتری به بیماری دیگر مبتلا می شود. پس برخلاف حالت قبل، در اینجا قله منحنی II نسبت به سایر منحنی ها در حالت پایین تری قرار می گیرد. با گذشت زمان بیشتر افرادی که به بیماری ۲ مبتلا شده بودند (هم آنهایی که در حالت SI قرار دارند و هم آنهایی که در حالت II قرار دارند) به حالت سالم برمی گردند و افرادی که مبتلا به بیماری ۱ بوده اند از آن بهبود می یابند. به این ترتیب بیشترین جمعیت مربوط به رئوس RS خواهد بود.

بر طبق این شروط آستانه ثانویه بیماری ۲ در حالت همکاری برابر با  $\lambda_{2,2}^c$  و آستانه ثانویه بیماری ۱ برابر با  $\lambda_{1,1}^c$  است. میزان شیوع هر یکی از بیماری ها را می توانیم با استفاده از معادلات (۶)–(۱) به دست آوریم. به این منظور ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که در آن دو بیماری که با هم همکاری متقابل می کنند، با مقادیر اولیه برابر همزمان وارد شبکه شوند. در همکاری متقابل، فرض می شود که افرادی که به یکی از بیماری ها مبتلا هستند نسبت به کسانی که این بیماری را ندارند، با احتمال بیشتری به بیماری دیگر مبتلا می شوند و اگر چنین فردی به بیماری دیگر مبتلا شود دیرتر به حالت سالم باز می شود. شکل ۳ تحول زمانی هر یک از حالت های سیستم را نشان می دهد. مطابق با نتیجه به دست آمده، افرادی که تنها به یک بیماری مبتلا هستند (SI و IS)، تقریباً مقدار یکسانی دارند. با گذشت زمان، دو سرنوشت در انتظار افرادی است که در گروه IS قرار گرفته اند به طوری که یا از بیماری ۱ بهبود می یابند و به حالت RS می روند یا به بیماری ۲ نیز مبتلا می شوند و به حالت II می روند. از طرف دیگر افرادی که در گروه SI قرار دارند، یا نسبت به بیماری ۲ سالم می شوند و به



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول مدل SIR-SIS بر حسب زمان در حالت رقابت دو بیماری. متوسط درجهٔ رئوس در هر دو شبکهٔ منظم  $k=l=8$  است. پارامترهای دینامیکی برابرند با:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.02$ ،  $\gamma_1 = \mu_2 = 0.05$ ،  $\beta_1^a = \beta_1^b = \beta_2^a = \beta_2^b = 0.18$ ،  $\phi_2^a = \phi_2^b = 0.06$  و  $\eta_1 = \eta_2 = \zeta_2 = 1/3$ .

۵.۵) (ستون ب). در این صورت بیماری ۲ شیوع پیدا می‌کند. تا قبل از فراگیری بیماری ۱، آستانهٔ بیماری ۲ را که با خط چین در ستون ب ردیف دوم، مشخص شده است را آستانهٔ اولیهٔ بیماری ۲ می‌نامیم. اما همان‌طور که مشاهده می‌شود در ناحیه ای که بیماری ۱ شیوع پیدا کرده است، به دلیل همکاری دو بیماری، پیشروی بیماری ۲ بیشتر است و آستانهٔ آن که با خط پر مشخص شده است کوچک‌تر می‌شود. این آستانه را آستانهٔ ثانویهٔ بیماری ۲ می‌نامیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم تغییری در آستانهٔ بیماری ۱ ایجاد نمی‌شود. مجدداً در ستون پ بعد از به حالت پایا رسیدن سیستم، برای بار دوم بذر بیماری ۱ وارد شبکه می‌شود و این بار چون در مرحلهٔ قبل بیماری ۲ به فراگیری رسیده بود، آستانهٔ ثانویهٔ بیماری ۱ نیز مشاهده می‌شود (خط پر).

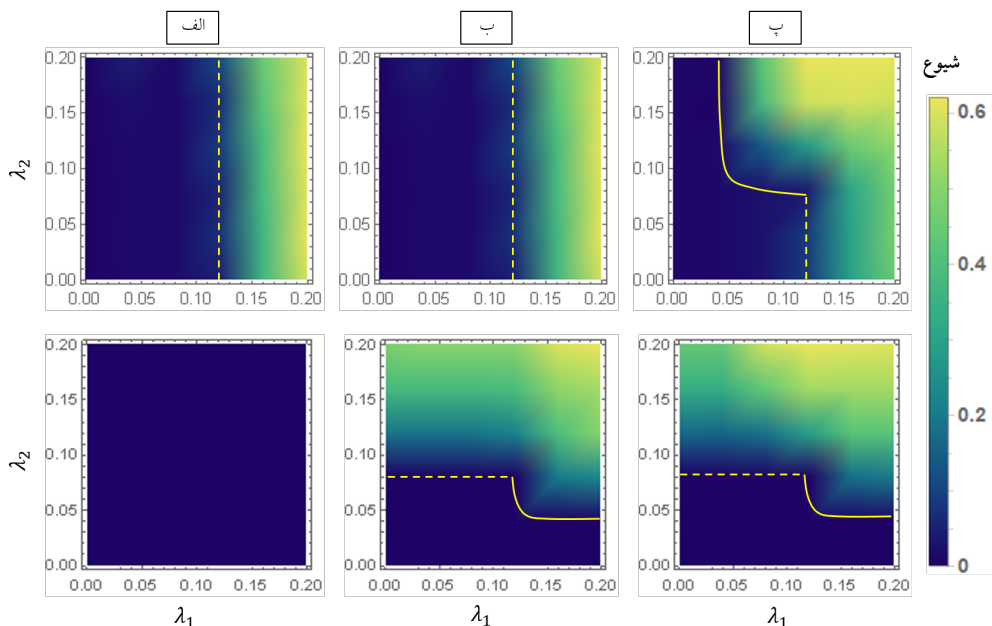
در شکل ۶، تحول زمانی چگالی جمعیت‌های مختلف متناظر با شکل ۵ و برای نرخ پخش بیماری  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.075$  نشان داده شده است. در این شکل دو زمان با خط چین مشخص شده‌اند: خط چین اول، زمان ورود بیماری ۲ است و خط چین دوم زمانی است که بیماری ۱ برای بار دوم وارد شبکه می‌شود. در این نمودار مشاهده می‌کنیم که چگونه حضور یک بیماری در سیستم می‌تواند، میزان انتشار بیماری دیگر را بالا ببرد.

رقابت دو بیماری ایدهٔ بسیار مهمی در ایمنی از

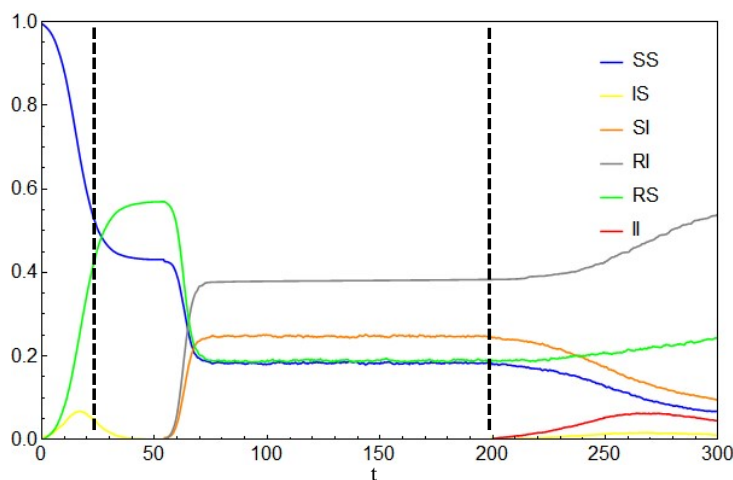
#### ۵. مدل SIR-SIS بر روی شبکهٔ اردوش - رنیی

در این بخش به بررسی برهم‌کنش دو بیماری که بر روی دو شبکهٔ اردوش - رنیی منتشر می‌شوند می‌پردازیم. در بخش اول با استفاده از شبیه‌سازی عددی، نمودار فاز را برای دو حالت همکاری و رقابت رسم می‌کنیم و در بخش دوم تأثیر زمان ورود بیماری بر آستانهٔ فراگیری را در این دو حالت بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم در هر گام زمانی تنها یک فرایند گذار (ابتلا یا بهبود) اتفاق می‌افتد. در نمودار فازهای رسم شده (شکل ۵، ۷ و ۹)، خط چین‌ها آستانهٔ اولیهٔ فراگیری و خط‌های ممتد آستانهٔ ثانویهٔ فراگیری را نشان می‌دهد. همچنین، در ردیف اول رنگ‌ها میزان شیوع بیماری اول  $R_1 = \sum_{k,l} P(k,l)(RS+RI)$  و در ردیف دوم میزان شیوع بیماری دوم  $I_2 = \sum_{k,l} P(k,l)(SI+II+RI)$  را نشان می‌دهند.

شکل ۵ مربوط به همکاری دو بیماری است. این شکل ۳ مرحله دارد: در مرحلهٔ اول بذر اولیهٔ بیماری ۱ را وارد سیستم می‌کنیم (ستون الف) و اجازه می‌دهیم سیستم به حالت پایا برسد. واضح است که بیماری ۲ شیوع پیدا نمی‌کند، اما برای بیماری ۱ بعد از یک مقدار مشخص آستانهٔ فراگیری اتفاق می‌افتد. این مقدار آستانه که با خط چین در ستون الف مشخص شده است، آستانهٔ اولیهٔ بیماری ۱ است، در مرحلهٔ دوم بذر بیماری ۲ را وارد شبکه می‌کنیم



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار فاز مدل در حالت همکاری دو بیماری بر روی دو شبکه اردوش-رنی با  $N_1 = N_2 = 5000$  و  $\langle l \rangle = 8, k = 7$ . سطر اول میزان شیوع بیماری ۱ و سطر دوم میزان شیوع بیماری ۲ را در فضای  $(\lambda_1, \lambda_2)$  نشان می‌دهند. در ستون (الف) بذر بیماری ۱ ( $IS=0.005$ )، در ستون (ب) بذر بیماری ۲ ( $SI=0.005$ ) و در ستون (پ) مجدداً بذر بیماری ۱ ( $IS=0.005$ )، در حالت پایا به سیستم اضافه شده است. پارامترهای دینامیکی برابرند با:  $\phi_1^a = \phi_2^b = 1/2, \zeta_2 = 0.8, \gamma_1 = \mu_2 = 0.75, \beta_1^a = \beta_1^b = \beta_2^a = \beta_2^b = 1/3$  و  $\eta_1 = \eta_2 = 0.8$ .

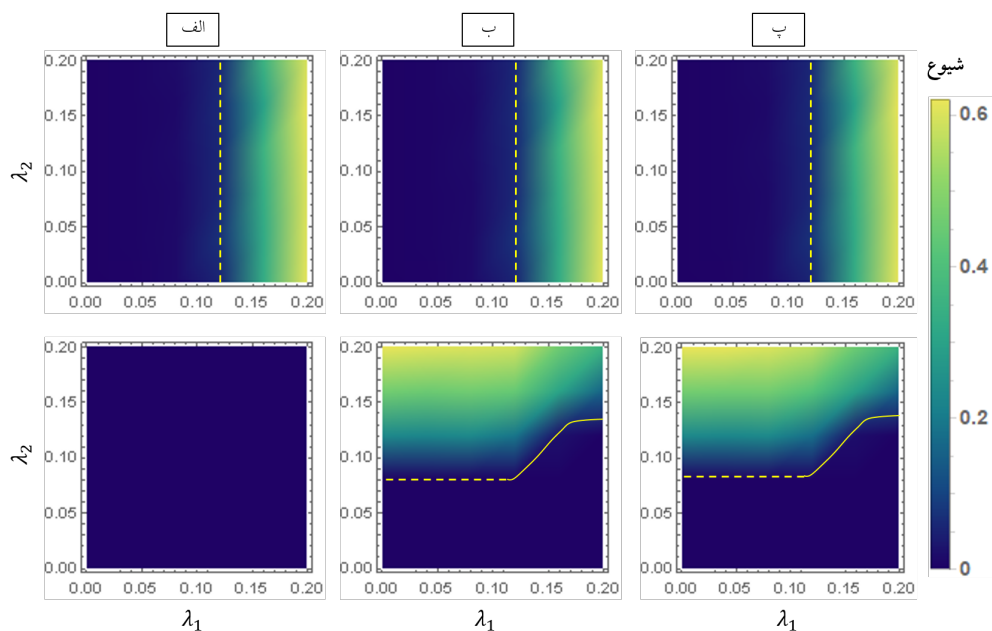


شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول زمانی مدل SIR-SIS در حالت همکاری دو بیماری و به ازای  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.75$  مشخصات شبکه و سایر پارامترهای دینامیکی مطابق با شکل ۵ هستند. خط چین اول زمان ورود بیماری ۲ است و خط چین دوم جایی است که بیماری ۱ را مجدداً وارد می‌کنیم.

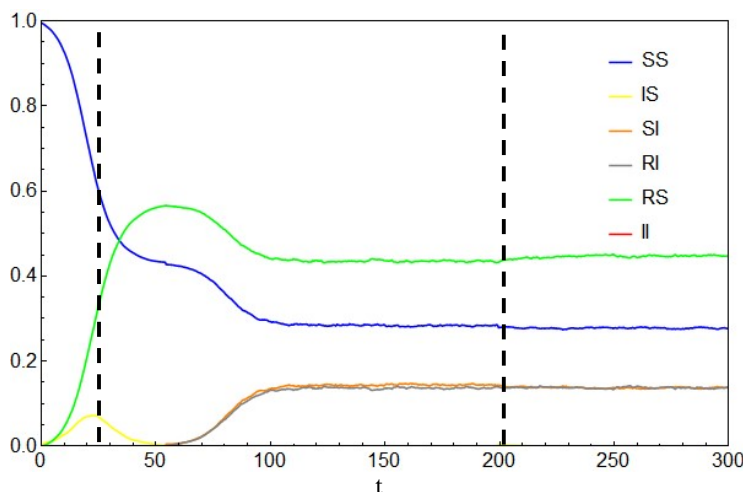
همانند شکل ۵ است. همان طور که مشاهده می‌شود، در اینجا نیز در ستون الف که تنها بیماری ۱ وجود دارد، آستانه اولیه انتشار این بیماری به دست می‌آید. در ستون ب، در شروع این مرحله از دینامیک، رئوس در حالت RS و SS قرار دارند. با ورود بیماری ۲، این رئوس به ترتیب به حالت RI و SI می‌آیند. پس در جمعیت  $R_1$  تفاوتی ایجاد نمی‌شود. اما در

بیماری‌های سهمگین با ابتلا به گونه ضعیف‌تری از بیماری مشابه است. اما در اینجا وضعیت کمی پیچیده‌تر می‌شود، زیرا در این حالت این که کدام بیماری در ابتدا وارد شبکه شود حائز اهمیت است. به همین دلیل برای این مسئله دو نمودار فاز رسم می‌کنیم. در شکل ۷، ابتدا بیماری ۱ وارد شبکه شده است (ستون الف،  $IS=0.005$ ) و مراحل ورود بیماری درست





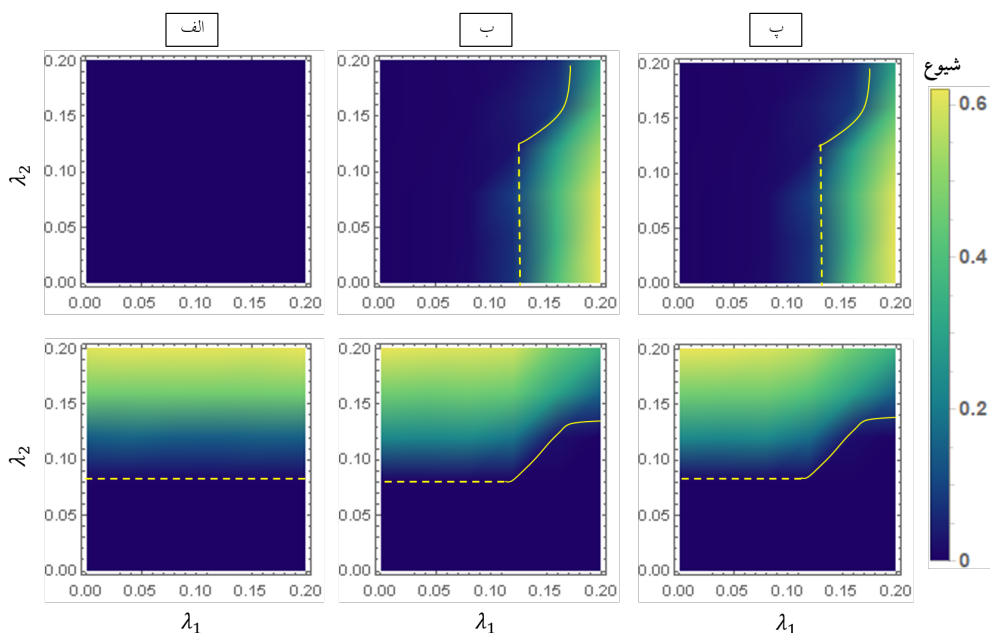
شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار فاز مدل در حالت رقابت دو بیماری بر روی دو شبکه اردوش-رنی با  $N_1 = N_2 = 5000$  و  $\langle k \rangle = 7$ ،  $\langle l \rangle = 8$ . سطر اول میزان شیوع بیماری ۱ و سطر دوم میزان شیوع بیماری ۲ را در فضای  $(\lambda_1, \lambda_2)$  نشان می‌دهند. مراحل وارد کردن بیماری در ستون‌ها مشابه شکل ۵ است. پارامترهای دینامیکی برابرند با:  $\gamma_1 = \mu_2 = 0.75$ ،  $\zeta_2 = 1/3$ ،  $\beta_1^a = \beta_1^b = \beta_2^a = \beta_2^b = 0.8$ ،  $\eta_1 = \eta_2 = 1/3$  و  $\phi_1^a = \phi_2^b = 0.8$ .



شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول زمانی مدل SIR-SIS در حالت رقابت دو بیماری و به ازای  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2$  در زمانی که ابتدا بیماری ۱ وارد شبکه شده است. مشخصات شبکه و سایر پارامترهای دینامیکی مطابق با شکل ۷ هستند. خط چین اول زمان ورود بیماری ۲ است و خط چین دوم جایی است که بیماری ۱ را مجدداً وارد می‌کنیم.

بیشتر رؤوس در حالت RS قرار دارند و تغییر وضعیت از حالت بهبود یافته امکان‌پذیر نیست. از طرف دیگر، به دلیل رقابتی که دو بیماری دارند پخش بیماری در لایه دوم نیز تضعیف می‌شود و به این ترتیب تغییری در جمعیت  $R_1$  رخ نمی‌دهد. نحوه تغییر چگالی جمعیت هر کدام از حالت‌ها در یک نرخ پخش مشخص در شکل ۸ نشان داده شده است

مورد بیماری ۲ به دلیل حضور بیماری ۱ در سیستم و رقابتی که این دو بیماری با یکدیگر دارند، شیوع بیماری ۲ کمتر می‌شود و رؤوس به حالت سالم باز می‌گردند. همان‌طور که مشاهده می‌شود آستانه ثانویه بیماری ۲ بیشتر شده است (خط پر). در ستون پ، به دو دلیل با ورود مجدد بیماری ۱، اتفاق جدیدی رخ نمی‌دهد. یکی آن که با پایان یافتن مرحله ۲،



شکل ۹. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودار فاز مدل در حالت رقابت دو بیماری بر روی دو شبکه اردوش-رنی. سطر اول میزان شیوع بیماری ۱ و سطر دوم میزان شیوع بیماری ۲ را در فضای  $(\lambda_1, \lambda_2)$  نشان می‌دهند. در ستون (الف) بذر بیماری ۲ ( $SI=0.05$ )، در ستون (ب) بذر بیماری ۱ ( $SI=0.05$ ) و در ستون (پ) مجدداً بذر بیماری ۲ ( $SI=0.05$ ) در حالت پایا به سیستم اضافه شده است. مشخصات شبکه و پارامترهای دینامیکی مطابق با شکل ۷ انتخاب شده‌اند.

جامعه را بررسی کنیم. به این منظور در شکل ۱۱ به بررسی حالتی می‌پردازیم که در آن یکی از دو بیماری که با یکدیگر همکاری می‌کنند، در شبکه وجود دارد و بیماری دیگر یا در ابتدا یا در انتهای فرایند انتشار وارد شبکه می‌شود.

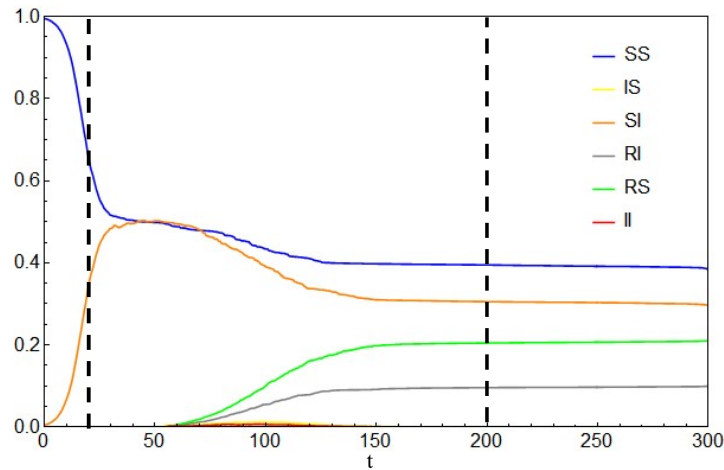
جمعیت افراد مبتلا به بیماری ۲ را در حالت پایای سیستم به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$I_2^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k,l} P(k,l) (SI_{k,l} + \Pi_{k,l} + RI_{k,l}) \quad (15)$$

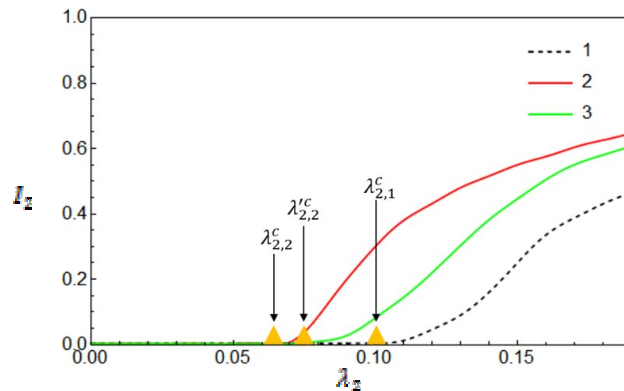
شکل ۱۱ کمیت  $I_2^\infty$  را بر حسب نرخ ابتلا به این بیماری ( $\lambda_2$ ) نشان می‌دهد. منحنی قرمز حالتی را نشان می‌دهد که بیماری ۱ در شبکه وجود دارد و بیماری ۲ نیز در ابتدای فرایند انتشار وارد سیستم می‌شود. منحنی سبز حالتی را نشان می‌دهد که بیماری ۱ در شبکه وجود دارد و بیماری ۲ در انتهای فرایند انتشار وارد می‌شود و منحنی خط چین سیاه مربوط به حالتی است که فقط بیماری ۲ در شبکه وجود دارد. آستانه‌های انتشار را در این سه حالت می‌توانیم مقایسه کنیم. نقطه گذار منحنی خط چین سیاه آستانه اولیه بیماری ۲ را نشان می‌دهد و همانطور که مشاهده می‌کنیم آستانه فراگیری بیماری ۲، زمانی که این بیماری دیرتر وارد شبکه می‌شود بزرگ‌تر است.

شکل ۹ حالتی را نشان می‌دهد که ابتدا بیماری ۲ وارد شبکه شده است (ستون الف،  $SI=0.05$ ) و سپس پس از رسیدن به حالت پایا، در ستون ب بیماری ۱ وارد سیستم می‌شود ( $SI=0.05$ ). در مرحله آخر نیز مجدداً بیماری ۲ وارد شبکه می‌شود (ستون پ،  $SI=0.05$ ). در اینجا برخلاف حالت قبل هر دو آستانه انتشار بیماری برای بیماری ۱ و ۲ مشاهده می‌شود. دلیل تفاوت با حالت قبل (شکل ۷) این است که دو بیماری با دو دینامیک متفاوت منتشر می‌شوند. زمانی که اول بذر بیماری ۲ که با دینامیک SIS منتشر می‌شود وارد سیستم می‌شود، تعداد زیادی از رئوس در حالت SI قرار دارند. در مرحله دوم و با ورود بیماری ۱، دو بیماری به رقابت می‌پردازند. رأس‌هایی که نسبت به بیماری ۱ سالم هستند می‌توانند بیمار شوند و همین‌طور رأس‌های مبتلا به بیماری ۲ می‌توانند مجدداً مستعد بیماری شوند. به هر حال به دلیل رقابت بیماری‌ها، هر دو بیماری حتی در نرخ پخش بالا هم شانس کمتری برای شیوع پیدا می‌کنند. به این ترتیب برای هر دو بیماری آستانه ثانویه ایجاد می‌شود که بیشتر از آستانه اولیه است. شکل ۱۰، تحول تغییر چگالی جمعیت‌ها را در این حالت نشان می‌دهد.

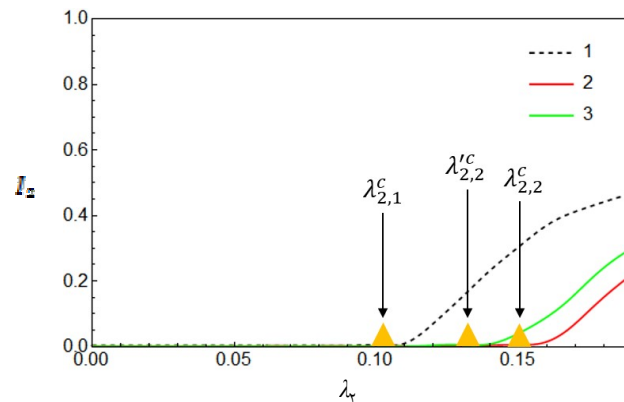
در اینجا همچنین می‌توانیم اثر زمان ورود بیماری به



شکل ۱۰. (رنگی در نسخه الکترونیکی) تحول زمانی مدل SIR-SIS در حالت رقابت دو بیماری و به ازای  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.2$  در زمانی که ابتدا بیماری ۲ وارد شبکه شده است. مشخصات شبکه و سایر پارامترهای دینامیکی مطابق با شکل ۷ هستند. خط چین اول زمان ورود بیماری ۱ است و خط چین دوم جایی است که بیماری ۲ را مجدداً وارد می‌کنیم.



شکل ۱۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) جمعیت افراد مبتلا به بیماری ۲ بر حسب  $\lambda_2$ ، در حالت همکاری دو بیماری. هر دو شبکه اردوش-رنیی هستند با  $\langle k \rangle = 7$  و  $\langle I \rangle = 8$ . آستانه اولیه انتشار با  $\lambda_{2,1}^c$  و آستانه ثانویه در حالتی که بیماری ۲ در ابتدای فرایند انتشار وارد شده با  $\lambda_{2,2}^c$  و در حالتی که در انتهای فرایند انتشار وارد شد با  $\lambda_{2,2}'^c$  نشان داده شده است.



شکل ۱۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) جمعیت افراد مبتلا به بیماری ۲ بر حسب  $\lambda_1$ ، در حالت رقابت دو بیماری. هر دو شبکه اردوش-رنیی هستند با  $\langle k \rangle = 7$  و  $\langle I \rangle = 8$ . آستانه اولیه انتشار با  $\lambda_{2,1}^c$  و آستانه ثانویه در حالتی که بیماری ۲ در ابتدای فرایند انتشار وارد شده با  $\lambda_{2,2}^c$  و در حالتی که در انتهای فرایند انتشار وارد شد با  $\lambda_{2,2}'^c$  نشان داده شده است.

می‌دهد. در این نمودار رنگ منحنی‌ها همانند شکل قبل

شکل ۱۲ اثر همین اتفاق را برای رقابت دو بیماری نشان

است. اگر در مرحله اول دینامیک SIR فعال شود و به حالت پایا برسد، بیماری مرتبط با این دینامیک بر پخش بیماری دیگر که با دینامیک SIS منتشر می‌شود، اثر گذار است، در حالی که بیماری با دینامیک SIS نمی‌تواند اثر متقابلی بر بیماری دیگر داشته باشد. دلیل این اتفاق این است که پیش از ورود بیماری دوم با دینامیک SIS، درصد قابل توجهی از رئوس به حالت بهبود یافته رفته‌اند. اما اگر ابتدا بیماری با دینامیک SIS در شبکه فعال شود، می‌تواند جلوی شیوع بیماری با دینامیک SIR را بگیرد و اجازه ندهد رئوس زیادی به حالت بهبود یافته برسند (شیوع کمتر). در این حالت بیماری با دینامیک SIR نیز می‌تواند اثر متقابلی بر بیماری دیگر بگذارد. علاوه بر این، بیماری دوم هر چقدر در زمان زودتری ظهور پیدا کند در نرخ ابتلای بزرگ‌تری هم به فراگیری می‌رسد. چنین روندی می‌تواند به عنوان یک راه مؤثر برای جلوگیری از ابتلا به هر دو بیماری پیشنهاد شود.

روش ما یک چهارچوب تئوری برای انتشار همزمان دو بیماری با دینامیک‌های متفاوت را پیشنهاد می‌دهد. اگر چه به طور خاص در مورد برهم‌کنش انتشار دو بیماری صحبت شد، اما این کار برای اثر متقابل هر دو فرآیند انتشار قابل استفاده است. به عنوان مثال می‌توان به اثر انتشار اطلاعات در جامعه بر روی کنترل و پیشگیری انتشار بیماری اشاره کرد. همچنین شبکه دو لایه‌ای این امکان را فراهم می‌کند که بتوان اثر برهم‌کنش دو فرایند انتشار که هر یک بر روی یک شبکه و با ساختار و نوع اتصالات متفاوت منتشر می‌شوند را مطالعه کرد.

تعریف می‌شوند. در این حالت نتایج نشان می‌دهند که آستانه فراگیری بیماری ۲، زمانی که این بیماری دیرتر وارد شبکه می‌شود کوچک‌تر است.

## ۶. جمع‌بندی

دینامیک‌های انتشار می‌توانند بر یکدیگر اثر بگذارند به طوری که میزان شیوع یکدیگر را تقویت کنند یا کاهش بدهند. در اینجا ما به بررسی برهم‌کنش انتشار دو بیماری که یکی با دینامیک SIR و دیگری با دینامیک SIS و به صورت همزمان بر روی یک جمعیت میزبان پخش می‌شوند پرداختیم. دینامیک مدل را بر روی شبکه دو لایه در نظر گرفتیم به طوری که هر بیماری بر روی یک لایه از شبکه منتشر می‌شود. با استفاده از تقریب میدان متوسط ناهمگن و با تحلیل دینامیک سیستم آستانه‌های فراگیری بیماری‌ها را به دست آوردیم. آستانه فراگیری وابسته به ساختار شبکه و نرخ‌های انتشار هر یک از بیماری‌ها است. همچنین با استفاده از شبیه‌سازی، میزان فراگیری هر یک از بیماری‌ها و نمودار فاز مدل را در هر دو حالت رقابت و همکاری به دست آوردیم.

در همکاری دو بیماری، نشان دادیم که مستقل از این که کدام بیماری ابتدا وارد شود، حضور هر کدام از بیماری‌ها به انتشار بیماری دیگر کمک می‌کند و آستانه ثانویه هر بیماری کوچک‌تر از آستانه اولیه آن است. در حالی که در رقابت دو بیماری، عدم تقارن بین دینامیک دو فرایند انتشار مهم است. در این حالت، آستانه ثانویه یک بیماری بزرگ‌تر از آستانه اولیه آن

## مراجع

1. R M Anderson and R M May, "Infectious diseases of humans: Dynamics and Control", Oxford University Press, Oxford (1992).
2. W O Kermack and A G McKendrick, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **115** (1927) 700.
3. R Pastor-Satorras and A Vespignani, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 14.
4. R Pastor-Satorras, C Castellano, P Van Mieghem, and A Vespignani, *Rev. Mod. Phys.* **87** (2015) 925.
5. W Wang, M Tang, H E Stanley, and L A Braunstein, *Rep. Prog. Phys.* **80** (2017) 036603.
6. M E J Newman, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 108701.
7. M E J Newman and C R Ferrario, *PLoS ONE* **8** (2013) e71321.
8. W Cai, L Chen, F Ghanbarnejad, and P Grassberger, *Nature Phys.* **11** (2015) 936.
9. L Pan, D. Yang, W Wang, S Cai, T Zhou, Y C Lai, *Phys. Rev. Research* **2** (2020) 023233.
10. F Pinotti, F Ghanbarnejad, P Hovel, and C Poletto, *Royal Society Open Science* **7** (2020) 190305.
11. B Karrer and M E J Newman, *Phys. Rev. E.* **84** (2011) 036106.
12. C Poletto, S Meloni, V Colizza, Y Moreno and A Vespignani, *PLoS Computational Biology* **9** (2013)

19. F Velasquez-Rojas, P C Ventura, C Connaughton, Y Moreno, F A Rodrigues, and F Vazquez, *Phys. Rev. E* **102** (2020) 022312.
20. J Sanz, C Y Xia, S Meloni, and Y Moreno, *Phys. Rev. X* **4** (2014) 041005.
21. M Kivelä, A Arenas, M Barthelemy, J P Gleeson, Y Moreno, and M A Porter, *Journal of Complex Networks* **2** (2014) 203.
22. Q Wu and S Chen, *Chaos* **30** (2020) 073115.
23. M Boguna, and R Pastor-Satorras, *Phys. Rev. E* **66** (2002) 047104.
13. M M de Oliveira and R Dickman, *PloS ONE* **12** (2017) e0182672.
14. P C Ventura, Y Moreno, and F A Rodrigues, *Physical Review Research* **3** (2021) 013146.
15. P Brodka, K Musial, and J Jankowski, *IEEE Access* **8** (2020) 10316.
16. C Granell, S Gomez, and A Arenas, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 128701.
17. N Azimi-Tafreshi, *Phys. Rev. E* **93** (2016) 042303.
18. Z Wang, M A Andrews, Z X Wu, L Wang, and C T Bauch, *Physics of life reviews* **15** (2015) 1.