

مروری بر آزمون نامزدهای سیاهچاله‌ها با تابش الکترومغناطیسی

معصومه قاسمی نودهی

پژوهشکده نجوم، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران

پست الکترونیکی: mghasemin@ipm.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۲۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۵/۱۹)

چکیده:

سیاهچاله‌های اخترفیزیکی، سیاهچاله کر نسبیت عام فرض شده‌اند؛ ولی مشاهدات مستقیمی برای اثبات آنها وجود ندارد. با مطالعه تابش الکترومغناطیسی اطراف این سیاهچاله‌ها می‌توان به آزمون هندسه فضا زمان آنها پرداخت. در این مقاله مروری، انحراف از حل کر نسبیت عام برای آزمون گرانش قوی نسبیت عام را در نظر می‌گیریم. ما تکنیک‌های سیاهچاله، طیف‌سنجی خط بازتابی پرتو ایکس، نگاشت طنین خط آهن، نوسان‌های شبه‌دوره‌ای و روش برازش پیوستار را به کار گرفته و سعی در حل مشکل تبهگنی داریم.

واژه‌های کلیدی: نسبیت عام، آزمون نسبیت عام، سیاهچاله‌های اخترفیزیکی، تابش الکترومغناطیسی

۱. مقدمه

است که تمام این جسم‌های فشرده که سیاهچاله کر نسبیت عام هستند، ولی ماهیت اصلی آنها همچنان نیاز به بررسی دارد. با کمک روش‌های دینامیکی - که حرکت‌های اوربیتالی گاز یا ستاره‌های تکی به‌دور جسم فشرده هستند - می‌توان جرم سیاهچاله را به‌طور دقیق اندازه‌گیری کرد. به دلیل فشردگی بسیار این اجرام، این اندازه‌گیری‌ها فرضیه سیاهچاله کر را پشتیبانی می‌کنند. مشاهده نشدن تابش الکترومغناطیسی از سطح آنها نیز به‌عنوان تأییدی بر وجود افق رویداد قلمداد می‌شود. این در حالی است که همچنان هیچ مدرکی برای تأیید هندسه کر به‌دور آنها وجود ندارد.

مشاهدات بر پایه سیاهچاله در گرانش قوی می‌تواند با کمک موج گرانشی [۶] یا موج الکترومغناطیس [۷] انجام شود. در این مقاله مروری، آزمون نسبیت عام با تابش الکترومغناطیسی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

نسبیت عام بیشتر از یک قرن پیش توسط انیشتین پا به عرصه وجود گذاشت [۱]. این نظریه توسط آزمون‌های گرانش ضعیف [۲]، از جمله آزمایش منظومه شمسی [۲ و ۳] و مشاهده پالسارهای دوتایی [۴] مورد آزمایش قرار گرفته است. تاکنون بیشتر آزمون‌های نسبیت عام در رژیم گرانش ضعیف بوده است و فقدان آزمون‌ها در رژیم قوی بسیار محسوس است. از این‌رو این آزمون‌ها یک مرز جدیدی برای علم محسوب می‌شوند.

بر اساس نسبیت عام، سیاهچاله‌های کر که تنها با دو مؤلفه اسپین و جرم [۵] مشخص می‌شوند، نتیجه نهایی رمبش گرانشی هستند که تحت عنوان نظریه "بی مویی" شناخته شده‌اند.

مشاهدات اخترفیزیکی برای دودسته از نامزدهای سیاهچاله‌ها کشف شده‌اند: جسم‌های ستاره‌وار در سامانه دوتایی پرتو ایکس با جرم تقریبی $20-5 M_{\odot}$ و جسم‌های ابرپر جرم در هسته کهکشانی با جرم تقریبی $10^5 - 10^6 M_{\odot}$. فرض بر این

به‌علاوه، در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای پارامتری کردن متریک کر صورت گرفته است [۸-۲۲] ایده این است که

زمان کر در نظر گرفته می‌شود؛ ولی اخیراً برای آزمون هندسه غیر کر نیز مورد استفاده قرار گرفته است. در این دو روش، تخمین جداگانه‌ای از پارامتر اسپین و انحراف از حل کر بسیار دشوار است؛ که به‌عنوان مشکل اصلی این دو روش مطرح می‌شود. خصوصیات تابش شده با گاز در قرص بازبرافزایشی در اطراف جسم غیر کر با اسپین مشخص می‌تواند خیلی شبیه کر با اسپین متناوب باشد؛ بنابراین، تنها می‌توان ترکیبی از اسپین و انحراف از هندسه کر را قیدگذاری کرد. در حالی که برای بعضی سیاه‌چاله‌ها ترکیب دو روش مفید نیست، برای برخی دیگر می‌تواند کاربردی باشد.

همچنین مشاهدات سایه سیاه‌چاله با تلسکوپ افق رویداد در طول موج میلی‌متری یا زیر میلی‌متری می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد [۳۸-۵۴]. علی‌رغم خطاهای سیستماتیک نوسان‌های شبه‌دوره‌ای، می‌توان بسامد این نوسان‌ها را برای مشاهدات رژیم قوی گرانشی استفاده نمود [۵۵-۵۸]. از سوی طیف پیوستار، خط‌آهن و نوسان‌های شبه‌دوره‌ای توسط تلسکوپ‌های پرتو ایکس مشاهده شدند.

۲. سایه سیاه‌چاله

سه نوع مسیر حرکت فوتون از شعاع‌های دور از سیاه‌چاله وجود دارد: اسیر شده

بی‌نهایت منحرف می‌شود. به دلیل این که چند بار دور سیاه‌چاله می‌چرخند، ناحیه روشنی را اطراف سیاه‌چاله در صفحه مشاهده‌گر ایجاد می‌کنند. این تصویر، دوبعدی است و ناحیه تاریک آن سایه سیاه‌چاله نامیده می‌شود. برای مطالعه سایه سیاه‌چاله فقط به یک متریک با رفتار خوب نیاز داریم، چون فقط معادله‌های ژئودزیک را حل می‌کنیم و هیچ فرضی از نظریه پشت آن نداریم. معادلات حرکت برای هندسه کر جدا می‌شوند. از آنجا که این معادلات حرکت برای انحراف از کر جداپذیر نیستند، حل برای بیشتر آنها امکان‌پذیر نیست. از این رو حل عددی نیاز است. اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا به سایه سیاه‌چاله نیاز داریم؟ سایه سیاه‌چاله، سیاه‌چاله را به تصویر

متریک عام‌تری نوشته شود که متریک کر را به‌عنوان حالت خاص شامل شود، همانند PPN حل شوارتز شیلد [۲]. در اکثر پارامتری کردن‌ها، پارامترهای انحرافی جمع جملاتی هستند که در صورت صفر شدن حل کر را بازیابی می‌کنند. از سوی دیگر فضا زمان‌های غیر کر، همان مشاهدات الکترومغناطیسی را تولید می‌کنند که فضا زمان کر تولید می‌کند. این به یک تبهگنی برای پارامترهایی که در رژیم گرانش قوی هستند، منجر می‌شود.

برای اثبات هندسی کر تنها مشاهده ویژگی‌های فضا زمانی آن کافی نیست، بلکه باید تمام انحراف‌ها از آن نیز صفر شود. اندازه‌گیری‌های کنونی اسپین جسم بر پایه نظریه فضا زمان کر است. این تبهگنی در اندازه‌گیری پارامترهای متریک کر مشکلی بزرگ برای اندازه‌گیری اسپین جسم فشرده و قیدگذاری روی انحراف از حل کر است. آزمون‌های بر پایه الکترومغناطیس از گرانش قوی می‌توانند با کمک داده‌های موجود پرتو ایکس انجام شوند؛ زیرا این خصوصیت تابش مغناطیسی تابش شده از گاز قرص بازبرافزایشی می‌تواند اطلاعاتی در مورد هندسه اطراف جسم فشرده را شامل شود. از جمله روش‌ها برای مطالعه فضا زمان اطراف نامزدهای سیاه‌چاله، طیف گرمایی قرص (روش برازش پیوستار) [۲۳-۳۱] و تحلیل رخ‌نمای پهن شده خط‌آهن K_{α} [۳۲-۳۷] است. در این روش فضا

پراکنده شده به بی‌نهایت و منحنی بحرانی. مسیر حرکت مورد آخر، مورد اول و دوم را از هم جدا می‌کند. در این کار پژوهشی، ما به منحنی بحرانی علاقمند هستیم و این مسیر حرکت را با جزئیات توضیح می‌دهیم. چرخش ناپایدار به توصیف منحنی بحرانی می‌پردازد و منحنی اسیر شده و پراکنده شده را جدا می‌سازد.

همان‌طور که اشاره شد بعضی از پرتوهای نوری اسیر سیاه‌چاله و برخی به بی‌نهایت پراکنده می‌شوند. اگر سه تکانه پرتو نوری تقریباً مماس بر چرخش فوتون باشد، این حرکت چرخشی ناپایدار است و به تعداد زیاد به دور سیاه‌چاله می‌چرخد. با اختلالی کوچک، این حرکت یا اسیر سیاه‌چاله می‌شود یا به

$$+ \left\{ \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + a^2 E^2 \sin^2(\theta) + L^2 \csc^2(\theta) \right\},$$

که در آن $\frac{\partial S}{\partial \phi} = L$ و $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ ثابت هستند. برای نوشتن معادلات جداگانه حرکت می‌توان نوشت:

$$S = -\frac{1}{\nu} \mu^2 \tau - Et + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (4)$$

که در آن برای ژئودزیک زمان گونه $\mu^2 = 1$ و برای ژئودزیک صفر $\mu^2 = 0$ است. با استفاده از $\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\frac{1}{\nu} \mu^2$ در معادله (۳) داریم

$$\left\{ \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{-E^2 (r^2 + a^2) + \nu a E L M r - a^2 L^2}{\Delta} + a^2 E^2 + L^2 + \mu^2 r^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \cos^2(\theta) \left[\frac{L^2}{\sin^2(\theta)} + a^2 (\mu^2 - E^2) \right] \right\} = 0, \quad (5)$$

در رابطه (۵) کروشه اول تنها تابعی از r است، در حالی که کروشه دوم تنها تابعی از θ است. با معرفی Q به عنوان ثابت جدایی می‌توان نوشت

$$\left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left\{ E(r^2 + a^2) - aL \right\}^2 - \Delta \left\{ Q + (L - aE)^2 + \mu^2 r^2 \right\} \equiv \frac{\mathcal{R}}{\Delta^2} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 = Q - \cos^2(\theta) \left\{ \frac{L^2}{\sin^2(\theta)} + a^2 (\mu^2 - E^2) \right\} \equiv \Theta.$$

از معادلات (۴) و (۶) داریم

$$S = -\frac{1}{\nu} \mu^2 \tau - Et + L\phi + \int_{\pm} \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + \int_{\pm} \sqrt{\Theta} d\theta, \quad (7)$$

و همچنین با توجه به این که $\frac{\partial S}{\partial Q} = 0$ می‌توان نوشت

$$\int_{\pm} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}}} dr = \int_{\pm} \frac{1}{\sqrt{\Theta}} d\theta, \quad (8)$$

با استفاده از $\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = p_\mu$ و $\dot{x}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = g^{\mu\nu} p_\nu$ معادلات حرکت به شرح زیرند:

$$\Sigma^r \dot{r} = \mathcal{R} \quad (9)$$

$$\Sigma^\theta \dot{\theta} = \Theta$$

و

$$\Sigma \dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left\{ E(r^2 + a^2) - a^2 \sin^2(\theta) \Delta - \nu a L M r \right\} \quad (10)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \nu a E M r + L \csc^2(\theta) (\Delta - a^2 \sin^2(\theta)) \right\}$$

می‌کشد. پس انتظار می‌رود سیاهچاله به‌عنوان سایه در آسمان دیده شود. این روش برای مشاهده فضا زمان نزدیک جسم فشرده و مطالعه خصوصیت آن بسیار قدرتمند است. به‌علاوه اخیراً، مشاهدات وی ال بی آی (VLBI) با تلسکوپ افق رویداد در باندهای مشاهداتی میلی‌متری توانسته تصویر جسم مرکزی را از کهکشان M87* [۵۹] و SgrA* [۶۰] ثبت کند. آنها در تلاشند نشان دهند تصویر با هندسه کر سازگار است؛ ولی جایگزین‌های سیاهچاله کر از رده خارج نشدند. هر انحرافی از پیش‌بینی نسبت عام در سایه M87* و SgrA* نشان‌دهنده هندسه غیر کر است.

علاوه بر این، سایه سیاهچاله به‌تنهایی اسپین و زاویه دید را اندازه‌گیری می‌کند؛ ولی وضوح زاویه‌ای خوب، ضروری است. برای مطالعه سایه سیاهچاله، معادله ژئودزیک باید حل شود. برای حل معادله ژئودزیک به‌صورت عددی، از کد ری-تریسینگ استفاده می‌کنیم. این کد از روش رنگ-کوتا-نیستروم استفاده می‌کند. ما از گام‌های انطباقی با کنترل خطا در محاسباتمان استفاده می‌کنیم. برای مقاله‌های سایه سیاهچاله به مراجع [۲۲، ۶۱-۶۴] را ببینید. جهت ارائه معادلات مربوط، از متریک کر در مختصات بویئر-لیندکوئیست شروع می‌کنیم.

$$ds^2 = -[1 - (\nu M_r) / (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)] dt^2 - (\nu M r a \sin^2 \theta) / (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) dt d\phi + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) / (r^2 - \nu M r + a^2) dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + [r^2 + a^2 + (\nu M r a \sin^2 \theta) / (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)] \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

که با کمک آن، رابطه همیلتون - ژاکوبی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu}, \quad (2)$$

که S تابع اصل همیلتون است. در نتیجه متریک (۱) در رابطه (۲) داریم

$$\nu \Sigma \frac{\partial S}{\partial \tau} = \left\{ \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{-E^2 (r^2 + a^2) + \nu a E L M r - a^2 L^2}{\Delta} \right\}$$

$$\theta = \arccos \frac{y' \sin i + D \cos i}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + D^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{x'}{D \sin i - y' \cos i}$$

و شرایط اولیه برای چهار - تکانه فوتون عبارتند از:

$$k^r = -\frac{D}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + D^2}} |k_r| \tag{16}$$

$$k^\theta = \frac{\cos i - D \frac{y' \sin i + D \cos i}{x'^2 + y'^2 + D^2}}{\sqrt{x'^2 + (D \sin i - y' \cos i)^2}} |k_r|$$

$$k^\phi = \frac{x' \sin i}{x'^2 + (D \sin i - y' \cos i)^2} |k_r|$$

$$k^t = \sqrt{(k^r)^2 + r^2 (k^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (k^\phi)^2}$$

که در آن k^t از $g^{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0$ با فرض فضا زمان تخت به دست آمده است. برای شبیه سازی قسمت سایه، مرکز سایه را طبق زیر تعریف می کنیم:

$$x_c = \frac{\int \rho(x', y') x' dx' dy'}{\int \rho(x', y') dx' dy'} \tag{17}$$

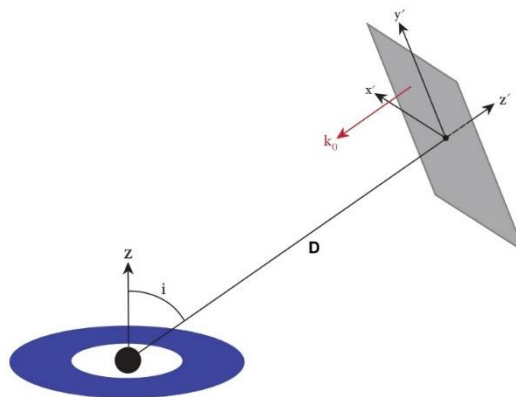
$$y_c = \frac{\int \rho(x', y') y' dx' dy'}{\int \rho(x', y') dx' dy'}$$

$\rho(x', y') = 1$ معادل داخل سایه و $\rho(x', y') = 0$ معادل خارج سایه است. همانطور که در شکل ۲ دیده می شود x' محورتقارن سایه است و $\phi = 0$ قسمت کوچکتر از محور تقارن است. عبارت $R(\phi)/R(\phi=0)$ سایه را به طور کامل توصیف می کند.

۳. طیف سنجی بازتابی پرتو ایکس

طیف سنجی بازتابی پرتو ایکس یا روش خط آهن، یک روش قدرتمند برای پرده برداری از خصوصیات رژیم گرانس قوی و قیدگذاری روی خواص فضا زمان غیر کر است.

ما از مدل قرص بازبرافزایشی- تاج استفاده می کنیم (شکل ۳). مدل فوق مدل نایکوو- ترون [۶۵] فرض شده است. در این مدل، قرص در صفحه استوایی، عمود به اسپین سیاه چاله قرار دارد. ذرات گاز در قرص حرکت شبه دایره ای استوایی ژئودزیک را دنبال می کنند. صفحه داخلی قرص در داخلی ترین مدار دایره ای پایدار (ISCO) قرار دارد. یک



شکل ۱. برای جزییات به متن مراجعه کنید. گرفته شده از پایان نامه [۱۹].

از آنجا که برای ژئودزیک صفر $\mu^r = 0$ ، با باز تعریف ثابت های حرکت

$$\lambda = \frac{L}{E}, \quad q^r = \frac{Q}{E^r} \tag{11}$$

و همچنین Θ و R و معادله (۶)

$$\mathcal{R}/E^r = \left\{ \left[(r^r + a^r) - a\lambda \right]^r - \Delta \left[q^r + (\lambda - a)^r \right] \right\} (=V_r) \tag{12}$$

$$\Theta/E^r = q^r - \cos^r(\theta) \left\{ \frac{\lambda^r}{\sin^r(\theta)} - a^r \right\} (=V_\theta)$$

برای هدف سایه، برای منحنی ناپایدار داریم

$$V_r^*(r) > 0. \tag{13}$$

به علاوه معادلات سماوی تصویر در بی نهایت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x' = \frac{y}{\sin i} \tag{14}$$

$$y' = \pm (q^r + a^r \cos i - \lambda^r \cot i)^{1/2}$$

که در آن i زاویه دید و a اسپین جسم فشرده است. q^r و λ در معادله (۱۱) تعریف شده اند. با حل همزمان معادلات $V_r^*(r) = V_r'(r) = 0$ و λ و $V_r^*(r) > 0$ را به دست می آوریم و در معادله (۱۴) جایگذاری می کنیم. برای قسمت ری-تریسینگ مطابق شکل ۱ دو مختصات دکارتی، یکی در صفحه تصویر و دیگری در مرکز جسم فشرده در نظر گرفته می شود. برای شرایط اولیه به ترتیب زیر خواهیم داشت:

$$t_r = 0 \tag{15}$$

$$r_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + D^2}$$

هر نقطه از تصویر ظاهری از قرص با ضریب سرخ‌گرایی مشخص می‌شود. از قضیه لیوویل داریم

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{v^r}{v_e^r} = g^r \quad (19)$$

که I_e شدت محلی خاص و g ضریب سرخ‌گرایی است.

$$g = \frac{Eo}{Ee} = \frac{v}{v_e} = \frac{k_\alpha u_o^\alpha}{k_\beta u_e^\beta} \quad (20)$$

که $E_e = hv_e$ ، v بسامد فوتون اندازه‌گیری شده با مشاهده‌گر دور، k_α چهار-تکانه فوتون، $u_{obs}^\alpha = (-1, 0, 0, 0)$ چهار-

سرعت مشاهده‌گر و $u_e^\alpha = (u_e^t, 0, 0, \Omega u_e^t)$ چهار-سرعت

تابش کننده است. همه اثرات گرانشی شامل خیز دوپلر، سرخ

گرایی گرانشی و کشیده شدن چارچوب در ضریب سرخ

گرایی اعمال شده است. ما تابش قرص را یک نمایه توانی

$I_e \propto r^\alpha$ با $\alpha = -3$ در نظر می‌گیریم که حد نیوتونی را در

فاصله دور بازیابی می‌کند. شکل خط آهن به متریک زمینه،

زاویه دید، هندسه قرص (شعاع داخلی و خارجی) و نمایه

انتشار (فرسودگی) بستگی دارد. ما شعاع داخلی قرص را

ISCO قرار دادیم و شعاع خارجی به اندازه کافی بزرگ است.

تعریف ISCO به شرح زیر است. به منظور حرکت پایدار لازم

است $V_r \leq 0$. در نتیجه داریم

$$r_{ISCO} = M \left\{ 3 + B - s \sqrt{(3-A)(3+A+2B)} \right\} \quad (21)$$

که در آن A و B عبارتند از:

$$A \equiv 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{a}{M}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{a}{M}\right)^{1/2} \right] \quad (22)$$

$$B \equiv \left(3 \frac{a^2}{M^2} + A\right)^{1/2}$$

سپس ما جهت قیدگذاری روی پارامترهای کر، شبیه‌سازی داده

را برای تحلیل یک سیاه‌چاله دوتایی خیلی روشن انجام دادیم.

این کار با فرمان fekeit در XSPEC که یک نرم‌افزار برازش

طیف است انجام شده است. پس از تحلیل داده‌های

شبیه‌سازی شده می‌توان روی انحراف از نسبت عام در فضا

زمان غیر کر قید گذاشت [۶۶ و ۶۷].

قرص ناویکوو-ترون به صورت جسم سیاه محلی و به

صورت جسم سیاه چند رنگ وقتی به صورت شعاعی

اندازه‌گیری می‌شود، تابش الکترومغناطیسی منتشر می‌کند.

تاج معروف داغ‌تر و معمولاً به صورت اپتیک باریک و یک

ابر الکترونی پوشیده روی قرص است. هندسه دقیق تاج

نامعلوم است. فوتون‌های گرمایی از قرص بازبرافزایشی

می‌توانند با الکترون‌های داغ تاج فعل و انفعال داشته باشند.

به دلیل پراکندگی معکوس کامپتون، تاج یک چشمه پرتو

ایکس با طیف توانی است.

وقتی یک فوتون تاج وارد قرص شده ممکن است پخش

شود، یا با اثر اوژه (Auger) درگیر شود و یا یک خط نشر

فلورانس تولید کند. ما در این مقاله، به مورد آخر علاقمندیم.

قرص بازبرافزایشی‌ای با هندسه باریک و از نظر اپتیکی

ضخیم، تابش خط باریک فلورانس با فوتون‌های پرتو ایکس

از نظر اپتیکی باریک و کامپتونی تاج دارد. از آنجایی که آهن

یک فلز سنگین است قوی‌ترین خط، خط آهن یونیده ضعیف

$K\alpha$ در $6/4$ کیلوالکترون ولت است. این خط تا $6/95$

کیلوالکترون ولت برای آهن هیدروژن گونه یونیده جابه‌جا

می‌شود. این خط آهن $K\alpha$ یک ویژگی غالب در طیف

بازتابی پرتو ایکس است. این تابش در قسمت داخلی قرص

بازبرافزایشی به دلیل وجود اثرات نسبیتی خاص و عام جسم

فشرده شامل اثر جابه‌جایی دوپلر، سرخ‌گرایی گرانشی و

خم شدن نور، پهن و نامتقارن می‌شود. این نمایه پهن

نامتقارن برای ما فرصت مطالعه هندسه فضا زمان نزدیک

سیاه‌چاله‌های ستاره‌وار و ابرپرجم و آزمون رژیم گرانش

قوی دور این اجرام را فراهم می‌کند. در حال حاضر،

اندازه‌گیری اسپین و زاویه دید نامزدهای سیاه‌چاله‌ها با این

روش انجام می‌شود.

شبیه‌سازی خط آهن: جهت شبیه‌سازی خط آهن، ما از یک

کد ری-تریسینگ همانند سایه سیاه‌چاله برای حل معادله

ژئودزیک استفاده می‌کنیم. طیف می‌تواند به صورت چگالی

اعداد شار فوتون اندازه‌گیری شده با مشاهده‌گر دور بیان شود:

$$N_E = \frac{1}{E} \int I_\nu(E) d\Omega \quad (18)$$

به علاوه برای شبیه سازی این تأخیر زمانی می توان تابعیت بسامد و تابعیت انرژی این تأخیر زمانی را محاسبه کرد [۶۸]. تابع انتقال در حوزه بسامدی عبارت است از:

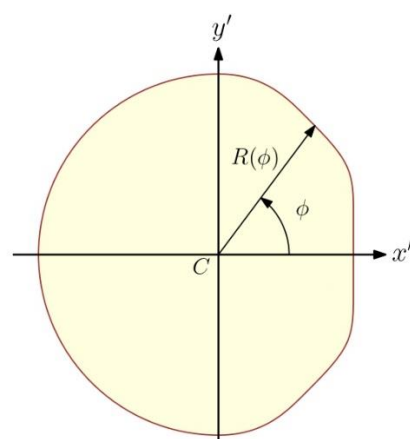
$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-i\pi f\tau} d\tau \quad (23)$$

که در آن $\psi(\tau)$ تابع انتقال در حوزه زمان است. تفاوت فاز به صورت زیر است:

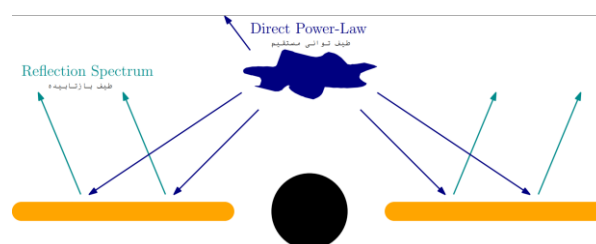
$$\phi(f) = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(\Psi)}{1 + \text{Re}(\Psi)} \right) \quad (24)$$

۵. نوسان های شبه دوره ای

نوسان های شبه دوره ای ابزاری قوی برای آزمون سیاه چاله ها و یافتن اطلاعات دقیق از متریک زمینه است که به صورت قله در چگالی طیفی توانی پرتو ایکس برای ستاره نوترونی و سیاه چاله های ستاره وار مشاهده شده اند. آنها همچنین، قله های باریک در بسامدهای مشخصه هستند که این بسامدها به طور مشخص با متریک فضا زمان تعریف می شوند و به شماره بازبرافزایشی، به خاطر وابستگی ضعیف به شار پرتو ایکس حساس نیستند. این بسامد مرکزی با دقت بالا قابل اندازه گیری است. علاوه بر این، بسامدهای نوسان های شبه دوره ای بسامد بالا در محدوده انتظاری مواد چرخان نزدیک شعاع ISCO از چشمه قرار دارند. در حال حاضر، اگر چه، سازوکار اصلی برای توصیف این نوسانات شبه دوره ای شناخته نشده است اما سناریوهای مختلفی پیشنهاد شده اند که در اکثر آنها بسامد نوسانات شبه دوره ای مستقیماً با بسامد اوربیتالی ذره آزمون مشخص می شود، که تنها با متریک فضا زمان ارتباط دارد و مستقل از پیچیدگی روند بازبرافزایشی است. مهم ترین برتری استفاده از نوسانات شبه دوره ای نسبت به روش های دیگر این است که با دقت بسیار بالایی اندازه گیری می شود. بنابراین، آنها می توانند به صورت بالقوه برای اندازه گیری پارامترهای هندسه فضا زمان دور جسم فشرده استفاده شوند. سه بسامد بنیادی، حرکت ذره آزمون را مشخص می کنند. اولین بسامد، بسامد اوربیتالی است که به بسامد کپلری، ν_{ϕ} ، نیز معروف است. این بسامد معکوس بازه زمانی اوربیتالی است. دومین بسامد، بسامد پیراچرخه ای شعاعی ν_r ، است. این بسامد برای نوسان های



شکل ۲. برای جزئیات به متن مراجعه کنید. گرفته شده از پایان نامه [۱۹].



شکل ۳. برای جزئیات به متن مراجعه کنید. گرفته شده از پایان نامه [۱۹].

۴. نگاشت طنین خط آهن

در چارچوب مدل قرص-تاج، طنین مرتبط با خط آهن یک تأخیر زمانی بین فوتون های مستقیم از تاج و فوتون های بازتابیده از قرص است. خط طیف حاصل یک تابع انتقال دوبعدی نامیده می شود. شکل این تابع انتقال دوبعدی با هندسه فضا زمان و خصوصیات سیاه چاله تعریف می شود. بنابراین، یک اندازه گیری دقیق تابع انتقال دوبعدی می تواند برای بررسی هندسه فضا زمان مورد استفاده قرار گیرد. ما از مدل قرص-تاج (که در قسمت طیف سنجی بازتابی پرتو ایکس توضیح داده شد) استفاده کردیم. علاوه بر پارامترهای سیاه چاله، این مدل قرص-تاج به پارامتر h به عنوان ارتفاع تاج بالای قرص بستگی دارد. همچنین توضیحات خط آهن مانند قسمت طیف سنجی بازتابی پرتو ایکس است. در این پژوهش طنین مرتبط با خط آهن را در نظر می گیریم که در آن یک تأخیر زمانی بین فوتون های مستقیم از تاج و بازتابیده از قرص لحاظ شده است و خط طیفی نتیجه شده، تابع هر دو زمان و انرژی فوتون است. شکل این تابع دوبعدی برای هندسه های مختلف متفاوت است.

معادله ژئودزیک را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\frac{d}{d\lambda}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu) = \frac{1}{\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\rho})\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho \quad (31)$$

حرکت دایره‌ای را می‌توان از معادله‌های ژئودزیک محاسبه کرد. حاصل این حرکت دایره‌ای بسامد زاویه‌ای چرخشی و بسامد اوربیتالی نتیجه شده است. حرکت دایره‌ای تقاضا می‌کند $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ پس مؤلفه شعاعی بدین شکل خواهد بود

$$(\partial_r g_{tt})\dot{t} + 2(\partial_r g_{t\phi})\dot{t}\dot{\phi} + (\partial_r g_{\phi\phi})\dot{\phi}^2 = 0 \quad (32)$$

این معادله، سرعت زاویه‌ای اوربیتالی را نتیجه می‌دهد

$$\Omega_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}$$

$$\Omega_\phi = \frac{-\partial_r g_{t\phi} \pm \sqrt{(\partial_r g_{t\phi})^2 - (\partial_r g_{tt})(\partial_r g_{\phi\phi})}}{\partial_r g_{\phi\phi}} \quad (33)$$

علامت (+) (-) برای چرخش همراستا (غیرهمراستا) است. بنابراین این بسامد اوربیتالی $\Omega_\phi = \frac{\Omega_\phi}{\sqrt{2\pi}}$ است. با در نظر گرفتن $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ در $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1$ داریم.

$$\dot{t} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega_\phi - g_{\phi\phi}\Omega_\phi^2}} \quad (34)$$

از آنجایی که $-E = g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi}$ و $L_z = g_{t\phi}\dot{t} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}$ به دست می‌آوریم

$$E = -\frac{g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_\phi}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega_\phi - g_{\phi\phi}\Omega_\phi^2}} \quad (35)$$

$$L_z = \frac{g_{t\phi} + g_{\phi\phi}\Omega_\phi}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega_\phi - g_{\phi\phi}\Omega_\phi^2}} \quad (36)$$

با جایگذاری E و L_z در معادله (۲۹) همراه با مؤلفه‌های متریک، V_{eff} به دست می‌آید. سپس یک اختلال کوچک به دور حرکت دایره‌ای در جهت شعاعی و عمودی در تقریب خطی در نظر گرفته می‌شود. حاصل دو معادله دیفرانسیل برای جابه‌جایی کوچک حول چرخش میانی است. اگر δ_r و δ_θ جابه‌جایی‌های کوچک حول چرخش میانگین باشد، داریم $r = r_0 + \delta_r$ و $\theta = \pi/\lambda + \delta_\theta$ با نادیده گرفتن مرتبه‌های بالاتر $O(\delta_r^2)$ و $O(\delta_\theta^2)$ ، معادلات دیفرانسیل زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{d\delta_r}{dt} + \Omega_r \delta_r = 0 \quad (37)$$

$$\frac{d\delta_\theta}{dt} + \Omega_\theta \delta_\theta = 0$$

شعاعی به صورت چرخش میانی است. سومین بسامد، بسامد پیراچرخه‌ای عمودی v_θ ، است. این بسامد، نوسان‌های عمودی دور چرخش میانی را تعیین می‌کند. این سه بسامد فقط به متریک فضا-زمان و شعاع چرخش بستگی دارند. در حالی که آنها به عنوان بسامدهای بنیادی برای حرکت چرخشی یک ذره آزاد تعریف شده‌اند، رابطه‌ای مستقیم بین آنها و بسامد برآمده از مدهای نوسانی شماره از جریان بازبرافزایشی وجود دارد.

در فضا-زمان کره بسامد بنیادی به شعاع r ، جرم سیاهچاله M و پارامتر اسپین a بستگی دارند.

$$v_\phi = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \frac{M^\lambda}{r^\lambda a M^\lambda}, \quad (25)$$

$$v_r = v_\phi \left(1 - \frac{\epsilon M}{r} \pm \frac{\lambda a M^\lambda}{r^\lambda} - \frac{\nu a^2}{r^2}\right), \quad (26)$$

$$v_\theta = v_\phi \left(\lambda \mp \frac{\nu a M^\lambda}{r^\lambda} + \frac{\nu a^2}{r^2}\right) \quad (27)$$

این سه معادله شامل سه متغیر r ، M و a و بنابراین قابل حل هستند.

برای مطالعه از حالت کلی متریک فضا-زمان ایستا و دارای تقارن محوری استفاده می‌شود:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2$$

$$+ g_{\theta\theta}d\theta^2 + 2g_{t\phi}dt d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2$$

که ضرایب متریک مستقل از t و ϕ هستند. پس دو متغیر بایسته خواهیم داشت: (۱) انرژی خاص در بی‌نهایت، E و (۲) مؤلفه $-z$ از زاویه خاص در بی‌نهایت، L_z از دو مؤلفه t و ϕ می‌توان نوشت.

$$\dot{t} = \frac{Eg_{\phi\phi} + L_z g_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \quad (28)$$

$$\dot{\phi} = -\frac{Eg_{t\phi} + L_z g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}$$

برای پایداری جرم سکون $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = -1$ می‌توان V_{eff} را معرفی کرد.

$$g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 = V_{eff}(r, \theta, E, L_z) \quad (29)$$

که پتانسیل مؤثر V_{eff} عبارت است از:

$$V_{eff} = \frac{E^2 g_{\phi\phi} + 2EL_z g_{t\phi} + L_z^2 g_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} - 1 \quad (30)$$

نوشته شود. شکل طیف ساده است، اما باید جرم، فاصله و زاویه دید را از مشاهدات مستقل داشته باشد [۷۰].

طیف گرمایی را می توان با چگالی اعداد شار فوتون اندازه گیری شده در بی نهایت به صورت زیر نوشت:

$$N_{E_{obs}} = \frac{1}{E_{obs}} \int I_{obs}(v) d\Omega_{obs} \quad (39)$$

که در آن I_{obs} شدت خاص تابش، E_{obs} انرژی فوتون و v بسامد فوتون اندازه گیری شده با مشاهده گر دور است. $d\Omega_{obs} = dXdY/D^2$ که در آن X و Y مختصات فوتون در آسمان مشاهده شده با مشاهده گر دور، و D فاصله چشمه است. برای شامل شدن تمام اثرات نسبی، لازم است مسیر فوتون از نقطه تابش در قرص به صفحه تصویر از مشاهده گر دور محاسبه شود.

$$N_{E_{obs}} = \frac{1}{E_{obs}} \int I_{obs}(v) d\Omega_{obs} = \frac{1}{E_{obs}} \int \omega^r I_e(v_e) d\Omega_{obs} \quad (40)$$

که I_e شدت خاص محلی تابش شده از قرص و ω ضریب سرخ گرایی به صورت زیرند:

$$I_e(v_e) = \frac{Y}{f_{col}^*} \frac{Y}{\exp\left(\frac{hv_e}{k_B T_{col}}\right) - 1}, \quad (41)$$

$$\omega = \frac{E_{obs}}{E_e} = \frac{v}{v_e} = \frac{k_\alpha u_{obs}^\alpha}{k_\beta u_e^\beta} \quad (42)$$

در رابطه (۴۱) از آنجایی که قرص در تعادل گرمایی است، تابش شبیه تابش جسم سیاه است. می توان دمای مؤثر T_{eff} را نوشت $\mathcal{F}(r) = \sigma T_{eff}^4$ که σ ثابت استفان-بولتزمن و $\mathcal{F}(r)$ شار انرژی میانگین گیری شده روی زمان از مدل ناویکو-ترون است. مدل ناویکو-ترون می تواند برای توصیف قرص به صورت هندسی باریک و اپتیکی پهن دور سیاه چاله استفاده شود. فرض بر این است که قرص در صفحه استوا است. گاز قرص به صورت نزدیک به ژئودزیک چرخش دایره ای حرکت می کند. $\mathcal{F}(r)$ را می توان بدین صورت نوشت:

$$\mathcal{F}(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-G}} \mathcal{F}(r), \quad \sqrt{-G} = \sqrt{\alpha^r g_{rr} g_{\phi\phi}} \quad (43)$$

که M نرخ بازبرافزایشی جرم و $\mathcal{F}(r)$ عبارت است از:

$$\mathcal{F}(r) = \frac{\partial_r \Omega}{(E - \Omega L_z)^2} \int_{r_{in}}^r (E - \Omega L_z) (\partial_\rho L_z) d\rho. \quad (44)$$

که

$$\Omega_r^r = -\frac{1}{2g_{rr} \dot{t}^r} \frac{\partial^r V_{eff}}{\partial r^r} \quad (38)$$

$$\Omega_\theta^\theta = -\frac{1}{2g_{\theta\theta} \dot{t}^r} \frac{\partial^r V_{eff}}{\partial \theta^r}$$

همچنین این دو معادله، بسامد پیراچرخه ای شعاعی و عمودی را به ما نتیجه می دهد: $v_r = \Omega_r / 2\pi$ و $v_\theta = \Omega_\theta / 2\pi$ به نظر می رسد مطالعات اخیر مدل تقدم نسبی را پشتیبانی می کنند. این مدل به سادگی بسامد مشاهداتی را با آن بسامدهای چرخشی از ذره آزمون مرتبط کرده و هیچ سازوکاری برای تولید نوسانات شبه دوره ای ارائه نمی دهد. ما می توانیم بسامد حرکت تقدیمی حوضی اختری v_p و بسامد حرکت تقدیمی گره v_n را با کمک سه بسامد بنیادی مطرح شده حساب کنیم: $v_n = v_\theta - v_r$ ، $v_p = v_\theta - v_r$ این دو بسامد می توانند به صورت مشاهداتی اندازه گیری شده و با بسامدهای محاسبه شده از متریک زمینه مورد مقایسه قرار گیرند. این فرصتی منحصر به فرد با دقت بالا برای بررسی رژیم گرانش قوی و آزمون احتمالی انحراف از حل کر نسبیت عام فراهم می کند [۶۹].

۶. روش برازش پیوستار

روش برازش پیوستار به مطالعه طیف گرمایی قرص بازبرافزایشی ای می پردازد که از نظر هندسی باریک و از نظر اپتیکی پهن است. این روش فقط برای سیاه چاله های ستاره وار کاربرد دارد؛ به این دلیل که طیف سیاه چاله های ابرپر جرم در باند اپتیکی یا فرابنفش هستند که این مورد جذب غبار اندازه گیری دقیق را محدود می کند. دمای قرص به جرم، نرخ بازبرافزایشی جرم، فاصله، زاویه دید و اسپین جسم فشرده بستگی دارد. طیف قرص باریک دور سیاه چاله های ستاره وار در باند پرتو ایکس نرم است. $a_* = J/M^2$ ، با این روش، در حال حاضر با فرض سیاه چاله کر به عنوان سیاه چاله اختریفیکی پارامتر اسپین سیاه چاله، اندازه گیری می شود. با در نظر گرفتن متریک غیر کر با این روش می توان انحراف از حل کر را اندازه گیری کرد که در آن طیف گرمایی می تواند به صورت چگالی عددی شار فوتون اندازه گیری شده از مشاهده گر دور

$$= \frac{0.1331}{f_{col}} \left(\frac{10^{18} \text{gs}^{-1}}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2}$$

در نتیجه به دست می‌آوریم

$$u'_e = - \frac{1}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}, \quad (47)$$

از شرایط نرمال‌سازی داریم: $g_{\mu\nu}u_e^{\mu}u_e^{\nu} = -1$ بنابراین

$$\omega = \frac{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}}{1 + \lambda\Omega} \quad (48)$$

که $\lambda = k_{\phi}/k_t$ ثابت حرکت در راستای مسیر فوتون است.

تمام اثرات نسبیتی در ضریب سرخ گرایی ω قرار دارد.

۷. نتیجه‌گیری

از آنجا که تنها مشاهده‌هندسه‌گر کافی نیست، لازم است برای ثابت کردن حل‌گر هر انحرافی از هندسه‌گر صفر شود. حل‌های غیرگر همان مشاهداتی را تولید می‌کنند که حل‌گر تولید کرده ولی با اسپین و پارامترهای مختلف. از این‌رو برای آزمون هندسه‌گر به متریک‌های عمومی‌تری نیاز است که حل‌گر در حد خاص را شامل می‌شود. همانطور که توضیح داده شد با روش‌های ذکرشده در این مقاله مروری می‌توانیم روی پارامترهای این متریک‌های غیرگر قید بگذاریم. ترکیب این روش‌ها ممکن است تبهگنی مشاهده شده را برطرف کند. همچنین مشاهدات آینده تلسکوپ‌های پرتو ایکس نیز ممکن است این تبهگنی را بشکنند.

قدردانی

از خانم دکتر کوثر اسدی برای ویرایش فارسی مقاله قدردانی می‌کنم.

Ω, L_e, E به ترتیب، انرژی خاص پایسته، مؤلفه Z -ام تکانه زاویه‌ای خاص پایسته و سرعت زاویه‌ای برای ژئودزیک دایره‌ای استوایی است. r_{in} همان ISCO فرض شده است. در حقیقت دمای قرص نزدیک لبه داخلی بالاست و اثرات غیر گرمایی قابل چشم‌پوشی هستند. به این دلیل می‌توان ضریب سخت‌شدگی (hardening factor) یا ضریب رنگ f_{col} و دمای رنگ $T_{col}(r) = f_{col}T_{eff}$ را معرفی کرد. در معادله (۴۱) بسامد فوتون، h ثابت پلانک، k_B ثابت بولتزمن و Y تابع زاویه بین بردار موج از فوتون منتشر شده از قرص و نرمال سطح قرص است. در اینجا $Y=1$ برای انتشار همسانگرد k

چهار-تکانه فوتون، فرض می‌شود. در معادله (۴۲) $E_e = hv_e$ بسامد فوتون اندازه‌گیری شده با مشاهده‌گر دور، k^{α} چهار-تکانه فوتون، $u_{obs}^{\alpha} = (-1, 0, 0, 0)$ چهار-سرعت مشاهده‌گر و $(u_e^t, 0, 0, \Omega u_e^t)$ چهار-سرعت تابش‌کننده است. از قضیه لیبویل داریم $I_e(v)/v_e^3 = I_{obs}(v_{obs})/v_{obs}^3$.

در نهایت چگالی تعداد شار فوتون را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$N_{E_{obs}} = A_1 \left(\frac{E_{obs}}{keV} \right)^{\gamma} \int \frac{1}{M^{\gamma}} \frac{Y dX dY}{\exp \left[\frac{A_2}{\omega F^{1/\gamma}} \left(\frac{E_{obs}}{keV} \right) \right] - 1} \quad (45)$$

که در آن A_1 و A_2 به شکل زیرند:

$$A_1 = \frac{\gamma (keV)^{\gamma} \left(\frac{G_N M}{c^{\gamma} h D} \right)^{\gamma}}{f_{col}^{\gamma}} \quad (46)$$

$$= \frac{0.07205}{f_{col}^{\gamma}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\gamma} \left(\frac{kpc}{D} \right)^{\gamma} \gamma keV^{-1} cm^{-\gamma} s^{-1},$$

$$A_2 = \frac{(keV)}{k_B f_{col}} \left(\frac{G_N M}{c^{\gamma}} \right)^{1/\gamma} \left(\frac{4\pi\sigma}{M} \right)^{1/2}$$

مراجع

1. A Einstein, *Annalen der Physik* **354** (1916) 769.
2. C M Will, *Living Rev. Rel.* **17** (2014) 4.
3. C M Will 1993 (*Cambridge University Press*) ISBN 0521439736.
4. I H Stairs 2003, *Living Reviews in Relativity* 6, Wex N 2014 *Frontiers in Relativistic Celestial Mechanics*, vol 1 ed Kopeikin S (De Gruyter) ISBN 9783110345667
5. R P Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) **237**.
6. J R Gair, M. Vallisneri, S L Larson, and J G Baker, *Living Rev. Rel.* **16** (2013) 7.
7. D Psaltis, *Living Rev. Rel.* **11**, 9 (2008) 1.
8. T Johannsen and D Psaltis, *Phys. Rev. D* **83** (2015) 124015.

9. V Cardoso, P Pani and, J Rico, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 064007.
10. S J Vigeland and S A Hughes, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 024030.
11. S J Vigeland, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 104041.
12. V S Manko and I D Novikov, *Classical and Quantum Gravity* **9** (1992) 2477.
13. L Rezzolla and A Zhidenko, *Phys. Rev. D* **90**, 8 (2014) 084009.
14. R Konoplya, L Rezzolla, and A Zhidenko, *Phys. Rev. D* **93**, 6 (2016) 064015.
15. N Lin, N Tsukamoto, M Ghasemi-Nodehi, and C Bambi, *Eur. Phys. J. C* **75**, 12 (2015) 599.
16. C Bambi, J Jiang, and J F Steiner, *Class. Quant. Grav.* **33**, 6 (2016) 064001.
17. K Yagi and L C Stein, *Class. Quant. Grav.* **33** (2016) 054001.
18. T Johannsen, *Class. Quant. Grav.* **33**, 12 (2016) 124001.
19. V Cardoso and L Gualtieri, *Class. Quant. Grav.* **33**, 17 (2016) 174001.
20. K Glampedakis and S Babak, *Class. Quant. Grav.* **23** (2006) 4167.
21. S Vigeland, N Yunes, and L Stein, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 104027.
22. M Ghasemi-Nodehi and C Bambi, *Eur. Phys. J. C* **76**, 5 (2016) 290.
23. T Harko, Z Kovacs, and F S N Lobo, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 044021.
24. T Harko, Z Kovacs, and F S N Lobo, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 215006.
25. T Harko, Z Kovacs, and F S N Lobo, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 165001.
26. C Bambi and E Barausse, *Astrophys. J.* **731**, 121 (2011) 72.
27. C Bambi, *JCAP* **1308** (2013) 055.
28. F H Vincent, *Class. Quant. Grav.* **31** (2013) 025010.
29. T Johannsen, *Phys. Rev. D* **90**, 6 (2014) 064002.
30. L Kong, Z Li and, C Bambi, *Astrophys. J.* **797**, 2 (2014) 78.
31. C Bambi, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 047503.
32. T Johannsen and D. Psaltis, *Astrophys. J.* **773** (2013) 57.
33. C Bambi, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 023007.
34. C Bambi and D. Malafarina, *Phys. Rev. D* **88** (2013) 064022.
35. C Bambi, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 084039.
36. J. Jiang, C. Bambi, and J. F. Steiner, *JCAP* **1505**, 05 (2015) 025.
37. J Jiang, C Bambi, and J F Steiner, *Astrophys. J.* **811**, 2 (2015) 130.
38. A E Broderick and A Loeb, *Astrophys. J.* **636** (2006) L109.
39. T Johannsen and D Psaltis, *Astrophys. J.* **718** (2010) 446.
40. L Amarilla, E F Eiroa, and G Giribet, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 124045.
41. L Amarilla and E F Eiroa, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 064019.
42. C Bambi, F Caravelli, and L Modesto, *Phys. Lett. B* **711** (2012) 10.
43. L Amarilla and E F Eiroa, *Phys. Rev. D* **87**, 4 (2013) 044057.
44. Z Li and C Bambi, *JCAP* **1401** (2014) 041.
45. A E Broderick, T Johannsen, A Loeb, and D Psaltis, *Astrophys. J.* **784** (2014) 7.
46. F Atamurotov, A Abdujabbarov, and B Ahmedov, *Astrophys. Space Sci.* **348** (2013) 179.
47. S W Wei and Y X Liu, *JCAP* **1311** (2013) 063.
48. F Atamurotov, A Abdujabbarov, and B Ahmedov, *Phys. Rev. D* **88**, 6 (2013) 064004.
49. T Johannsen, *Astrophys. J.* **777** (2013) 170.
50. N Tsukamoto, Z Li and C Bambi, *JCAP* **1406** (2014) 043.
51. C. Bambi, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015) 065005.
52. D Psaltis, F Ozel, C K Chan, and D P Marrone, *Astrophys. J.* **814**, 2 (2015) 115.
53. S W Wei, P Cheng, Y Zhong and, X N Zhou, *JCAP* **1508**, 08 (2015) 004.
54. J W Moffat, *Eur. Phys. J. C* **75**, 3 (2015) 130.
55. T Johannsen and D Psaltis, *Astrophys. J.* **726** (2011) 11.
56. C Bambi, *JCAP* **1209** (2012) 014.

57. C Bambi, *Eur. Phys. J. C* **75**, 4 (2015) 162.
58. A Maselli, L Gualtieri, P Pani, L Stella, and V Ferrari, *Astrophys. J.* **801**, 2 (2015) 115.
59. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J.* **875** (2019) L1.
60. K Akiyama *et al.* [Event Horizon Telescope], *Astrophys. J. Lett.* **930**, 2 (2022) L12.
61. M Ghasemi-Nodehi, Z Li and, C Bambi, *Eur. Phys. J. C* **75** (2015) 315.
62. M Ghasemi-Nodehi, M Azreg-Aïnou, K Jusufi, and M Jamil, *Phys. Rev. D* **102**, 10 (2020) 104032.
63. M Ghasemi-Nodehi, C Chakraborty, Q Yu and, Y Lu, *Eur. Phys. J. C* **81**, 10 (2021) 939.
64. M Ghasemi-Nodehi (2017), *PhD thesis, Fudan University*, Shanghai, China.
65. I D Novikov and K S Thorne, “*Astrophysics of Black Holes*, in *Black Holes*”, edited by C De Witt and B De Witt, Gordon and Breach, New York, US (1973).
66. M Ghasemi-Nodehi and C Bambi, *Phys. Rev. D* **94**, 10 (2016) 104062.
67. M Ghasemi-Nodehi, *Phys. Rev. D* **97**, 2 (2018) 024043.
68. M Ghasemi-Nodehi, *Eur. Phys. J. C* **80**, 6 (2020) 529.
69. M Ghasemi-Nodehi, Y. Lu, J. Chen, and C. Yang, *Eur. Phys. J. C* **80**, 6 (2020) 504.
70. M Ghasemi-Nodehi, *Eur. Phys. J. C* **80**, 5 (2020) 405.