مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۳، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۴۰۲
DOI: 10.47176/ijpr.23.2.71720

یک مدل متناهی برای الکترودینامیک با معرفی یک عامل شکل به صورت $f_{HD_2}\left(\ell^2\Box\right)=1+\left(-\ell^2\Box\right)^2$ به درون جملهٔ جنبشی نظریهٔ ماکسول

مصطفی هاشمی و سید کامران مؤیدی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک، کد پستی ۸۳۴۹-۸-۳۸۱۵۶

پست الکترونیکی:s-moayedi@araku.ac.ir

(دریافت مقاله:۲۱/ ۰۴/ ۱۴۰۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی:۰۱/ ۰۶/ ۱۴۰۲)

چکیده:
در این مقاله، یک مدل با مشتقات مراتب بالا برای الکترودینامیک در یک فضا–زمان مینکوفسکی $D+1$ بعدی از راه معرفی یک عامل شکل به درون جملهٔ جنبشی نظریهٔ ماکسول به صورت $-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\to-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}\,f_{HD_2}\left(\ell^2\Box\right)F^{\mu\nu}$ ارائه می‌شود که $\ell>0$ یک مقیاس طول مشخصه است. محاسبات ما نشان می‌دهند که در این تعمیم با مشتقات مراتب بالاتر نظریهٔ ماکسول به ازای $D\in\{3,4,5\}$ پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به یک بار نقطه‌ای در مکان بار، مقداری متناهی است. به ازای $D=3$ شکل صریح پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای در این الکترودینامیک با مشتقات مراتب بالاتر به صورت تحلیلی به دست آورده می‌شوند. بنا به براوردهای عددی انجام شده، مقیاس طول مشخصهٔ ℓ کران بالایی برابر با $\ell_{\max}\sim\frac{1}{100}\ell_{electroweak}$ دارد که $\ell_{electroweak}=10^{-18}m$ مقیاس طول مربوط به برهم‌کنش‌های الکتروضعیف است . در خاتمه متذکر می‌شویم که به ازای $\ell\ll 1$، نتایج به دست آمده در این مقاله با نتایج حاصل از نظریهٔ ماکسول متعارف سازگار است.

واژه‌های کلیدی:الکترودینامیک ماکسول، روش‌های منظم‌سازی، عامل شکل، مقیاس طول مشخصه، نظریه‌های میدان با مشتقات مراتب بالاتر

۱. مقدمه

نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول را می‌توان یکی از پایه‌ای‌ترین نظریه‌ها در علم فیزیک به شمار آورد که موضوع آن بررسی پدیده‌های ماکروسکوپیک در حوزهٔ الکتریسیته و مغناطیس در سطح کلاسیک است [۱ و ۲]. از منظر ریاضی، نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول را می‌توان متعلق به دسته‌ای خاص از نظریهٔ میدان‌های کلاسیک موسوم به نظریهٔ میدان‌های پیمانه‌ای آبلی با گروه پیمانه‌ای $U(1)$ دانست [۲]. هر چند نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول به خوبی قادر به توصیف پدیده‌هایی مانند انتشار نور در محیط‌های ناهمگن و یا انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل موجبرها است [۳ و ۴] اما این نظریه از ایراداتی نظیر واگرایی خود–انرژی الکترومغناطیسی مربوط به بارهای نقطه‌گون نظیر الکترون رنج می‌برد [۱ و ۲]. امروزه می‌دانیم که نظریهٔ ماکسول را می‌توان به عنوان حد کلاسیک الکترودینامیک کوانتومی به شمار آورد. اگر چه الکترودینامیک کوانتومی را شاید بتوان یکی از موفق‌ترین نظریه‌های در دسترس علم فیزیک به لحاظ سازگاری با داده‌های تجربی

دانست اما متاسفانه معضل نامتناهی شدن خود-انرژی وابسته به بارهای نقطه‌ای درالکترودینامیک کوانتومی کماکان به قوت خود باقی است [۵-۷]. در هنگام مطالعهٔ یک نظریهٔ موضعی برای میدان‌های کوانتومی، حداقل با سه دسته از واگرایی‌ها به شرح زیر مواجه می‌شویم [۷]

۱. واگرایی‌های فرابنفش

۲. واگرایی‌های فروسرخ

۳. تکینگی‌های مخروط نوری

از میان این سه دسته واگرایی، واگرایی‌های فرابنفش و فروسرخ را می‌توان با استفاده از روش بازبهنجارش از میان برداشت در حالی که تکینگی‌های مخروط نوری که مربوط به تکینگی در مبدأ فضای اقلیدسی‌اند حتی بعد از اعمال روش بازبهنجارش به صورت کامل از میان نمی‌روند [۷]. امروزه یکی از مهم‌ترین چالش‌های پیش رو در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی،مسئلهٔ وحدت بخشی میان نظریهٔ نسبیت عام آلبرت اینشتین و مدل استاندارد فیزیک ذرات بنیادی در قالب یک نظریهٔ میدان وحدت یافته تحت عنوان گرانش کوانتومی است [۸-۱۲]. اگر چه تاکنون فیزیک‌دانان موفق به دستیابی به یک نظریهٔ کامل برای گرانش کوانتومی نشده‌اند اما در اغلب مدل‌های پیشنهادی برای گرانش کوانتومی همانند نظریهٔ ریسمان، وجود یک مقیاس طول بنیادین از مرتبهٔ بزرگی طول پلانک در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی پیش‌بینی شده است [۸ و ۹]. وجود چنین مقیاس طول اساسی در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی منجر به تعمیم اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت زیر می‌شود [۸ و ۹]:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \alpha' \frac{\Delta p}{\hbar}, \tag{۱}$$

که $\alpha' \approx \left(10^{-32}\, cm\right)^2$ ثابتی بنیادی است که تنش ریسمان را کنترل می‌کند. معادلهٔ (۱) بر این واقعیت دلالت دارد که عدم قطعیت در اندازه‌گیری مکان،یعنی Δx کران پایینی برابر با $(\Delta x)_0 = 2\sqrt{\alpha'}$دارد که به این کران پایین کمینهٔ طول گفته می‌شود [۸-۱۲]. درمراجع [۱۳-۱۵] ما به بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول با فرض وجود یک کمینهٔ طول در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی پرداخته و نشان داده‌ایم که وجود پارامتر کمینهٔ طول در ساختار نظریه مانند یک تنظیم کننده عمل کرده و سبب به دست آمدن یک مقدار متناهی برای خود-انرژی بارهای نقطه‌گون می‌شود. در تلاشی دیگر نویسندگان مراجع [۱۶ و ۱۷] نشان داده‌اند که بازفرمول‌بندی نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول در حضور یک برش تکانه می‌تواند باعث حذف تکینگی مربوط به پتانسیل یک بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به بار شود. در مرجع [۱۸] مارکوس لازار فیزیک‌دان آلمانی یک نظریهٔ میدان پیمانه‌ای آبلی تعمیم یافته را معرفی کرده که در مدل معرفی شده توسط وی مشتق مرتبهٔ ششم میدان پیمانه‌ای A_μ در معادلات حرکت ظاهر می‌شود. در مدل لازار دو مقیاس طول مشخصهٔ ℓ_1 و ℓ_2 وجود دارند که این دو مقیاس طولی می‌توانند به ازای مقادیر حدی خاصی مدل ماکسول را بازتولید کنند. در مدل لازار مقدار خود-انرژی وابسته به یک بار نقطه‌گون بر خلاف نظریهٔ ماکسول مقداری متناهی به دست می‌آید. نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول در یک فضا-زمان مینکوفسکی $D+1$ بعدی که توسط متریک

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & & O \\ & -1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ O & & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{۲}$$

توصیف می‌شود به وسیلهٔ چگالی لاگرانژی زیر مشخص می‌شود:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \tag{۳}$$

که $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, A^1, ..., A^D)$ میدان ماکسول، $J^\mu = (c\rho, J^1, ..., J^D)$ جریان خارجی و $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی است[۱و۲]. به سهولت می‌توان نشان داد که تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی، یعنی $F_{\mu\nu}$ رابطهٔ زیر موسوم به اتحاد بیانکی[1] را براورده می‌سازد:

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]} = 0. \tag{۴}$$

[1]Bianchi identity

یک تعمیم ممکن از نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول، یعنی نظریهٔ توصیف شده توسط رابطهٔ (۳) به صورت زیر است [۱۹]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}\, f\left(\frac{\Box}{M^2}\right) F^{\mu\nu} - J^{\mu} A_{\mu}. \qquad (۵)$$

که

$$\begin{aligned} \Box &= \sum_{\alpha=0}^{D} \partial_{\alpha}\partial^{\alpha} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{D}\partial_i\partial_i \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_D^2, \end{aligned} \qquad (۶)$$

عملگر دالامبری در فضا–زمان تخت $D+1$ بعدی توصیف شده توسط متریک (۲) بوده و M یک پارامتر ثابت با دیمانسیون عکس طول، یعنی $(length)^{-1}$ است [۱۹]. به تابع $f\left(\frac{\Box}{M^2}\right)$ در رابطهٔ (۵) عامل شکل گفته می‌شود [۱۹]. لازم به تذکر است که پارامتر ثابت M در رابطهٔ (۵) میزان غیرموضعی بودن نظریه را تعیین می‌کند. برای مقادیر بسیار بزرگ پارامتر M، یعنی $M \to \infty$ یا $M \gg 1$ عامل شکل $f\left(\frac{\Box}{M^2}\right)$ باید رفتاری حدی به صورت زیر داشته باشد [۲۰–۲۴]:

$$\lim_{M\to\infty} f\left(\frac{\Box}{M^2}\right) = f(0) = 1. \qquad (۷)$$

برای حالت حدی $M \to \infty$ رابطهٔ (۵) به رابطهٔ (۳)، یعنی نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول تبدیل می‌شود. بنا به آنچه گفته شد در مدل (۵) برای مقادیر بسیار بزرگ پارامتر M، مدل رفتاری کاملاً موضعی از خود نشان می‌دهد در حالی که برای مقادیر بسیار کوچک پارامتر M، مدل (۵) رفتاری به شدت غیرموضعی و متفاوت با نظریهٔ استاندارد ماکسول خواهد داشت. در حالت خاصی که عامل شکل $f\left(\frac{\Box}{M^2}\right)$ به صورت زیر باشد

$$f_{HD_N}\left(\frac{\Box}{M^2}\right) = 1 + \left(-\frac{\Box}{M^2}\right)^{N}, \quad N \in \mathbb{N} \qquad (۸)$$

رابطهٔ (۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$\mathcal{L}_{HD_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}\left[1 + \left(-\frac{\Box}{M^2}\right)^{N}\right] F^{\mu\nu} - J^{\mu} A_{\mu}. \qquad (۹)$$

در رابطهٔ (۸)، $\mathbb{N}$ معرف مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است. همان گونه که دیده می‌شود عامل شکل (۸) شرط (۷) را براورده می‌سازد. نظریهٔ ماکسول تعمیم یافته (۹) به نظریهٔ ماکسول کلاس HD_N [1] معروف است [۲۱]. در نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_N با توجه به عدم تغییر تعریف $F_{\mu\nu}$ کماکان اتحاد بیانکی، یعنی رابطهٔ (۴) برقرار است. در حالی که در نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول (رابطهٔ (۳)) تنها عبارت‌های در برگیرندهٔ مشتق مرتبهٔ اول میدان پیمانه‌ای A_{μ} ظاهر می‌شوند در نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_N (رابطهٔ (۹)) ما با جملاتی مواجه می‌شویم که شامل مشتق مرتبهٔ $2N+1$ میدان پیمانه‌ای A_{μ} هستند. یک انتخاب دیگر برای عامل شکل $f\left(\frac{\Box}{M^2}\right)$ در رابطهٔ (۵) به صورت زیر است [۲۱و۲۴]:

$$f_{GF_N}\left(\frac{\Box}{M^2}\right) = \exp\left[\left(-\frac{\Box}{M^2}\right)^{N}\right], \quad N \in \mathbb{N}. \qquad (۱۰)$$

برای عامل شکل معرفی شده در رابطهٔ (۱۰) که شرط (۷) را براورده می‌سازد خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_{GF_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \exp\left[\left(-\frac{\Box}{M^2}\right)^{N}\right] F^{\mu\nu} - J^{\mu} A_{\mu}. \qquad (۱۱)$$

مدل (۱۱) به نظریهٔ ماکسول از کلاس GF_N [2] معروف است [۲۱و۲۴]. به لحاظ تکنیکی مدل (۱۱) که از آن تحت عنوان الکترودینامیک فاقد شبح نیز یاد می‌شود یک نظریهٔ میدان پیمانه‌ای آبلی با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت میدان A_{μ} است [۷ و ۲۴]. در مدل‌های GF_N نیز همانند مدل‌های HD_N، حد $M \to \infty$ به بازتولید نظریهٔ استاندارد ماکسول (رابطهٔ (۳)) می‌انجامد. با توجه به عدم تغییر تعریف تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی $F_{\mu\nu}$ در نظریه‌های ماکسول کلاس GF_N، اتحاد بیانکی، یعنی رابطهٔ (۴) همچنان برقرار است. در مراجع [۲۳و۲۴] به جای پارامتر ثابت M یک مقیاس طول مشخصه ℓ تعریف شده است که ارتباط آن با M چنین است:

$$\ell = \frac{1}{M}, \quad \ell > 0. \qquad (۱۲)$$

[1] Higher-derivative
[2] Ghost-free

بنا به رابطهٔ (۱۲)، مقیاس طول مشخصهٔ ℓ دیمانسیون $(length)$ داشته و حد $M \to \infty$ متناظر با حد $\ell \to 0$ است. لاگرانژی‌های توصیف کنندهٔ نظریه‌های ماکسول کلاس HD_N و GF_N در روابط (۹) و (۱۱) بر حسب مقیاس طول مشخصهٔ ℓ معرفی شده در رابطهٔ (۱۲) چنین‌اند:

$$\mathcal{L}_{HD_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}\left[1+\left(-\ell^2\Box\right)^N\right]F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_{GF_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}\exp\left[\left(-\ell^2\Box\right)^N\right]F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (14)$$

هدف ما در این مقاله بررسی تحلیلی ویژگی‌های عام نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_2 برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی در یک فضا–زمان مینکوفسکی با متریک دارای نشانگان $\left(+,\underbrace{-,-,\ldots,-}_{D\ times}\right)$ است. در بخش ۲ این مقاله، معادلات حرکت کلاسیک وابسته به مدل HD_2 در حضور یک چشمهٔ خارجی در فضا–زمان مینکوفسکی $D+1$ بعدی توصیف شده توسط متریک (۲) به دست آورده شده و در ادامه شکل صریح معادلهٔ پواسون برای یک توزیع ایستا از بارهای الکتریکی در مدل HD_2 به دست می‌آید. در بخش ۳ این مقاله ثابت می‌کنیم که در مدل HD_2 برای آن که پتانسیل وابسته به یک بار نقطه‌ای برای نقاط بسیار نزدیک به بار مقداری متناهی به دست آید لازم است تا D، یعنی تعداد ابعاد فضایی یکی از مقادیر $D \in \{3,4,5\}$ را اختیار کند. در بخش ۴ بعد از تعیین شکل روابط ساختمندی[1] متناظر با الکترودینامیک HD_2 در یک فضا–زمان مینکوفسکی چهار بعدی $(D=3)$، شکل دیفرانسیلی معادلات HD_2 را که تعمیمی از معادلات ماکسول هستند به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که شکل ریاضی معادلهٔ پیوستگی بار و جریان در الکترودینامیک HD_2 مشابه با شکل این معادله در الکترودینامیک ماکسول، یعنی $\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x},t)+\dfrac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}=0$ است. در حد $\ell \to 0$ معادلات میدان و روابط ساختمندی الکترودینامیک HD_2 به معادلات میدان و روابط ساختمندی الکترودینامیک ماکسول تبدیل می‌شوند. در بخش ۵ با استفاده از روش‌های تبدیل فوریه و انتگرال‌گیری پربندی در نظریهٔ متغیرهای مختلط، شکل دقیق پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ فضای دکارتی سه بعدی $(D=3)$ در مدل HD_2 به دست می‌آید. نشان می‌دهیم که مقدار پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به مکان بار بر خلاف نظریهٔ ماکسول مقادیری متناهی هستند و پارامتر ℓ در ساختار مدل HD_2 نقش یک تنظیم کننده را ایفاء می‌کند که باعث جلوگیری از تکینگی پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود. در بخش ۶ که به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص دارد نخست دلایل و انگیزهٔ نویسندگان این مقاله در استفاده از مدل HD_2 را به تفصیل مورد بررسی و واکاوی قرار می‌دهیم. در ادامه در بخش ۶. ۱ نتیجه‌گیری، به مقایسهٔ اختلاف میان روش‌های به کار برده شده در این مقاله با روش‌های به کار رفته در مراجع [۱۳–۱۷] در تحلیل رفتار یک بار نقطه‌ای ساکن می‌پردازیم. در بخش ۶. ۲ می‌کوشیم تا یک براورد عددی از مقدار طول مشخصهٔ ℓ در رابطهٔ (۱۲) ارائه کنیم. سرانجام در بخش ۶. ۳ شکل صریح پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی برای یک توزیع دلخواه از بارهای الکتریکی ساکن در الکتروستاتیک HD_2 در فضای دکارتی سه بعدی به دست آورده شده و حد ماکسولی این عبارات مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲. معادلات حرکت کلاسیک برای مدل HD_2

بنا به رابطهٔ (۱۳) چگالی لاگرانژی وابسته به مدل HD_2 به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}_{HD_2} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}\left[1+\left(-\ell^2\Box\right)^2\right]F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (15)$$

همان گونه که مشاهده می‌شود در رابطهٔ (۱۵)، مشتق مرتبهٔ پنجم میدان پیمانه‌ای A_μ ظاهر می‌شود. برای یک میدان پیمانه‌ای A_λ که توسط چگالی لاگرانژی زیر توصیف می‌شود

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(A_\lambda, \partial_{\nu_1}A_\lambda, \partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}A_\lambda, \partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}\partial_{\nu_3}A_\lambda, \ldots\right), \quad (16)$$

معادلهٔ اویلر–لاگرانژ به صورت زیر است [۲۵–۲۸]:

[1] Constitutive relations

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda}}-\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu_1}}\right)_{\nu_1}+\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu_1\nu_2}}\right)_{\nu_1\nu_2}-\dots$$
$$+\left(-1\right)^{k}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda,\nu_1\nu_2\dots\nu_k}}\right)_{\nu_1\nu_2\dots\nu_k}+\dots=0, \qquad (۱۷)$$

که $A_{\lambda,\nu_1\nu_2\dots\nu_k}$ تعریفی به شکل زیر دارد:

$$A_{\lambda,\nu_1\nu_2\dots\nu_k}:=\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}\dots\partial_{\nu_k}A_{\lambda} \qquad (۱۸)$$

و

$$\frac{\partial A_{\lambda,\nu_1\nu_2\dots\nu_k}}{\partial A_{\lambda,\mu_1\mu_2\dots\mu_k}}=\delta_{\nu_1}^{\mu_1}\delta_{\nu_2}^{\mu_2}\dots\delta_{\nu_k}^{\mu_k}, \qquad (۱۹)$$

اگر چگالی لاگرانژی مدل HD_2، یعنی رابطهٔ (۱۵) را در معادلهٔ اویلر-لاگرانژ تعمیم یافته (۱۷) قرار دهیم بعد از بازآرایی مجدد شاخص‌ها، معادلهٔ حرکت زیر برای میدان پیمانه‌ای A_{μ} به دست می‌آید:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu}+\ell^{4}\Box\Box\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\mu_0 J^{\nu}. \qquad (۲۰)$$

معادلهٔ (۲۰)، معادلهٔ حرکت کلاسیک برای مدل HD_2 در حضور چشمهٔ خارجی J^{ν} در یک فضا-زمان مینکوفسکی $D+1$ بعدی با متریک (۲) است. معادلهٔفوق یک معادلهٔ موج ناهمگن مرتبهٔ ششم است که در حد $\ell\to 0$ به معادلهٔ موج $\partial_{\mu}F^{\mu\nu}=\mu_0 J^{\nu}$، یعنی صورت تانسوری معادلات ناهمگن ماکسول تبدیل می‌شود. اگر از طرفین این معادله واگرایی بگیریم خواهیم داشت:

$$\underbrace{\partial_{\nu}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}}_{0}+\ell^{4}\Box\Box\underbrace{\partial_{\nu}\partial_{\mu}F^{\mu\nu}}_{0}=\mu_0\partial_{\nu}J^{\nu}\Rightarrow$$
$$\partial_{\nu}J^{\nu}=0. \qquad (۲۱)$$

رابطهٔ (۲۱) نشان می‌دهد که شکل هموردای معادلهٔ پیوستگی بار و جریان در الکترودینامیک HD_2 مشابه با شکل هموردای معادلهٔ پیوستگی بار و جریان در نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول است [۱ و ۲]. برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی (الکتروستاتیک) یعنی،

$$A^{\mu}=\Bigg(\frac{1}{c}\phi(\vec{x}),\underbrace{0,\dots,0}_{D\ times}\Bigg), \qquad (۲۲)$$

$$J^{\mu}=\Bigg(c\rho(\vec{x}),\underbrace{0,\dots,0}_{D\ times}\Bigg), \qquad (۲۳)$$

معادلهٔ (۲۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(1+\ell^{4}\nabla_{D}^{2}\nabla_{D}^{2}\right)\nabla_{D}^{2}\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}, \qquad (۲۴)$$

که $\nabla^{2}{}_{D}=\sum_{i=1}^{D}\partial_i\partial_i$ عملگر لاپلاس در فضای دکارتی Dبعدی است. معادلهٔ مرتبهٔ ششم (۲۴) معادلهٔ پواسون در الکتروستاتیک HD_2 در یک فضای دکارتی D بعدی است. در حد $\ell\to 0$ $\left(\ell<<1\right)$ معادلهٔ (۲۴) به شکل زیر در می‌آید:

$$\nabla^{2}{}_{D}\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}. \qquad (۲۵)$$

معادلهٔ (۲۵) همان معادلهٔ آشنای پواسون در الکتروستاتیک ماکسول است.

۳. شرط متناهی شدن پتانسیل وابسته به یک بار نقطه‌ای برای نقاط بسیار نزدیک به بار در الکتروستاتیک HD_2

برای یک بار نقطه‌ای ایستای q در مبدأ فضای دکارتی D بعدی $\rho(\vec{x})$ به شکل زیر است:

$$\rho(\vec{x})=q\delta(x^1)\delta(x^2)\dots\delta(x^D)$$
$$=q\delta^{(D)}(\vec{x}). \qquad (۲۶)$$

معادلهٔ پواسون (۲۴) برای چگالی بار (۲۶) به صورت زیر است:

$$\left(1+\ell^{4}\nabla_{D}^{2}\nabla_{D}^{2}\right)\nabla_{D}^{2}\phi(\vec{x})=-\frac{q}{\varepsilon_0}\delta^{(D)}(\vec{x}). \qquad (۲۷)$$

اگر نمایش انتگرالی تابع دلتای دیراک $\delta^{(D)}(\vec{x})$ و پتانسیل الکتروستاتیکی $\phi(\vec{x})$ یعنی روابط

$$\delta^{(D)}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{D}}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d^{D}k, \qquad (۲۸)$$

و

$$\phi(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{D}}\int G(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}}d^{D}k, \qquad (۲۹)$$

را در معادلهٔ پواسون مرتبهٔ ششم (۲۷) جایگزین کنیم شکل تابع گرین $G(\vec{k})$ در فضای موج D بعدی به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$G(\vec{k})=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{k^{2}\left[1+\ell^{4}\left(k^{2}\right)^{2}\right]}, \qquad (۳۰)$$

که $k=\left(\sum_{i=1}^{D}\left(k^{i}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ اندازهٔ بردار موج D بعدی $\vec{k}=\left(k^{1},...,k^{D}\right)$ است. اگر رابطهٔ (۳۰) را در رابطهٔ (۲۹) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi(\vec{x})=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{e^{i\vec{k}.\vec{x}}}{k^2\left[1+\ell^4\left(k^2\right)^2\right]}\,d^Dk. \qquad (۳۱)$$

برای بررسی رفتار پتانسیل وابسته به یک بار نقطه‌ای q در نقاط بسیار نزدیک به محل بار در الکتروستاتیک HD_2 باید در رابطهٔ (۳۱)، $x^1=x^2=...=x^D=0$ قرار دهیم، سپس خواهیم داشت:

$$\phi\Big(\underbrace{0,0,...,0}_{D\ times}\Big)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^D}\int\frac{d^Dk}{k^2\left[1+\ell^4\left(k^2\right)^2\right]}. \qquad (۳۲)$$

با توجه به این که تابع زیر علامت انتگرال در رابطهٔ (۳۲)، یعنی تابع $\frac{1}{k^2\left[1+\ell^4\left(k^2\right)^2\right]}$ تقارن فوق کروی دارد بنابراین مناسب خواهد بود که برای محاسبهٔ انتگرال (۳۲) از مختصات فوق کروی استفاده کنیم. عنصر حجم d^Dk در مختصات فوق کروی به صورت زیر است [۱۶و۲۹و۳۰]:

$$d^Dk=k^{D-1}dk\prod_{i=1}^{D-1}\sin^{D-1-i}\theta_i d\theta_i, \qquad (۳۳)$$

که

$$0\le k<\infty, \qquad (۳۴)$$

$$0\le\theta_{D-1}\le 2\pi, \qquad (۳۵)$$

$$0\le\theta_i\le\pi,\ 1\le i\le D-2. \qquad (۳۶)$$

اگر رابطهٔ (۳۳) را در رابطهٔ (۳۲) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi\Big(\underbrace{0,0,...,0}_{D\ times}\Big)=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^D}\int_0^\infty\frac{k^{D-3}}{1+\ell^4k^4}dk \prod_{i=1}^{D-1}\int\sin^{D-1-i}\theta_i d\theta_i =\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_{D-1}}{(2\pi)^D\ell^4}\int_0^\infty\frac{k^{D-3}}{k^4+\ell^{-4}}dk. \qquad (۳۷)$$

در رابطهٔ (۳۷)، $\Omega_{D-1}=\frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$ مساحت گوی واحد در فضای دکارتی D بعدی است [۲۹]. در صفحهٔ ۱۰۹ مرجع [۳۱] انتگرال زیر محاسبه شده است:

$$\int_0^\infty\frac{x^m}{x^n+a^n}dx=\frac{\pi a^{m-n+1}}{n\sin\left[\frac{(m+1)\pi}{n}\right]}, \quad 0<m+1<n. \qquad (۳۸)$$

با مقایسهٔ میان انتگرال داده شده در رابطهٔ (۳۷) و رابطهٔ (۳۸) می‌توان نوشت

$$\int_0^\infty\frac{k^{D-3}}{k^4+\left(\frac{1}{\ell}\right)^4}dk=\frac{\pi\ell^{6-D}}{4\sin\left[\frac{(D-2)\pi}{4}\right]}, \quad 2<D<6. \qquad (۳۹)$$

اگر رابطهٔ (۳۹) را در رابطهٔ (۳۷) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi\Big(\underbrace{0,0,...,0}_{D\ times}\Big)=\frac{q}{2^{D+1}\pi^{\frac{D}{2}-1}\varepsilon_0\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\sin\left[\frac{(D-2)\pi}{4}\right]\ell^{D-2}}, \quad 2<D<6. \qquad (۴۰)$$

همان گونه که رابطهٔ (۴۰) نشان می‌دهد به ازای

$$D\in\{3,4,5\}, \qquad (۴۱)$$

پتانسیل وابسته به بار نقطه‌ای q در محل بار مقداری متناهی به دست می‌آید. بنا به روابط (۴۰) و(۴۱) در ابعاد فضایی برابر با $D=3$، $D=4$ و $D=5$ و یا متناظر با آن در فضا-زمان‌هایی با ابعاد $D+1=4$، $D+1=5$ و $D+1=6$ الکترودینامیک HD_2 یک مدل متناهی برای پتانسیل بار نقطه‌ای را ارائه می‌دهد.

۴. شکل دیفرانسیلی معادلات الکترودینامیک HD_2 در یک فضا-زمان چهار بعدی

در یک فضا-زمان مینکوفسکی چهار بعدی با متریک $\eta_{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}=diag(+1,-1,-1,-1)$ تانسورهای شدت میدان الکترومغناطیسی هموردای $F_{\mu\nu}$ و پادوردای $F^{\mu\nu}$ به شکل زیرند[۳۲]:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۴۲)$$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (۴۳)$$

به ازای $\nu=0$، معادلهٔ (۲۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(1+\ell^4\Box\Box\right)\partial_\mu F^{\mu 0}=\mu_0 J^0. \qquad (۴۴)$$

به کمک رابطهٔ (۴۳) و نیز رابطهٔ $J^0=c\rho$ معادلهٔ (۴۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\left(1+\ell^4\Box\Box\right)\nabla\cdot\vec{E}\left(\vec{x},t\right)=\frac{\rho\left(\vec{x},t\right)}{\varepsilon_0}. \qquad (۴۵)$$

رابطهٔ (۴۵) شکل دیفرانسیلی قانون گوس در الکترودینامیک HD_4 است. انتخاب $\nu=1$، $\nu=2$ و $\nu=3$ و نیز استفاده از روابط (۲۰) ، (۴۳) و $J^1=J_x,\ J^2=J_y,\ J^3=J_z$ معادلهٔ زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\left(1+\ell^4\Box\Box\right)\left[\nabla\times\vec{B}\left(\vec{x},t\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}\right]=\mu_0\vec{J}\left(\vec{x},t\right). \qquad (۴۶)$$

معادلهٔ (۴۶) شکل دیفرانسیلی قانون آمپر در الکترودینامیک HD_4 است. همچنین استفاده از رابطه‌های (۴) و (۴۲) معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\nabla\cdot\vec{B}\left(\vec{x},t\right)=0, \qquad (۴۷)$$

$$\nabla\times\vec{E}\left(\vec{x},t\right)=-\frac{\partial\vec{B}\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}. \qquad (۴۸)$$

همان‌گونه که دیده می‌شود معادلات (۴۷) و (۴۸) در الکترودینامیک HD_4 و الکترودینامیک ماکسول شکل ریاضی یکسانی دارند[۱و۲]. روابط (۴۵) تا (۴۸) معادلات بنیادی حاکم بر الکترودینامیک HD_4 در یک فضا–زمان مینکوفسکی چهار بعدی هستند. در الکترودینامیک به روابطی که نحوهٔ وابستگی $\vec{D}$ (بردار جابه‌جایی الکتریکی) و $\vec{H}$ (بردار شدت مغناطیسی) را به $\vec{E}$ و $\vec{B}$ نشان می‌دهند، یعنی روابط

$$\vec{D}=\vec{D}\left[\vec{E},\vec{B}\right], \qquad (۴۹)$$

$$\vec{H}=\vec{H}\left[\vec{E},\vec{B}\right], \qquad (۵۰)$$

روابط ساختمندی گفته می‌شود [۱ و ۳۳]. اگر چه روابط ساختمندی وابسته به الکترودینامیک ماکسول شکل ریاضی ساده‌ای دارند اما در تعمیم‌های ممکنهٔ نظریهٔ ماکسول همانند نظریهٔ بورن–اینفلد[1] که یک تعمیم غیرخطی نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول به شمار می‌آید روابط ساختمندی شکل ریاضی نسبتاً پیچیده‌ای دارند[۳۳]. بر این اساس، معادلات (۴۵) و (۴۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla\cdot\vec{D}\left(\vec{x},t\right)=\rho\left(\vec{x},t\right), \qquad (۵۱)$$

$$\nabla\times\vec{H}\left(\vec{x},t\right)=\vec{J}\left(\vec{x},t\right)+\frac{\partial\vec{D}\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}, \qquad (۵۲)$$

که

$$\vec{D}\left(\vec{x},t\right)=\varepsilon_0\left(1+\ell^4\Box\Box\right)\vec{E}\left(\vec{x},t\right), \qquad (۵۳)$$

$$\vec{H}\left(\vec{x},t\right)=\frac{1}{\mu_0}\left(1+\ell^4\Box\Box\right)\vec{B}\left(\vec{x},t\right), \qquad (۵۴)$$

روابط (۵۳) و (۵۴) روابط ساختمندی وابسته به الکترودینامیک HD_4 هستند. اگر از طرفین معادلهٔ (۵۲) واگرایی گرفته و از معادلهٔ (۵۱) استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\nabla\cdot\vec{J}\left(\vec{x},t\right)+\frac{\partial\rho\left(\vec{x},t\right)}{\partial t}=0. \qquad (۵۵)$$

همان‌گونه که معادلهٔ (۵۵) نشان می‌دهد شکل دیفرانسیلی معادلهٔ پیوستگی بار و جریان در الکترودینامیک HD_4 همانند شکل این معادله در الکترودینامیک ماکسول است. در حد $\ell\to 0$ قوانین گوس و آمپر تعمیم یافته، یعنی معادلات (۴۵) و (۴۶) به صورت زیر در می‌آیند:

[1]Born-Infeld

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x},t)=\frac{\rho(\vec{x},t)}{\varepsilon_0},\qquad (۵۶)$$

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{x},t)=\mu_0\vec{J}(\vec{x},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}.\qquad (۵۷)$$

روابط (۵۶) و (۵۷) به ترتیب شکل دیفرانسیلی قانون گوس و قانون آمپر در الکترودینامیک ماکسول هستند. از سوی دیگر در حد $\ell\to 0$ روابط ساختمندی (۵۳) و (۵۴) به شکل زیر در می‌آیند:

$$\vec{D}(\vec{x},t)=\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},t),\qquad (۵۸)$$

$$\vec{H}(\vec{x},t)=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{x},t).\qquad (۵۹)$$

روابط (۵۸) و (۵۹) روابط ساختمندی وابسته به الکترودینامیک ماکسول در غیاب دی الکتریک و مغناطش هستند[۱]. برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی (الکتروستاتیک) معادلات (۴۵) تا (۴۸) به صورت زیر در می‌آیند

$$\left(1+\ell^4\nabla^2\nabla^2\right)\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0},\qquad (۶۰)$$

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{x})=0.\qquad (۶۱)$$

معادلات (۶۰) و (۶۱) معادلات بنیادی الکتروستاتیک HD_2 در فضای دکارتی سه بعدی هستند. به لحاظ ریاضی دستگاه معادلات (۶۰) و (۶۱) هم‌ارز با معادلهٔ پواسون مرتبهٔ ششم (۲۴) در حالت $D=3$ یعنی معادلهٔ

$$\left(1+\ell^4\nabla^2\nabla^2\right)\nabla^2\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}\qquad (۶۲)$$

هستند. بدیهی است که در حد $\ell\to 0$ معادلهٔ پواسون تعمیم یافتهٔ (۶۲) به معادلهٔ $\nabla^2\phi(\vec{x})=-\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$ که همان معادلهٔ پواسون در الکتروستاتیک ماکسول است تبدیل می‌شود.

۵. تعیین شکل دقیق پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک HD_2 در فضای دکارتی سه بعدی

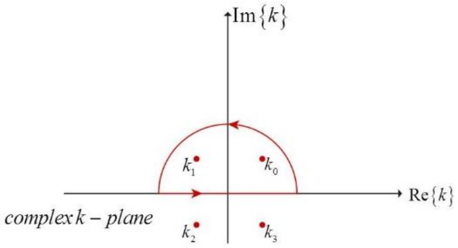
هدف ما در این بخش به دست آوردن عبارت‌هایی تحلیلی برای شکل پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای q با چگالی بار $\rho(\vec{x})=q\delta^{(3)}(\vec{x})$ در الکتروستاتیک HD_2 است. برای تعیین شکل پتانسیل الکتروستاتیکی یک بار نقطه‌ای در مدل HD_2 در فضای دکارتی سه بعدی کافی است تا در رابطهٔ (۳۱) $D=3$ قرار دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x})&=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2\left[1+\ell^4\left(k^2\right)^2\right]}d^3k\\&=\underbrace{\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2}d^3k}_{Coulomb\ term}\\&\quad\underbrace{-\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\ell^4}{(2\pi)^3}\int\frac{k^2e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{1+\ell^4\left(k^2\right)^2}d^3k.}_{HD_2\ corrections}\end{aligned}\qquad (۶۳)$$

اگر برای محاسبهٔ انتگرال‌های رابطهٔ (۶۳) از مختصات قطبی کروی (k,θ,φ) استفاده کرده و بردار مکان $\vec{x}$ را در امتداد محور k_z در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x})&=\frac{q}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\left[\int_0^\infty dk\int_0^\pi e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\right.\\&\quad\left.-\ell^4\int_0^\infty\frac{k^4}{1+\ell^4k^4}dk\int_0^\pi e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\right]\\&=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^\infty\frac{\sin kr}{k}dk-\ell^4\int_0^\infty\frac{k^3\sin kr}{1+\ell^4k^4}dk\right],\end{aligned}\qquad (۶۴)$$

که $r=|\vec{x}|=\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2}$ اندازهٔ بردار مکان در فضای دکارتی سه بعدی است.



شکل ۱. پربند مربوط به محاسبهٔ انتگرال رابطهٔ (۶۶)

در صفحهٔ ۱۱۰ مرجع [۳۱] انتگرال زیر محاسبه شده است

$$\int_0^\infty\frac{\sin px}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & p>0\\ 0, & p=0\\ -\frac{\pi}{2}, & p<0.\end{cases}\qquad (۶۵)$$

با مقایسه‌ای میان انتگرال اول در سمت راست رابطهٔ (۶۴)، یعنی $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin kr}{k}dk$ با رابطهٔ (۶۵) درمی‌یابیم که $\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin kr}{k}dk=\frac{\pi}{۲}\ (r>\circ)$ بوده و رابطهٔ (۶۴) را می‌توان بعد از ساده سازی به شکل نهایی زیر نوشت:

$$\phi(\vec{x})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}\left[۱-\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^{۳}\sin kr}{k^{۴}+\frac{۱}{\ell^{۴}}}dk\right]. \qquad (۶۶)$$

برای محاسبهٔ انتگرال موجود در رابطهٔ (۶۶) از قضیهٔ مانده‌ها استفاده می‌کنیم [۳۴]. برای این منظور لازم است تا انتگرال

$$\oint\frac{k^{۳}e^{ikr}}{k^{۴}+\frac{۱}{\ell^{۴}}}dk \qquad (۶۷)$$

را مطابق شکل ۱ بر روی نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ در نیمهٔ بالایی صفحهٔ مختلط k محاسبه کنیم.

همان گونه که دیده می‌شود تابع

$$f(k)=\frac{k^{۳}e^{ikr}}{k^{۴}+\frac{۱}{\ell^{۴}}}\ (\ell>\circ), \qquad (۶۸)$$

در صفحهٔ مختلط k چهار قطب ساده $\{k_{\circ},k_{۱},k_{۲},k_{۳}\}$ به صورت زیر دارد:

$$k_{\circ,۱}=\pm\frac{۱}{\ell\sqrt{۲}}+i\frac{۱}{\ell\sqrt{۲}},\ k_{۲,۳}=\pm\frac{۱}{\ell\sqrt{۲}}-i\frac{۱}{\ell\sqrt{۲}}. \qquad (۶۹)$$

مطابق شکل ۱ تنها دو قطب $k_{\circ}$ و $k_{۱}$ در داخل نیم‌دایره قرار می‌گیرند. با استفاده از قضیهٔ مانده‌ها، انتگرال رابطهٔ (۶۷) را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}\oint\frac{k^{۳}e^{ikr}}{k^{۴}+\frac{۱}{\ell^{۴}}}dk&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^{۳}e^{ikr}}{k^{۴}+\frac{۱}{\ell^{۴}}}dk\\&=۲\pi i\left[\mathrm{Res}(f;k_{\circ})+\mathrm{Res}(f;k_{۱})\right]\\&=۲\pi i\left[\frac{۱}{۴}e^{ik_{\circ}r}+\frac{۱}{۴}e^{ik_{۱}r}\right]\\&=\pi ie^{-\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}}\cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}\right).\end{aligned} \qquad (۷۰)$$

از رابطهٔ (۷۰) انتگرال زیر نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k^{۳}\sin kr}{k^{۴}+\frac{۱}{\ell^{۴}}}dk=\pi e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}}\cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}\right). \qquad (۷۱)$$

اگر انتگرال محاسبه شده در رابطهٔ (۷۱) را در رابطهٔ (۶۶) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi(\vec{x})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}\left[۱-e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}}\cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}\right)\right]. \qquad (۷۲)$$

رابطهٔ (۷۲) شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای q در مبدأ فضای دکارتی سه بعدی در الکتروستاتیک $HD_{۲}$ را نشان می‌دهد. بنا به رابطهٔ (۷۲)، پتانسیل یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک $HD_{۲}$ در فضای دکارتی سه بعدی همچنان تقارن کروی دارد. در حد $\ell\to\circ$ $(\ell<<۱)$، تابع $\cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}\right)$ در رابطهٔ (۷۲) تابعی کراندار دربازهٔ[+۱و-۱] بوده و از این‌رو می‌توان نوشت:

$$\lim_{\ell\to\circ}e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}}\cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}\right)=\circ. \qquad (۷۳)$$

با توجه به رابطهٔ (۷۳) در حد $\ell\to\circ$ پتانسیل معرفی شده در رابطهٔ (۷۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi(\vec{x})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r}. \qquad (۷۴)$$

رابطهٔ (۷۴) نشان دهندهٔ این واقعیت است که در حالت حدی $\ell<<1$، الکتروستاتیک $HD_{۲}$ رفتاری مشابه با الکتروستاتیک ماکسول را از خود نشان می‌دهد. اکنون به بررسی رفتار رابطهٔ (۷۲) برای نقاط بسیار نزدیک به محل بار نقطه‌ای می‌پردازیم، داریم

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x})&=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\lim_{r\to\circ}\frac{۱}{r}\left[۱-\left(۱-\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}+\frac{r^{۲}}{۴\ell^{۲}}+O(r^{۳})\right)\left(۱-\frac{r^{۲}}{۴\ell^{۲}}+O(r^{۴})\right)\right]\\&=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\lim_{r\to\circ}\frac{۱}{r}\left[\frac{r}{\ell\sqrt{۲}}+O(r^{۲})\right]\\&=\frac{q}{۴\sqrt{۲}\pi\varepsilon_{\circ}\ell}+O(r^{۱}),\ r\ll۱\ (r\to\circ).\end{aligned} \qquad (۷۵)$$

رابطهٔ (۷۵) آشکارا نشان می‌دهد که در الکتروستاتیک $HD_{۲}$ پتانسیل مربوط به بار نقطه‌ای در مکان بار بر خلاف الکتروستاتیک ماکسول مقداری متناهی دارد. همچنین در فواصل بسیار دور از بار نقطه‌ای q، پتانسیل (۷۲) رفتاری مشابه با پتانسیل کولن در الکتروستاتیک ماکسول را از خود نشان

می‌دهد. برای محاسبهٔ میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک HD_4 در فضای دکارتی سه بعدی لازم است تا از روابط (۶۱) و (۷۲) استفاده کنیم. بنا به رابطهٔ (۶۱) می‌توان نوشت

$$\vec{E}\left(\vec{x}\right)=-\nabla\phi\left(\vec{x}\right). \tag{۷۶}$$

اگر پتانسیل مربوط به بار نقطه‌ای، یعنی رابطهٔ (۷۲) را در رابطهٔ (۷۶) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\vec{E}\left(\vec{x}\right)=\hat{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left\{1+\frac{r^2}{2\ell^2}e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{2}}}\left[n_0\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right)+n_1\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right)\right]\right\}. \tag{۷۷}$$

در رابطهٔ (۷۷) $\hat{e}_r$ بردار واحد شعاعی در دستگاه مختصات قطبی کروی بوده و $n_0\left(x\right)=-\dfrac{\cos x}{x}$ و $n_1\left(x\right)=-\dfrac{\cos x}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x}$ به ترتیب توابع کروی نویمان از مرتبهٔ صفر و یک هستند[۲]. با استدلالی مشابه با آنچه در رابطهٔ (۷۳) انجام شد می‌توان نشان داد که در حد $\ell\to 0$ رابطهٔ (۷۷) به شکل زیر در می‌آید:

$$\vec{E}\left(\vec{x}\right)=\hat{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{۷۸}$$

رابطهٔ (۷۸) تأییدی مجدد بر این واقعیت است که الکتروستاتیک HD_4 در فضای دکارتی سه بعدی در حد $\ell\to 0$ رفتاری مشابه با الکتروستاتیک ماکسول را از خود به نمایش می‌گذارد. حال اجازه دهید تا به بررسی رفتار رابطهٔ (۷۷) برای نقاط بی‌نهایت نزدیک به محل بار $\left(r\to 0\right)$ بپردازیم. داریم

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(\vec{x}\right)&=\hat{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\left[\frac{r^3}{3\sqrt{2}\ell^3}+O\left(r^4\right)\right]\\&=\hat{e}_r\frac{q}{12\sqrt{2}\pi\varepsilon_0\ell^3}r+O\left(r^2\right),\ r\ll 1\left(r\to 0\right).\end{aligned} \tag{۷۹}$$

رابطهٔ (۷۹) نشان می‌دهد که وجود مقیاس طول مشخصهٔ ℓ مانع از واگرایی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به بار می‌شود. به بیان دیگر پارامتر ℓ نقش یک تنظیم کننده را ایفا کرده و بر طبق روابط (۷۵) و (۷۹) باعث جلوگیری از واگرایی پتانسیل و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود.

۶. بحث و نتیجه‌گیری

اغلب نظریه‌های بنیادی فیزیک نظری همانند نظریهٔ گرانش خطی شده و الکترودینامیک ماکسول نظریه‌هایی موضعی به شمار می‌آیند که این نظریه‌ها را می‌توان از یک کنش S به شکل

$$S\left(\left[\phi\right]\right)=\frac{1}{c}\int_{M^{1,D}}d^{D+1}x\mathcal{L}\left(\phi,\partial_\mu\phi\right), \tag{۸۰}$$

نتیجه گرفت که $\mathcal{L}$ تابعی از میدان ϕ و مشتق مرتبهٔ اول آن، یعنی $\partial_\mu\phi$ است. همچنین $M^{1,D}$ فضا–زمان مینکوفسکی توصیف شده توسط متریک (۲) است. در نظریهٔ ماکسول و گرانش خطی شده که توسط یک میدان تانسوری مرتبهٔ دوم متقارن $h_{\mu\nu}\left(x\right)$ توصیف می‌شود میدان ایستای وابسته به یک شئ نقطه‌گون در مبدأ واگرا است [۳۵]. به همین علت خود–انرژی وابسته به اشیاء نقطه‌گون در نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول و گرانش خطی شده بی‌نهایت است که چنین تکینگی‌های کلاسیکی را می‌توان نمودی از تکینگی‌های مشابه در نسخهٔ کوانتومی این نظریه‌ها دانست [۳۵]. ایدهٔ مطالعهٔ مدل‌هایی که در آنها لاگرانژی توصیف کنندهٔ مدل دربرگیرندهٔ مشتقات مراتب بالاتر میدان هستند ایدهٔ تازه‌ای نبوده و سابقهٔ بررسی چنین مدل‌هایی لااقل به دههٔ ۵۰ قرن میلادی گذشته باز می‌گردد [۵]. در آن زمان فیزیک‌دانان نظری امید داشتند که شاید نظریه‌های میدان در برگیرندهٔ مشتقات مراتب بالاتر میدان بتوانند راهکاری برای حذف واگرایی‌های ظاهر شده در بسط اختلالی انتگرال‌های فاینمن در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی ارائه کنند [۵]. در سالیان اخیر علاقه به مطالعهٔ نظریه میدان‌های کوانتومی با مشتقات از مراتب بالاتر و حتی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت به شکل فزاینده‌ای افزایش یافته است که شاید بتوان مهم‌ترین دلیل چنین علاقهٔ فزاینده‌ای را ناشی از پیشرفت‌های صورت گرفتهٔ اخیر در نظریهٔ ریسمان و گرانش کوانتومی دانست [۷و۲۶]. اکنون ضروری است تا اشاره‌ای به انگیزه استفاده از مدل HD_4 در این مقاله داشته باشیم. همان گونه که در مقدمه این مقاله بیان شد مدل HD_N توسط چگالی لاگرانژی (۱۳) توصیف می‌شود که در آن N باید یک عدد صحیح مثبت، یعنی $N\in\left\{1,2,3,\ldots\right\}$ باشد.

ساده‌ترین انتخاب برای عدد صحیح N ، یعنی $N=1$ به مدل HD_1 منجر می‌شود که بنا به رابطهٔ (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}_{HD_1}=-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}\left[1-\ell^2\Box\right]F^{\mu\nu}-J^{\mu}A_{\mu}. \qquad (81)$$

مدل (۸۱) به معادلات میدان با مشتقات مرتبهٔ چهارم منجر می‌شود که چنین معادلاتی در مبحث مربوط به حذف تکینگی پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در اینجا به بررسی مجدد این مباحث نخواهیم پرداخت. دومین عضو از نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_N با انتخاب $N=2$ به دست می‌آید. مدل HD_2 ویژگی‌های منحصر به فرد زیر را دارد:

الف) در این مدل امکان تعیین شکل تابع گرین برای یک چشمهٔ نقطه‌ای بار ساکن به صورت تحلیلی امکان پذیر است (رابطهٔ (۷۲)).

ب) در حد $\ell\to 0$ $(\ell\ll 1)$، این مدل قادر به بازتولید تمام نتایج نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول است و از این‌رو مدل HD_2 را می‌توان تعمیمی سازگار از نظریهٔ ماکسول در نظر گرفت.

پ) در فواصل $r\gg\ell$ پتانسیل و میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه‌ای در این مدل به پتانسیل و میدان یک بار نقطه‌ای در نظریهٔ ماکسول تبدیل می‌شوند.

ت) بر خلاف نظریهٔ ماکسول که مقدار پتانسیل و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به محل بار بی‌نهایت هستند، در این مدل وجود مقیاس طول مشخصهٔ ℓ باعث متناهی شدن این کمیت‌ها در محل بار می‌شود.

ث) بدیهی است که انتخاب مقادیر $N\geq 3$ به مدل‌های پیچیده‌تری از نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_N می‌انجامد که این امر تحلیل ریاضی این مدل‌ها و امکان تعیین شکل دقیق تابع گرین بار نقطه‌ای برای این مدل‌ها را به مراتب دشوارتر از مدل HD_2 خواهد کرد.

با توجه به موضوعات مطرح شده در بندهای الف تا ث منطقی خواهد بود که به بررسی ساده‌ترین مدل از نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_N، یعنی مدل HD_2 بپردازیم و ادامهٔ کار بر روی مدل‌های پیچیده‌تر را به پژوهش‌های آتی موکول کنیم.

۶. ۱.مقایسهٔ بین روش‌های به کار برده شده در این مقاله با روش‌های‌به کار رفته در مراجع [۱۳-۱۷] در تحلیل رفتار یک بار نقطه‌ای ساکن

در مراجع [۱۳-۱۵] نویسندگان نشان داده‌اند که وارد کردن ایدهٔ وجود یک کمینهٔ طول در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی به درون ساختار نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول به یک نظریهٔ الکترودینامیک خطی با مشتقات مراتب بالاتر منجر می‌شود که در آن اندازهٔ خود-انرژی وابسته به یک بار نقطه‌ای مقداری متناهی به دست می‌آید. در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول در حضور یک کمینهٔ طول به لحاظ ریاضی هم‌ارز با نظریهٔ الکترودینامیک خطی با مشتقات مراتب بالاتر باپ-پودولسکی-لی-ویک[1] است [۳۸-۳۶] و پارامتر کمینهٔ طول نقش یک تنظیم کننده را بازی می‌کند که مانع از تکینگی پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود. در سال ۲۰۱۶ میلادی فیزیک‌دان اوکراینی تکاچوک[2]گستردگی تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای دکارتی D بعدی و یا متناظر با آن یک فضای فاز $2D$ بعدی ارائه کرد که در ساختار این جبر وجود برش تکانه‌ای برابر با $p_{\max}$ پیش‌بینی شده بود [۳۹]. بر این اساس، نویسندگان مراجع [۱۶و۱۷] به ارائه یک باز فرمول‌بندی از نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول در حضور برش تکانهٔ $p_{\max}$ بر مبنای مرجع [۳۹] پرداخته‌اند که در مدل معرفی شده توسط آنها برش تکانه همانند یک تنظیم کننده عمل کرده و باعث جلوگیری از تکینگی پتانسیل بار نقطه‌ای در محل بار می‌شود. ایده‌های مطرح شده در مراجع [۱۳-۱۷] برای دستیابی به یک نظریهٔ متناهی الکترودینامیک، بر پایهٔ مفهوم دگرگونش فضای فاز و بازفرمول‌بندی الکترودینامیک ماکسول در این فضای فاز دگرگون شده استوار است. در این مقاله، ما با در پیش گرفتن رهیافتی کاملاً متفاوت بدون تغییر دادن ساختار فضای فاز از طریق وارد کردن یک عامل شکل به صورت

$$\begin{aligned} f_{HD_2}\left(\ell^2\Box\right)&=1+\left(-\ell^2\Box\right)^2 \\ &=1+\ell^4\Box\Box, \end{aligned} \qquad (82)$$

در بخش جنبشی لاگرانژی ماکسول، یعنی

[1] Bopp-Podolsky-Lee-Wick

[2] Tkachuk

$$-\frac{۱}{۴\mu_۰}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\rightarrow-\frac{۱}{۴\mu_۰}F_{\mu\nu}\left(۱+\ell^۴\Box\Box\right)F^{\mu\nu}, \qquad (۸۳)$$

به یک نظریهٔ متناهی برای الکترودینامیک در ابعاد فضایی $D\in\{۳,۴,۵\}$ دست یافته‌ایم (رابطهٔ (۴۰)). در حالت خاص $D=۳$ (فضا-زمان چهار بعدی) پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای ساکن به صورت تحلیلی محاسبه شده‌اند (روابط (۷۲) و (۷۷)) و نشان داده شده است که مقدار این عبارات بر خلاف نظریهٔ ماکسول در محل بار مقادیری متناهی هستند (روابط (۷۵) و (۷۹)).

۶. ۲.براورد عددی برای مقیاس طول مشخصهٔ ℓ در رابطهٔ (۱۲)

در صفحات ۱۸ و ۱۹ مرجع [۳۵] نشان داده شده است که در نظریه‌های ماکسول از کلاس GF_N که بنا به روابط (۱۰) و (۱۲) عامل شکلی به صورت

$$f_{GF_N}\left(\ell^۲\Box\right)=\exp\left[\left(-\ell^۲\Box\right)^N\right],\ \ell>۰,\ N\in\{۱,۲,...\} \qquad (۸۴)$$

دارند مقیاس طول مشخصهٔ ℓ در رابطهٔ (۱۲) کران بالایی برابر با $۱۰^{-۲۰}m$ دارد. یعنی

$$\ell<۱۰^{-۲۰}m. \qquad (۸۵)$$

با اندکی دقت درمی‌یابیم که مقدار عددی مربوط به کران بالای مقیاس طول مشخصهٔ ℓ در رابطهٔ (۸۵) به لحاظ اندازه 100 مرتبه کوچک‌تر از مقیاس طول مربوط به برهم‌کنش‌های الکتروضعیف است که در حدود $۱۰^{-۱۸}m$ است $\left(\ell_{electroweak}=۱۰^{-۱۸}m\right)$ [۲۸]. یعنی

$$\ell_{\max}\sim\frac{۱}{۱۰۰}\ell_{electroweak}. \qquad (۸۶)$$

لازم به ذکر است که در سایر مدل‌های غیرموضعی برای الکترودینامیک ماکسول نظیر مدل معرفی شده در مرجع [۴۰]، مقدار عددی تخمین زده شده برای ℓ مقداری بسیار نزدیک به مقدار ℓ در رابطهٔ (۸۵) است. بنا به روابط (۸) ، (۱۰) و (۱۲)،عامل شکل وابسته به مدل‌های GF_N در رابطهٔ (۸۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}f_{GF_N}\left(\ell^۲\Box\right)&=۱+\left(-\ell^۲\Box\right)^N+O\left(\ell^{۴N}\right)\\&=f_{HD_N}\left(\ell^۲\Box\right)+O\left(\ell^{۴N}\right),\end{aligned} \qquad (۸۷)$$

که $f_{HD_N}\left(\ell^۲\Box\right)$ همان عامل شکل معرفی شده برای نظریه‌های ماکسول از کلاس HD_N در رابطهٔ (۸) است. بر طبق رابطهٔ (۸۷)، برای مقادیر بالنّسبه کوچک ℓ، کران بالای گزارش شده برای ℓ در رابطهٔ (۸۵) را می‌توان با اندکی اغماض برابر با کران بالای مقیاس طول مشخصهٔ ℓ در مدل‌های HD_N و به صورت مشخص مدل $HD_۲$ در این مقاله در نظر گرفت.

۶. ۳.شکل صریح پتانسیل و میدان الکتریکی برای یک توزیع دلخواه از بارهای الکتریکی ساکن در الکتروستاتیک $HD_۲$ در فضای دکارتی سه بعدی

در ابتدا قبل از انجام هر محاسبه‌ای ضروری است تا یادآور شویم که نظریهٔ الکتروستاتیک $HD_۲$ در فضای دکارتی سه بعدی یک نظریهٔ با مشتقات مراتب بالای خطی است که توسط معادلهٔ پواسون مرتبهٔ ششم (۶۲) توصیف می‌شود. از این‌رو در نظریهٔ $HD_۲$ نیز همانند نظریهٔ الکتروستاتیک ماکسول اصل بسیار مهم و اساسی برهم‌نهی خطی معتبر است. با توجه به روابط (۷۲) و (۷۷)، پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای q که در مکان $\vec{x}'$ قرار گرفته است در مکان $\vec{x}$ چنین است:

$$\phi(\vec{x})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱-e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}}\cos\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \qquad (۸۸)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x})=\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^۳}&\left\{۱+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^۲}{۲\ell^۲}e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}}\right.\\&\left.\left[n_۰\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}\right)+n_۱\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \qquad (۸۹)$$

بنا به روابط (۸۸) و (۸۹)، بار نقطه‌ای $dq=\rho(\vec{x}')d^۳x'$ در مکان $\vec{x}$ پتانسیل و میدان الکتریکی به ترتیب برابر با $d\phi(\vec{x})$ و $d\vec{E}(\vec{x})$ را به وجود می‌آورد که مقدار آنها برابر

(۹۰)

$$d\phi(\vec{x})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{۱-e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}}\cos\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{۲}}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rho(\vec{x}')d^۳x',$$

و

$$d\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\left\{1+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{2\ell^2}e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}}\left[n_0\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)+n_1\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)\right]\right\}\rho(\vec{x}')d^3x', \tag{۹۱}$$

است. با توجه به روابط (۹۰) و (۹۱)، شکل پتانسیل و میدان الکتریکی مربوط به یک توزیع پیوسته از بار الکتریکی با چگالی بار حجمی ρ در الکتروستاتیک HD_2 در فضای دکارتی سه بعدی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1-e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\rho(\vec{x}')d^3x', \tag{۹۲}$$

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\left\{1+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{2\ell^2}e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}}\left[n_0\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)+n_1\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)\right]\right\}\rho(\vec{x}')d^3x'. \tag{۹۳}$$

در حد $\ell\to 0$ روابط (۹۲) و (۹۳) به شکل زیر در می‌آیند:

$$\phi(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x', \tag{۹۴}$$

$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\rho(\vec{x}')d^3x'. \tag{۹۵}$$

روابط (۹۴) و (۹۵) همان روابط آشنای مربوط به پتانسیل و میدان الکتریکی یک توزیع پیوسته از بار الکتریکی در الکتروستاتیک ماکسول در فضای دکارتی سه بعدی هستند[۱و۲].

مراجع

1. J D Jackson, "*Classical Electrodynamics*", John Wiley & Sons, Inc. Third Edition, New York (1999).
2. A Zangwill, "*Modern electrodynamics*", Cambridge University Press, Cambridge, UK (2013).
3. A Rostami and S K Moayedi, *J. Opt. A*: *Pure Appl. Opt*. **5** (2003) 380.
4. A Rostami and S K Moayedi, *Laser Phys*. **14** (2004) 1492.
5. A Pais and G Uhlenbeck, *Phys. Rev*. **79** (1950) 145.
6. L D Faddeev and A A Slavnov, "*Gauge fields: an introduction to quantum theory*", CRC Press, Second Edition, Boca Raton, Florida (2018).
7. L Buoninfante, G Lambiase, and A Mazumdar, *Nucl. Phys. B* **944** (2019) 114646.
8. E Witten, *Physics Today* **49** (1996) 24.
9. L N Chang, Z Lewis, D Minic, and T Takeuchi, *Advances in High Energy Physics* **2011** (2011) 493514.
10. K Nozari, M Gorji, V Hosseinzadeh, and B Vakili, *Class. Quantum Grav*. **33** (2016) 025009.
11. W S Chung and H Hassanabadi, *Phys. Lett. B* **785** (2018) 127.
12. F Wagner, *Eur. Phys. J. C* **83** (2023) 154.
13. S K Moayedi, M R Setare, and B Khosropour, *Advances in High Energy Physics* **2013** (2013) 657870.
14. S K Moayedi, M R Setare, and H Moayeri, *Europhysics Letters* **98** (2012) 50001.
15. S K Moayedi, M R Setare, and B Khosropour, *International Journal of Modern Physics A* **28** (2013) 1350142.
16. S Nabipour and S K Moayedi, *Iranian Journal of Physics Research* **22** (2022) 269(in Persian).
17. S Nabipour and S K Moayedi, *Journal of Research on Many-body Systems* **12** (2023) 51.
18. M Lazar and J Leck, *Symmetry* **12** (2020) 1104.
19. IL Shapiro, "*Primer in Tensor Analysis and Relativity*", Springer, New York (2019).
20. V P Frolov and A Zelnikov, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 064048.
21. J Boos, *International Journal of Modern Physics D* **27** (2018) 1847022.
22. J Boos, V P Frolov, and A Zelnikov, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 084021.
23. J Boos, "*Effects of non-locality in gravity and quantum theory*", Springer Nature, Cham, Switzerland (2021).
24. J Boos, V P Frolov, and J P Soto, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 045013.
25. C M Reyes, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 105008.

26. N Moeller and B Zwiebach, *Journal of High Energy Physics* **10** (2002) 034.
27. A Izadi and S K Moayedi, *Annals of Physics* **411** (2019) 167956.
28. M Ranaiy and S K Moayedi, *Modern Physics Letters A* **35** (2020) 2050038.
29. C. Efthimiou and C. Frye, “*Spherical harmonics in p dimensions*”, World Scientific, Singapore (2014).
30. A Accioly, J H Neto, G Correia, G Brito, J de Almeida, and W Herdy, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 105042.
31. M R Spiegel, S Lipschutz, and J Liu, “*Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*”, McGraw-Hill, Fifth Edition (2018).
32. M Dalarsson and N Dalarsson, “*Tensors, relativity, and cosmology*”, Academic Press, Second Edition, New York (2015).
33. F Fathi and S K Moayedi, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **15** (2018) 1850118.
34. E Freitag and R Busam, “*Complex Analysis”*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Second Edition, Berlin (2005).
35. J A P Soto, “*Gravitational and electromagnetic field of static and ultrarelativistic objects in nonlocal theory*”, MSc thesis, Alberta University, Canada (2022).
36. F Bopp, *Annalen der Physik* **430** (1940) 345.
37. B Podolsky, *Phys. Rev*. **62** (1942) 68.
38. T D Lee and G C Wick, *Phys. Rev*. *D* **2** (1970) 1033.
39. V M Tkachuk, *Foundations of Physics* **46** (2016) 1666.
40. A V Silva, E M C Abreu, and M J Neves, *International Journal of Modern Physics A* **31** (2016) 1650096.