مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۳، شمارهٔ ۴، زمستان ۱۴۰۲
DOI: 10.47176/ijpr.23.4.11779

واهمتننده‌های موضعی برای هم‌ارزی کدهای کوانتومی توپولوژیکی دوبعدی

محسن رحمانی حقیقی و محمد حسین زارعی*

بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: mzarei92@shirazu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳/ ۰۸/ ۱۴۰۲ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۶/۱۱/ ۱۴۰۲)

چکیده

یکی از مهم‌ترین رهیافت‌ها در دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی توپولوژیکی، یافتن کلاس‌های هم‌ارزی تحت تبدیلات یکانی موضعی است. این مسئله به خصوص برای کدهای کوانتومی توپولوژیکی با توجه به اهمیتشان در رایانش کوانتومی، مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. به ویژه، نشان داده شده است که نوعی از تبدیلات یکانی موضعی وجود دارد که تحت اثر آنها، هر کد رنگ D بعدی می‌تواند به تعدادی نسخه از کدهای چنبرهٔ D بعدی نگاشته شود. در این مقاله، ما به بررسی چنین تبدیلاتی برای کدهای توپولوژیکی دوبعدی می‌پردازیم و تبدیلات یکانی واهمتنندهٔ گرین برگر – هورن – زایلینگر (GHZ) را بدین منظور معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای یک کد رنگ تعریف شده بر شبکهٔ سه رنگ پذیر لانه زنبوری، با اعمال چنین تبدیلی به شکل موضعی روی کیوبیت‌های متناظر با یکی از رنگ‌ها، دو رنگ دیگر واهمتنیده شده و دو کد چنبره تولید می‌شود. علاوه‌براین، ما تبدیلات بالا را برای کدهای رنگ، روی دیگر شبکه‌های سه رنگ پذیر تعمیم می‌دهیم، به طوری که با اعمال تبدیلات GHZ **مذکور** متناظر با یکی از رنگ‌ها، کد رنگ به دو نسخه از کد چنبره بر روی شبکه‌های دوگان متناظر با دو رنگ دیگر تبدیل می‌شود. این نتیجه امکان مقایسه بین کدهای رنگ دوبعدی مختلف را بر اساس تفاوت بین دوگان‌های آنها فراهم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: تبدیلات موضعی، کلاس‌های هم‌ارزی توپولوژیکی، کد کوانتومی رنگ، کد کوانتومی چنبره، فاز توپولوژیکی

۱. مقدمه

یکی از موضوعات مهم در فیزیک مادهٔ چگال، شناخت روش‌های دسته‌بندی فازهای کوانتومی توپولوژیکی [۱، ۲ و ۳] و شناسایی سامانه‌هایی است که در یک کلاس توپولوژیکی قرار می‌گیرند. در این راستا، مطالعهٔ هم‌ارزی یکانی موضعی سامانه‌های کوانتومی توپولوژیکی یک روش مهم و کارامد برای دسته‌بندی حالت‌های کوانتومی است [۴–۷]. با توجه به این که فازهای توپولوژیکی نظم غیرموضعی به همراه یک الگوی درهمتنیدگی بلند برد دارند [۸] لذا به وسیلهٔ اعمال موضعی نمی‌توان دو سامانهٔ توپولوژیکی که در دو فاز مختلف هستند و الگوی درهمتنیدگی بلند برد متفاوتی دارند [۱و ۹] را به یکدیگر تبدیل کرد. با این وجود، فازهایی که در یک کلاس توپولوژیکی قرار دارند به وسیلهٔ عمل‌های یکانی موضعی به هم مربوط می‌شوند.

در سال‌های اخیر از میان سامانه‌های کوانتومی توپولوژیکی مختلف، کدهای کوانتومی توپولوژیکی به خاطر کاربردشان در رایانش کوانتومی، توجهات زیادی را به خود جلب کرده است [۱۰–۱۴]. در میان این کدها، کد چنبره[1] و کد رنگ[2] به دلیل استحکام و ویژگی‌های مقاومشان در برابر خطا، بیشتر مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. کد چنبره [۱۵] با نظم توپولوژیکی Z_2 [۱۶] به عنوان اولین مثال از مدل‌های کوانتومی تصحیح خطا

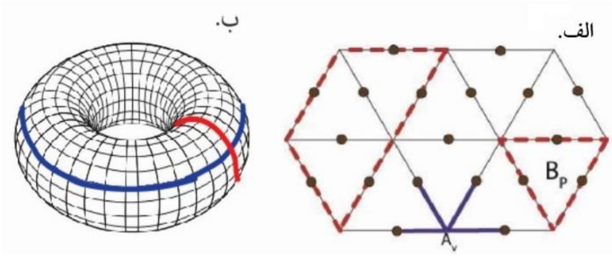
[1] Toric code
[2] Color code

توسط کیتائف معرفی شد. این کد، حافظۀ محافظت شده‌ای است که اطلاعات در حالت‌های تبهگن آن (که به صورت موضعی قابل شناسایی نیست) ذخیره می‌شود و از نظر توپولوژیکی در مقابل اختلال‌های موضعی مستحکم است [۱۷–۲۹]. چنین استحکامی نتیجۀ این واقعیت است که تبهگنی حالت پایه تنها به شرایط مرزی وابسته بوده و به تقارن بستگی ندارد. کد توپولوژیکی رنگ [۱۲، ۱۳ و۳۰] کلاس دیگری از کدهای تصحیح خطای کوانتومی است. در مقایسه با کد چنبره، اضافه شدن عنصر رنگ منجر به بروز قابلیت‌های بیشتری برای کد رنگ شده است [۱۲و۱۳]. به عنوان مثال این ویژگی، باعث افزایش تبهگنی حالت پایۀ کد رنگ در مقایسه با کد چنبره در شرایط مرزی یکسان می‌شود. از دیگر قابلیت‌های کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌توان به توان محاسباتی بالاتر اشاره کرد به طوری‌که مجموعه‌ای از دروازه‌های جهانشمول کلیفورد[۱] را می‌توان بر روی آن اعمال کرد[۱۲و۳۱]. البته این قابلیت در ابعاد بالاتر افزایش یافته به طوری که کدهای رنگ با ابعاد بیشتر از دو بعد قابلیت تحقق دروازه‌های غیر کلیفورد را که جزو ضروری محاسبات کوانتومی متحمل خطاست، نیز دارند [۳۲و۳۳].

در حالی که هر یک از کدهای مذکور، ویژگی‌ها و کاربردهای متمایزی دارند اما وجود یک ارتباط جالب بین آنها در قالب هم‌ارزی یکانی موضعی بین کد رنگ و تعداد محدودی از کدهای چنبره موضوع پژوهش‌های اخیر بوده است [۳۴–۴۲]. به خصوص نشان داده می‌شود که کد رنگ تعریف شده روی شبکۀ دو بعدی از نظر توپولوژیکی معادل با دو نسخه از کدهای چنبرۀ دوبعدی بوده و در نتیجه متعلق به فاز توپولوژیکی $Z_2\times Z_2$ است [۳۴، ۳۸، ۴۰ و۴۲]. علی‌رغم چنین هم‌ارزی، وجود تفاوت‌هایی مهم بین قابلیت‌های کد رنگ و کد چنبره، اهمیت بررسی دقیق‌تر و صریح‌تر تبدیلات موضعی بین این دو کد را بیشتر می‌کند. به خصوص، مطالعاتی که تاکنون در مورد هم‌ارزی‌های یکانی موضعی بین کدهای مذکور صورت گرفته غالباً بر مبنای روش‌های جبری بوده و تبدیلات یکانی به صراحت معرفی نشده‌اند. این که این تبدیلات چه هستند و به خصوص چه میزان در درهمتنیدگی حالت‌های توپولوژیکی تأثیر می‌گذارند به درک ما از تفاوت‌های بین کدهای توپولوژیکی کمک می‌کند.

در این مقاله، ما تبدیلات واهمتنندۀ[۲] GHZ[۳] را معرفی می‌کنیم که به وسیلۀ یک تبدیل پایه از پایۀ محاسباتی به پایه‌ای ساخته شده از حالت‌های GHZ توصیف می‌شود. برای یک کد رنگ روی شبکۀ سه رنگ‌پذیر[۴] لانه زنبوری، این واهمتننده‌ها را به شکل موضعی بر روی کیوبیت‌های متناظر با یکی از رنگ‌ها اعمال می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چنین تبدیلی عملاً دو رنگ دیگر را از یکدیگر واهمتنیده کرده و دو کد چنبره تولید می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که این عملیات برای کد رنگ روی دیگر شبکه‌های سه رنگ پذیر نیز به همین شکل قابل اعمال است. به خصوص برای یک شبکۀ سه رنگ پذیر، متناظر با هر رنگ، یک شبکۀ دوگان تعریف می‌کنیم که کد چنبره بر روی هر یک از آنها تعریف می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که تبدیلات GHZ بر روی یکی از رنگ‌ها، دو کد چنبره را روی شبکه‌های دوگان متناظر با دو رنگ دیگر تولید می‌کند. به این ترتیب تفاوت در قابلیت‌هایی که کدهای رنگ متناظر با شبکه‌های سه رنگ پذیر مختلف دارند [۱۲، ۴۳ و ۴۴]، در تفاوت بین دوگان‌های مختلف این شبکه‌ها نمود پیدا می‌کند. ساختار مقاله به این صورت خواهد بود که در بخش دوم مقاله کد چنبره و کد رنگ را به عنوان دو کد کوانتومی توپولوژیکی معرفی کرده و برخی از تفاوت‌هایشان را مرور خواهیم کرد. در بخش سوم و چهارم مقاله با معرفی واهمتننده‌های GHZ نشان خواهیم داد که پایدارسازهای کد رنگ تعریف شده بر روی یک شبکۀ لانه زنبوری به ضرب تانسوری از پایدارسازهای دو کد چنبره تعریف شده بر روی دو شبکۀ مثلثی تبدیل خواهد شد. در بخش پنجم نیز با معرفی تبدیل GHZ به عنوان یک نگاشت دوگان بین کد رنگ دو بعدی و کد چنبرۀ دو بعدی نشان خواهیم داد که این روش قابل تعمیم به حالت‌های کد رنگ روی هر شبکۀ دو بعدی سه رنگ پذیر دلخواه است.

۱. Clifford universal gates
۲. Disentangler
۳. Greenberger–Horne–Zeilinger
۴. Three-colorable



شکل ۱. (الف) کد چنبره بر روی یک شبکهٔ مثلثی. A_v عملگر رأس و عملگر B_p نشان دهندهٔ یک حلقهٔ مثلثی است که با خط چین قرمز نشان داده شده است. حاصل‌ضربی از B_pها به یک ساختار حلقه‌ای منجر می‌شود که با خط چین ذوزنقه‌ای قرمز نشان داده شده است. (ب) کد چنبره با شرایط مرزی دوره‌ای. دایره‌های قرمز و آبی نمایندهٔ عملگرهای توپولوژیکی غیربدیهی است که به صورت ضرب عملگرهای نوع X نوشته می‌شود.

۲. کد چنبره و کد رنگ

کد کوانتومی توپولوژیکی چنبره با نظم توپولوژیکی Z_2 یکی از مهم‌ترین کدهای تصحیح خطای کوانتومی است که بر روی هر شبکهٔ دلخواه، قابل تعریف است. برای مثال یک شبکهٔ مثلثی را در نظر بگیرید که کیوبیت‌ها روی یال‌های آن قرار گرفته‌اند (شکل ۱. الف). هامیلتونی آن بر حسب عملگرهای رأس A_v و عملگرهای وجه B_p به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{TC} = -J\sum_v A_v - J\sum_p B_p, \quad (۱)$$

که J انرژی همبستگی و A_v و B_pبه ترتیب عملگرهای رأس و وجه هستند.

$$B_p = \prod_{i\epsilon\partial p} X_i \quad , A_v = \prod_{i\epsilon v} Z_i, \quad (۲)$$

که X و Z عملگرهای پاولی هستند و $i\ \epsilon V$ به کیوبیت‌هایی اشاره دارد که بر روی یال‌هایی زندگی می‌کنند که به رأس V وارد می‌شوند .همچنین $i\ \epsilon\partial P$ به کیوبیت‌هایی اشاره دارد که بر روی یال‌هایی که وجه P را احاطه کرده، قرار دارند (شکل ۱. الف). عملگرهای دلخواه A_v و B_p یا هیچ کیوبیت مشترکی ندارند یا در دو کیوبیت اشتراک خواهند داشت. به همین دلیل عملگرهای رأس و وجه با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. بنابراین حالت پایهٔ کد چنبره صرف‌نظر از ضریب بهنجارش را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$|GS\rangle = \prod_{\mathrm{v}}(1 + \mathrm{B_p})|0\rangle^{\otimes n}, \quad (۳)$$

که در اینجا n تعداد کیوبیت‌ها است. با توجه به این که هر عملگر وجه متناظر با یک حلقهٔ مثلثی است، هر حاصل‌ضربی از عملگرهای وجه می‌تواند به صورت یک پیکربندی از حلقه‌هایی با ساختارهای مثلثی نمایش داده شود (شکل ۱. الف). در این رابطه ما می‌توانیم حالت پایهٔ یک کد چنبره را در قالب یک برهم‌نهی از همهٔ ساختارهای حلقه مثلثی به صورت زیر نمایش دهیم:

$$|GS\rangle = \sum_\Delta |\Delta\rangle, \quad (۴)$$

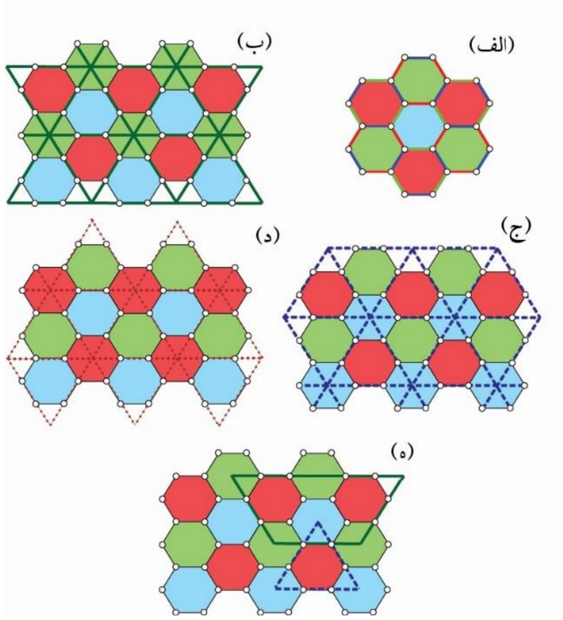
که $|\Delta\rangle$ اشاره به همهٔ ساختارهای حلقهٔ مثلثی دارد که می‌تواند در شبکهٔ مثلثی پدیدار شود. به عبارتی دیگر حالت پایهٔ کد چنبرهٔ مثلثی یک برهم نهی از همهٔ ساختارهای حلقهٔ مثلثی اسپین‌های پایین $|1>$ در دریایی از اسپین‌های بالا $|0>$ است.

کد چنبره با شرط مرزی دوره‌ای نظم توپولوژیکی مستحکمی دارد که ناشی از تبهگنی حالت پایه است. استحکام خواص توپولوژیکی کد چنبره در مقابل اختلالات موضعی، آن را به عنوان یک حافظهٔ کوانتومی ارزشمند، معرفی می‌کند. تبهگنی حالت پایه، بستگی به عدد جنس[۱] منیفلدی[۲] دارد که شبکه بر روی آن تعریف شده است. مثلا کد چنبرهٔ تعریف شده بر روی رویه‌ای با توپولوژی چنبره، تبهگنی چهارگانه خواهد داشت که یکی از حالت‌های تبهگن آن در رابطهٔ (۳) آورده شده است. با اثر عملگرهای توپولوژیکی غیربدیهی که به صورت ضرب عملگرهای نوع X در امتداد حلقه‌های غیرجمع‌پذیر روی یک چنبره تعریف می‌شود، سه حالت تبهگن دیگر بازتولید خواهد شد (شکل ۱. ب).

یکی دیگر از کدهای کوانتومی توپولوژیکی مهم، کد رنگ است. برخلاف کد چنبره که کیوبیت‌ها بر روی یال‌های شبکه تعریف می‌شدند در اینجا، کیوبیت‌ها بر روی رأس‌های شبکه قرار می‌گیرند. به طور کلی کد رنگ در d بعد بر روی هر شبکهٔ d+1 رنگ پذیر، قابل تعریف است. شبکهٔ لانه زنبوری در دو بعد می‌تواند یک مثال از چنین شبکه‌ای باشد که وجوه آن سه رنگ آبی، قرمز و سبز دارد، به طوری‌که هیچ دو وجه مجاوری رنگ یکسان ندارند و وجوهی با یک رنگ خاص توسط یال‌هایی با همان رنگ به یکدیگر متصل می‌شوند (شکل۲. ب).

---

۱. Genus
۲. Manifold



شکل ۲. (الف) کد رنگ روی یک شبکهٔ شش ضلعی دو بعدی. در اینجا کیوبیت‌ها روی رأس‌های وجوه قرار گرفته‌اند و یال‌هایی با یک رنگ مشخص وجوه با همان رنگ را به یکدیگر وصل می‌کنند. به عنوان مثال یال‌های سبز رنگ وجوه سبز را به یکدیگر وصل می‌کند. (ب) عملگرهای وجوه آبی و قرمز توسط شبکهٔ مثلثی سبز رنگ توصیف می‌شود. (ج) عملگرهای وجوه قرمز و سبز توسط شبکهٔ مثلثی آبی رنگ توصیف می‌شود. (د) عملگرهای وجوه آبی و سبز توسط شبکهٔ مثلثی قرمز رنگ توصیف می‌شود. (ه) ضرب عملگرهای وجوه در کد رنگ منجر به ساختار حلقه‌ای می‌شود که از دو رنگ مختلف ساخته شده است.

هامیلتونی کد رنگ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_{CC} = -J\sum_p B_p^x - J\sum_p B_p^z, \qquad (۵)$$

که در آن P به وجه اشاره دارد و B_p^x و B_p^z به ترتیب عملگرهای جابه‌جاشوندهٔ وجه نوع X و نوع Z است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_p^z = \prod_{i\epsilon p} Z_i \quad , B_p^x = \prod_{i\epsilon p} X_i, \qquad (۶)$$

که iєP به کیوبیت‌های متعلق به وجه P اشاره می‌کند(شکل۲. الف).

همانند کد چنبره، حالت پایهٔ کد رنگ را می‌توان بر حسب عملگرهای نوع X به صورت زیر نوشت:

$$|GS\rangle_{CC} = \prod_v \left(1 + B_p^x\right)|0\rangle^{\otimes n}, \qquad (۷)$$

که n تعداد رأس‌ها در شبکهٔ لانه زنبوری است.

مطابق شکل ۲. ب یک شبکهٔ مثلثی با رنگی دلخواه (مثلا سبز) را می‌توان بر روی شبکهٔ لانه زنبوری اولیه رسم کرد، به طوری که یال‌های شبکهٔ مثلثی بر یال‌های سبز رنگ شبکهٔ اولیه منطبق باشد. با توجه به این که هر مثلث از شبکهٔ مثلثی متناظر با یک وجه از شبکهٔ لانه زنبوری است، لذا عملگر B_p^x را می‌توان بر حسب یک حلقهٔ مثلثی نمایش داد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که یک نمایش حلقه برای کد رنگ همانند کد چنبره وجود دارد؛ با این تفاوت که در کد رنگ به خاطر وجود عنصر رنگ (سه رنگ در دو بعد)، نیاز به حلقهٔ دیگری با رنگی متفاوت برای نمایش تمام پایدارسازهای نوع X است.

به عنوان مثال همان طور که در شکل ۲. ب می‌بینید، حلقهٔ سبز رنگ تنها وجوهی با دو رنگ را پوشش می‌دهد، و برای نمایش پایدارسازهای متناظر با وجوهی با رنگ سبز نیاز به حلقهٔ دیگری با یکی از دو رنگ قرمز یا آبی خواهد بود. بنابراین حالت پایهٔ کد رنگ را می‌توان به وسیلهٔ برهم‌نهی از حلقههایی با دو رنگ متفاوت نمایش داد (شکل۲. ه).

اضافه شدن رنگ در این مدل منجر به بروز ویژگی‌هایی متفاوت از کد چنبره می‌شود. در مورد کد چنبره با شرط مرزی دوره‌ای به علت وجود دو نوع حلقهٔ غیربدیهی غیرجمع‌پذیر در دو راستای مختلف تبهگنی چهارگانه داشتیم. در مورد کد رنگ، ما چهار حلقه با دو رنگ مختلف بر روی مسیرهای غیرجمع‌پذیر خواهیم داشت که باعث افزایش تبهگنی حالت پایه به یک تبهگنی ۱۶گانه در کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌شود. بنابراین اضافه شدن عنصر رنگ در شرایط مرزی یکسان منجر به افزایش تبهگنی کد رنگ نسبت به کد چنبره می‌شود. علاوه‌براین، عنصر رنگ در کد رنگ باعث بالا رفتن توان محاسباتی کد رنگ نسبت به کد چنبره شده است[۱۲].

علی‌رغم تفاوت‌هایی که بین کد چنبره و کد رنگ وجود دارد، شباهت بین ساختار حلقه‌ها نشان دهندهٔ وجود یک رابطه بین این دو کد است. به خصوص دیدیم که در عمل حلقه‌های تشکیل دهندهٔ کد رنگ، مشابه کد چنبره بودند با این تفاوت که دو نوع حلقه با دو رنگ مختلف مورد نیاز بود. بر همین مبنا نشان داده می‌شود که یک تبدیل یکانی موضعی وجود دارد که حالت پایهٔ کد رنگ را به دو نسخه از حالت پایهٔ کد چنبره تبدیل می‌کند. در واقع، از آنجا که حالت‌های توپولوژیکی با درهمتنیدگی بلند برد شناخته می‌شوند، اعمال یکانی قادر به

تغییر درهمتنیدگی بلند برد نیستند و نظم توپولوژیکی را تغییر نمی‌دهند. در نتیجه حالت‌های کوانتومی که تحت اعمال یکانی موضعی هم‌ارز هستند، در یک کلاس توپولوژیکی قرار می‌گیرند. در رابطهٔ زیر منظور از یک تبدیل یکانی موضعی بین دو حالت توپولوژیکی را روشن کرده‌ایم.

$$|\Psi\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_N|\Phi\rangle, \qquad (۸)$$

که $|\Psi\rangle$ و $|\Phi\rangle$ متعلق به یک فاز توپولوژیکی هستند و $\mathrm{U_i}$ به عمل‌های یکانی موضعی اشاره دارد. در حالی که وجود تبدیلات یکانی موضعی بین کد رنگ و دو نسخه از کد چنبره به منظور نشان دادن یکسان بودن کلاس توپولوژیکی آنها کافی است، اما این که این تبدیلات صراحتاً چه هستند و به چه میزان درهمتنیدگی‌های کوتاه برد را تغییر می‌دهند، کمتر مورد توجه بوده است. این مسئله می‌تواند برای درک تفاوت در قابلیت‌های محاسباتی این دو کد حائز اهمیت باشد. در بخش‌های بعدی این مقاله به معرفی چنین تبدیلاتی که آنها را واهمتننده‌های موضعی می‌نامیم، خواهیم پرداخت.

۳. واهمتننده‌های موضعی GHZ

به منظور معرفی واهمتننده‌های موضعی، وجه آبی رنگ شش کیوبیتی از یک شبکهٔ لانه زنبوری را در نظر بگیرید که کیوبیت‌های آن مطابق الگوی نشان داده شده در شکل۳ از شمارهٔ یک تا شمارهٔ شش نامگذاری شده است. یک پایهٔ GHZ برای این شش کیوبیت معرفی می‌کنیم.

حالت GHZ شش کیوبیتی به صورت $|\mathrm{GHZ}\rangle_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000000\rangle + |111111\rangle)$ توسط یک گروه پایدارساز با مولدهای زیر پایدار می‌شود:

$$g^{(6)} = \{\mathrm{Z_1Z_2, Z_2Z_3, Z_3Z_4, Z_4Z_5, Z_5Z_6, Z_6Z_1} \textstyle\prod_{\mathrm{i}=1}^{6}\mathrm{X_i}\}. \qquad (۹)$$

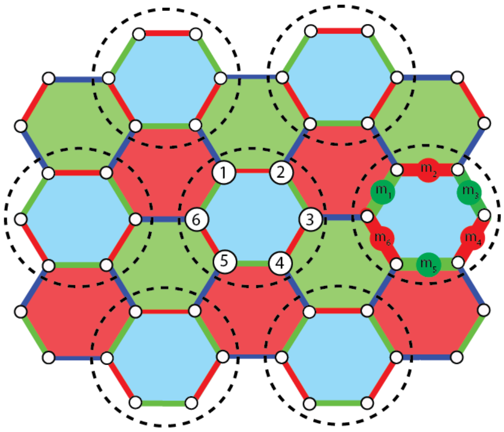
مولدهای بالا را به ترتیب g_1، g_2، g_3، g_4، g_5 و g_6 می‌نامیم. به دلیل این که هر مولد g_i متناظر با یکی از یال‌های وجه آبی رنگ است ما آنها را عملگر یال g_i نامگذاری می‌کنیم. با استفاده از این مولدها قادر خواهیم بود حالت‌های دیگر GHZ را برای ایجاد یک پایهٔ کامل شش کیوبیتی بنویسیم. برای مثال حالت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000000\rangle - |111111\rangle)$ ، یکی دیگر از حالت‌های GHZ است با این تفاوت که اثر g_6 بر روی آن، ویژه مقدار 1- را خواهد داد. به عبارت دیگر، پایه‌های GHZ ویژه حالات مولدهای g_1، g_2 ، g_3 ، g_4 ، g_5 و g_6 ، با ویژه مقادیر مختلف هستند. به این ترتیب ما می‌توانیم همهٔ ۲۶ پایهٔ GHZ را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\overline{m}_1, \overline{m}_2, \overline{m}_3, \overline{m}_4, \overline{m}_5, \overline{m}_6\rangle = \frac{1}{8}\textstyle\prod_{\mathrm{i}=1}^{6}(1 + (-1)^{\mathrm{m_i}} g_{\mathrm{i}})|++++++\rangle, \qquad (۱۰)$$

که $m_i = 0,1$ها معرف این پایه‌ها هستند. از آنجا که هر عملگر g_{i} به یک یال از شبکه منسوب می‌شود، مناسب است که متغیرهای $\overline{\mathrm{m}}_1$، $\overline{\mathrm{m}}_2$، $\overline{\mathrm{m}}_3$، $\overline{\mathrm{m}}_4$، $\overline{\mathrm{m}}_5$ و $\overline{\mathrm{m}}_6$ به صورت نمادین با کیوبیت‌هایی که روی یال‌های شبکه زندگی می‌کنند نشان داده شوند. به این ترتیب از این به بعد کیوبیت‌های فیزیکی کد رنگ را کیوبیت‌های رأس و کیوبیت‌های متناظر با پایهٔ جدید را کیوبیت‌های یال می‌نامیم و به صورت دایره‌هایی متناظر با رنگ یالی که کیوبیت بر روی آن قرار دارد، رنگ‌آمیزی می‌کنیم. .به خصوص از آنجا که هر وجه آبی با یال‌های سبز رنگ و قرمز رنگ احاطه می‌شود، کیوبیت‌های یال نیز به همین دو رنگ خواهند بود. به عنوان مثال در شکل ۳ کیوبیت‌های قرار گرفته بر روی یال‌های وجه آبی رنگ به دو دسته دایره‌های سبز و قرمز متناظر با رنگ یال‌ها تقسیم شده‌اند. به عبارت دیگر کیوبیت‌های $\overline{\mathrm{m}}_1$، $\overline{\mathrm{m}}_3$ و $\overline{\mathrm{m}}_5$ ($\overline{\mathrm{m}}_2$، $\overline{\mathrm{m}}_4$، $\overline{\mathrm{m}}_6$) را با توجه به رنگ یالی که بر روی آن قرار داده شده‌اند با دایره‌های سبز (قرمز) نشان داده‌ایم. با توجه به این که گروه پایدارساز $g^{(6)}$ یک زیرگروه از گروه پاولی است، بنابراین حتماً تبدیل یکانی کلیفوردی وجود خواهد داشت که پایه‌های محاسباتی را به پایه‌های GHZ تعریف شده در بالا، تغییر دهد.

۴. هم‌ارزی یکانی بین کد رنگ و کد چنبره

اکنون می‌خواهیم چنین تبدیل یکانی را بر حالت کد رنگ اعمال کنیم. به این منظور بایستی پایدارسازهای کد رنگ را در پایه‌های جدید (۱۰) بازنویسی کنیم و به این ترتیب پایدارسازهای جدیدی خواهیم یافت که مشخص کنندهٔ حالت کوانتومی نهایی خواهند بود. توجه به این نکته نیز حائز اهمیت است که چون تبدیل بالا بر روی وجوه آبی رنگی که هیچ کیوبیت مشترکی با هم ندارند، اعمال شده است، نتیجه می‌شود که این تبدیل یک تبدیل موضعی است (شکل۳).



شکل۳. نمایش کیوبیت‌های یال که بر روی یال‌های وجوه آبی تعریف شده‌اند. دایره‌های خط چین مشکی نشانگر موضعی بودن تبدیل GHZ است.

از آنجا که پایه‌های جدید را به وسیلهٔ کیوبیت‌های جدید یال نمایش داده‌ایم، به منظور بررسی تبدیل پایدارسازها، باید بررسی کنیم که اثر عملگرهای پائولی روی کیوبیت‌های رأس، در پایه جدید، متناظر با اثر چه عملگری بر کیوبیت‌های یال است. به عنوان مثال برای بررسی یک عملگر پائولی X_i بر کیوبیت رأس i ام، به این نکته توجه می‌کنیم که چون $g_i = Z_iZ_{i+1}$ پس $X_i g_i = -g_iX_i$ و در نتیجه اثر X_i بر عبارت $(1+(-1)^{m_i}g_i)$ در پایهٔ GHZ (۱۰) به صورت زیر خواهد بود:

$$X_i(1+(-1)^{m_i}g_i) = (1+(-1)^{m_i+1}g_i)X_i. \qquad (۱۱)$$

از آنجا که $X|+\rangle = |+\rangle$ ، نتیجه می شودکه اثر X_i معادل با یک عملگر بالا برنده یا یک عملگر پائولی $\bar{X}$ بر کیوبیت یال $|\bar{m}_i\rangle$ است. مثال سادهٔ دیگر اثر عملگر $g_i = Z_iZ_{i+1}$ بر بر پایهٔ (۱۰) است. از آنجا که

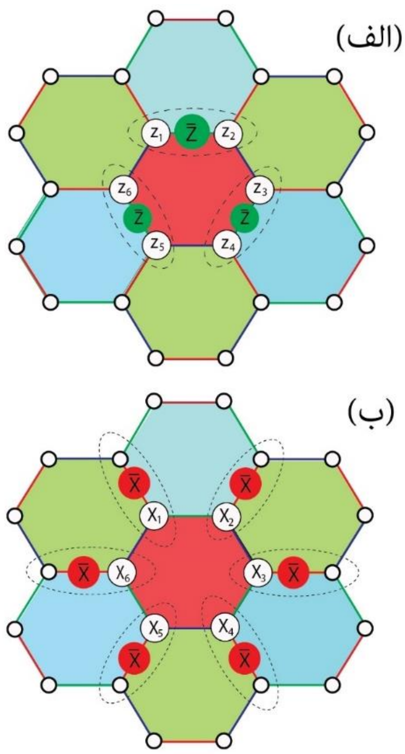
$$g_i(1+(-1)^{m_i}g_i) = (-1)^{m_i}(1+(-1)^{m_i}g_i), \qquad (۱۲)$$

به سادگی نتیجه می‌شود که اثر g_i بر پایهٔ GHZ معادل با یک عملگر فاز یا عملگر پائولی $\bar{Z}$ بر کیوبیت یال $|\bar{m}_i\rangle$ است. خوشبختانه همین دو مثال سادهٔ بالا به ما کمک خواهد کرد تا همهٔ پایدارسازهای کد رنگ را بر حسب عملگرهای پائولی جدیدی بر کیوبیت‌های یال بنویسیم. همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده است ابتدا پایدارسازهای نوع Z و نوع X متناظر با یک وجه شش ضلعی قرمز متعلق به کد رنگ را در نظر می‌گیریم. پایدارسازهای نوع Z (B_p^z) قرمز را به صورت ضرب Z_iZ_j ها متناظر با یال‌های سبز می‌نویسیم که برای وجه نشان داده شده در شکل ۴ به صورت $(Z_1Z_2)(Z_3Z_4)(Z_5Z_6)$ خواهد بود که عملاً معادل با $g_1g_3g_5$ است. از طرف دیگر مطابق با رابطهٔ (۱۲) هر g_i متناظر با عملگر پاولی $\bar{Z}_i$ روی کیوبیت یال متناظر است. بنابراین همان طور که در شکل۴. الف نشان داده‌ایم، پایدارساز نوع Z (B_p^z) مربوط به وجه قرمز، معادل با ضرب تانسوری سه عملگر $\bar{Z}$ روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ است که ما آن را با $B_p^z(1)$ نمایش می‌دهیم.

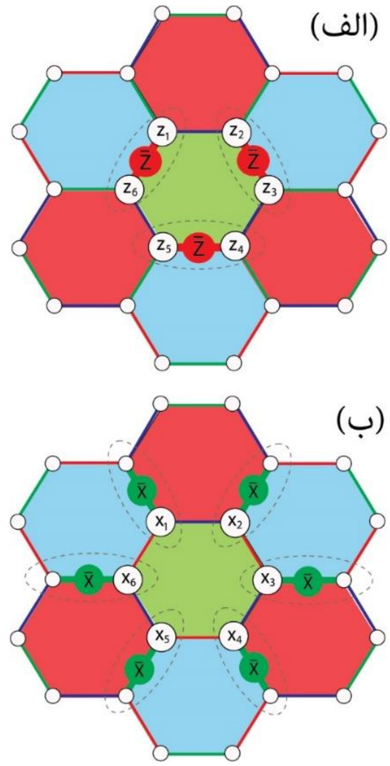
حال به پایدارسازهای نوع X (B_p^x) کد رنگ مربوط به وجه قرمز می‌پردازیم که برابر با ضرب تانسوری عمگرهای پائولی X روی شش کیوبیت رأس است. ابتدا اثر این عملگرها را بر کیوبیت‌های یال سبز بررسی می‌کنیم. واضح است که وجه قرمز رنگ با همهٔ یال‌های سبز رنگ احاطه کنندهٔ آن، دو کیوبیت رأس مشترک دارد و در نتیجه عملگر B_p^x با همهٔ Z_iZ_j های متناظر با یال‌های سبز رنگ جابه‌جا می‌شود (شکل۴. ب) و اثر آن متناظر با عملگر واحد است. اما اثر B_p^x بر کیوبیت‌های یال قرمز رنگ نیز بایستی بررسی شود. همانطور که در شکل ۴ دیده می‌شود، وجه قرمز با شش یال قرمزی که به آن وجه وارد می‌شوند، تنها یک کیوبیت مشترک دارد و در نتیجه B_p^x با Z_iZ_j های متناظر با یال‌های قرمز پادجابه‌جا می‌شود. به این ترتیب و از آنجا که هر عملگر X_i در B_p^x اثری مشابه رابطهٔ (۱۱) را در پایهٔ جدید خواهد داشت نتیجه می‌شود:

$$B_p^x(1+(-1)^{m_i}Z_iZ_j) = (1+(-1)^{m_i+1}Z_iZ_j)B_p^x. \qquad (۱۳)$$

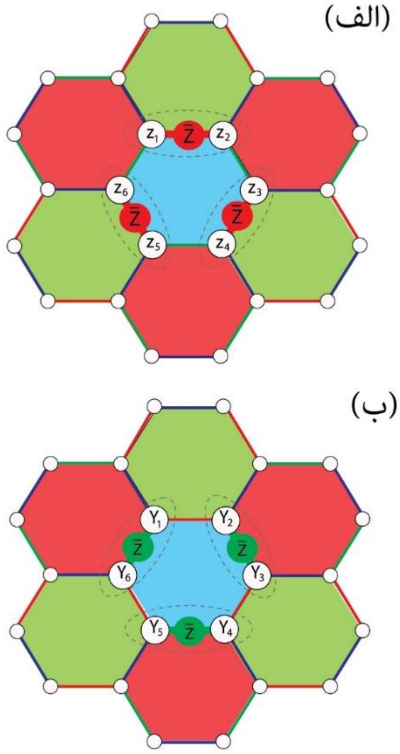
بنابراین عملگر B_p^x عملا نقش عملگر $\bar{X}$ را روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ ورودی به وجه قرمز بازی می‌کند. در نهایت B_p^x معادل با یک ضرب تانسوری شش تایی از عملگرهای $\bar{X}$ روی کیوبیت‌های یال قرمز است که ما آن را با $B_p^x(1)$ نشان می‌دهیم(شکل۴. ب). به همین ترتیب یک تبدیل مشابه برای پایدارسازهای متناظر با وجه سبز وجود دارد که طبق آن پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه سبز معادل با یک ضرب سه تایی از عملگرهای $\bar{Z}$ روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ است که ما آن را با $B_p^z(2)$ نشان می‌دهیم (شکل۵. الف). پایدارسازهای نوع X مربوط به وجه سبز نیز به یک ضرب شش تایی از عملگرهای $\bar{X}$ روی کیوبیت‌های یال سبز نگاشته می‌شود که ما آن را با $B_p^x(2)$ نشان می‌دهیم (شکل۵. ب).



شکل۴. (الف) تبدیل پایدار سازهای نوع Z مربوط به وجه قرمز به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ و (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع X مربوط به رأس قرمز به ضرب ۶ تایی از عملگرهای پاولی نوع X روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ.



شکل۵. (الف) تبدیل پایدار سازهای نوع Z مربوط به وجه سبز به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ و (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع X مربوط به وجه سبز به ضرب ۶ تایی از عملگرهای پاولی نوع X روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ.



شکل۶. (الف) تبدیل پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه آبی به ضرب سه تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های سبز (ب) تبدیل پایدارسازهای نوع Y مربوط به رأس آبی به ضرب ۳ تایی از عملگرهای پاولی نوع Z روی کیوبیت‌های یال قرمز رنگ.

در نهایت تبدیلی مشابه را برای پایدارسازهای متناظر با وجه آبی رنگ در نظر می‌گیریم. در مورد پایدارساز نوع Z برای وجه آبی رنگ، نگاشت پایدارسازها شبیه به دیگر وجوه است، به این معنا که پایدارسازهای نوع Z مربوط به وجه آبی رنگ معادل با یک ضرب سه تایی از عملگرهای نوع Z روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ است که با $B_p^z(3)$ مشخص می‌کنیم(شکل۶. الف). با این حال اثر پایدارساز نوع X بدیهی است، به این معنا که به دلیل این که این نوع پایدارساز با همهٔ عملگرهای g_i جابه‌جا می‌شود، به عملگر یکانی روی کیوبیت‌های یال نگاشته خواهد شد. اما می‌دانیم که یک ضرب از پایدارسازهای نوع X و نوع Z که B_p^Y نامیده می‌شود یک عضو از گروه پایدارساز مربوط به کد رنگ است. اگر چنین عملگری را به شکل $(Z_2Z_3)(Z_4Z_5)(Z_6Z_1B_x^p)$ بنویسیم، معادل با $g_2g_4g_6$ خواهد بود. در چنین شرایطی، اثر این عملگر بر روی پایه‌های GHZ ، معادل با حاصل‌ضرب سه عملگر $\bar{Z}$ روی کیوبیت‌های قرمز رنگ است که ما آن را با $B_p^Y(3)$ نشان می‌دهیم(شکل۶. ب). در نتیجه اگر تبدیل مورد نظرمان را به همهٔ پایدارسازهای کد

رنگ اعمال کنیم، پایدارسازها به دو دسته متناظر با کیوبیت‌های یال قرمز و سبز تبدیل می‌شوند که در آن $B_p^z(1)$ ، $B_p^x(2)$ و $B_p^z(3)$ به کیوبیت‌های یال سبز و $B_p^x(1)$ ، $B_p^z(2)$ و $B_p^Y(3)$ به کیوبیت‌های یال قرمز اعمال می‌شوند. این بدین معنی است که تحت تبدیل یکانی انجام شده، حالت کد رنگ به یک حالت ضربی از دو حالت پایدار ساز متناظر با کیوبیت‌های یال قرمز و سبز تبدیل شده است.$B_p^z(1)$ ، $B_p^x(2)$ و $B_p^z(3)$ پایدارسازهای یک حالت پایدار شده متناظر با کیوبیت‌های یال سبز است.

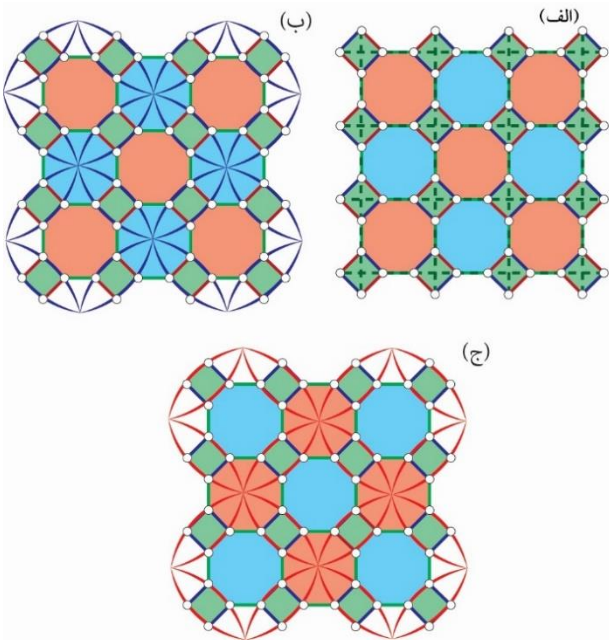
همان طور که در شکل۲. ب مشاهده می‌کنید، کیوبیت‌های یال سبز رنگ بر روی یال‌های یک شبکهٔ مثلثی قرار دارند که رأس‌های این شبکهٔ مثلثی در مرکز وجوه سبز شبکهٔ لانه زنبوری اولیه واقع شده است. $B_p^z(1)$ و $B_p^z(3)$ متناظر با پایدارسازهای وجه کد چنبره تعریف شده بر روی شبکهٔ مثلثی و $B_p^x(2)$ متناظر با پایدارسازهای رأس کد چنبره روی شبکهٔ مثلثی است. بنابراین حالت پایدارساز روی کیوبیت‌های یال سبز رنگ با حالت کد چنبره روی شبکهٔ مثلثی یکسان است. به روشی مشابه به آسانی می‌توان نشان داد که حالت پایدارساز متناظر با کیوبیت‌های یال قرمز رنگ نیز با حالت کد چنبره روی شبکهٔ مثلثی که رئوس آن در مرکز وجوه قرمز رنگ شبکهٔ لانه زنبوری اولیه قرار دارد، یکسان است (شکل۲. ج و ۲ .د).

این کدهای چنبرهٔ ایجاد شده بر روی شبکهٔ مثلثی سبز (شامل کیوبیت‌های یال سبز) و شبکهٔ مثلثی قرمز (شامل کیوبیت‌های یال قرمز) هیچ کیوبیت مشترکی با هم ندارند بنابراین این دو کد چنبره کاملاً از هم واهمتنیده هستند. با این روش، ما به سادگی اثبات کردیم که یک حالت کد رنگ روی شبکهٔ لانه زنبوری معادل با دو نسخه واهمتنیده از کدهای چنبرهٔ تعریف شده روی شبکه‌های مثلثی است.

۵. تبدیل GHZ به عنوان یک نگاشت دوگان بر روی کدهای کوانتومی

همان طور که در قسمت قبل نشان دادیم با انتخاب یک وجه با رنگی دلخواه (در اینجا وجه آبی رنگ) از شبکهٔ لانه زنبوری و اعمال تبدیل GHZ روی کیوبیت‌های متعلق به آن، کد رنگ روی شبکهٔ لانه زنبوری به دو نسخهٔ واهمتنیده از کدهای چنبره روی دو شبکهٔ مثلثی (قرمز و سبز) تبدیل می‌شود به طوری که رأس‌های شبکه‌های مثلثی در وسط وجوه شش ضلعی با رنگی غیر از آبی (دراینجا سبز و قرمز) قرار گرفته‌اند. با توجه به تقارن مسئله واضح است که اگر وجهی با رنگی دیگر مثلا رنگ قرمز را انتخاب کرده و این تبدیل را انجام می‌دادیم کدهای چنبرهٔ به وجود آمده همانند قبل بر روی شبکه‌های مثلثی تعریف می‌شدند که رأس‌های شبکه، این بار درون وجوهی با رنگی غیر از قرمز قرار می‌گرفتند. همین روند برای وجه شش ضلعی سبز رنگ نیز صادق است که تبدیل GHZ بر روی کیوبیت‌های واقع بر شش ضلعی سبز، کد رنگ را به دو نسخه از کدهای چنبرهٔ مثلثی تبدیل می‌کند که رأس شبکه‌های مثلثی در وسط وجوه با رنگ‌های قرمز و آبی قرار دارند. دوباره یاداور می‌شویم که چون شبکه‌های مثلثی نهایی هیچ کیوبیت مشترکی ندارند لذا کدهای چنبرهٔ تعریف شده بر روی آنها کاملاً از هم واهمتنیده هستند. شبکه‌های ثانویه ایجاد شده بر روی شبکهٔ اولیه را شبکه‌های دوگان می‌نامیم. شبکهٔ دوگان تعریف شده بر روی کد رنگ شبکه‌ای است که رأس‌های آن در وسط وجوه شبکهٔ اولیه با یک رنگ خاص قرار گرفته و یال‌های آن منطبق بر یال‌هایی با همان رنگ از شبکهٔ اولیه است. شبکهٔ دوگانی را که بر روی یک کد رنگ دو بعدی تعریف می‌شود با سه رنگ مختلف، متناظر با رنگ وجوهی که رأس‌های شبکهٔ دوگان در آن قرار گرفته، رنگ آمیزی می‌کنیم. همان طور که در شکل ۲ می‌بینید شبکهٔ لانه زنبوری سه شبکهٔ دوگان مثلثی خواهد داشت که با سه رنگ آبی، قرمز و سبز مشخص شده است. رأس‌های هر کدام از شبکه‌های دوگان درون وجوه شش ضلعی با همان رنگ واقع شده است. متناظر با این که تبدیل GHZ ما بر روی کدام رنگ از وجوه شش ضلعی کد رنگ اعمال شده، کد چنبره بر روی شبکه‌های دوگانی با رنگ‌های دیگر تعریف می‌شود.

با توجه به این که روش ما مبتنی بر تغییر پایه است، این روش، قابل تعمیم به حالت‌های کد رنگ روی هر شبکهٔ دو بعدی سه رنگ‌پذیر دلخواه خواهد بود.

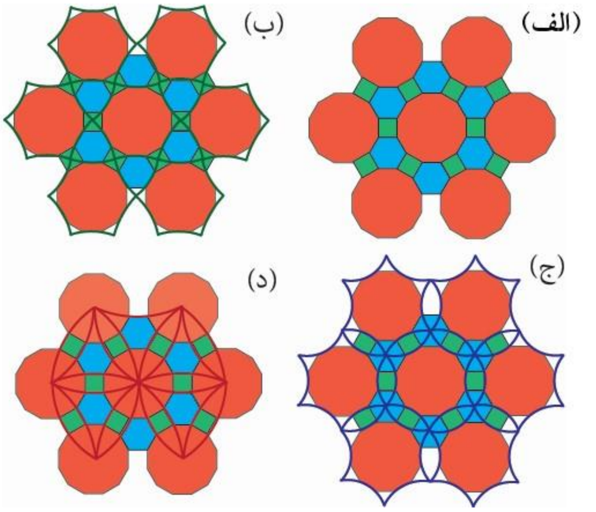


شکل ۷. (الف) شبکهٔ دوگان مربعی سبز رنگ با رأس‌هایی واقع در وجوه سبز رنگ شبکهٔ اولیه، (ب) و (ج) شبکهٔ دوگان ستاره‌ای آبی (قرمز) با رأس‌هایی واقع در وجوه آبی (قرمز).

به عنوان مثال کد رنگ در شکل۷ بر روی یک شبکهٔ ۴.۸.۸ که دو نوع ساختار هشت ضلعی و مربعی دارد تعریف شده است[۱۲، ۴۳ و۴۴]. همانند قبل در اینجا نیز با اعمال تبدیل GHZ که متناظر با یک الگوی خاص از تبدیلات یکانی موضعی بر روی یک وجه با رنگی خاص است، کد رنگ به دو نسخه از کدهای چنبره نگاشته می‌شود.

با این حال بسته به این که تبدیل GHZ به کدام نوع وجه (هشت ضلعی یا مربعی) اعمال شود کد چنبره بر روی شبکه‌های مختلفی از نظر ساختار ایجاد می‌شود.

به عنوان مثال اگر تبدیل GHZ به کیوبیت‌های متعلق به وجه مربعی اعمال شود کد چنبره بر روی شبکه‌های ستاره‌ای با رنگ‌های قرمز و آبی واقع خواهد شد که این شبکه‌ها، دوتا از سه شبکهٔ دوگان قابل تعریف بر روی شبکهٔ اولیهٔ ۴.۸.۸ است. از طرفی از آنجا که دو نوع وجه هشت ضلعی با دو رنگ مختلف در شبکهٔ ۴.۸.۸ وجود دارد، اگر تبدیل GHZ را به وجوه هشت ضلعی متناظر با یکی از رنگ‌ها اعمال کنیم، این الگو، کد رنگ را به دو کد چنبره بر روی شبکهٔ مربعی سبز و شبکهٔ ستاره‌ای با رنگی دیگر تبدیل می‌کند.



شکل۸ . (الف) شبکهٔ ۴.۶.۱۲ با وجوه سبز، آبی و قرمز، (ب) شبکهٔ دوگان سبز رنگ با رأس‌هایی واقع در وجوه سبز، (ج) شبکهٔ دوگان آبی با رأس‌هایی واقع در وجوه آبی و (د) شبکهٔ دوگان قرمز با رأس‌هایی واقع در وجوه قرمز رنگ.

به عبارت دیگر در اینجا نیز اگر تبدیل GHZ را به عنوان یک نگاشت دوگان در نظر بگیریم با توجه به این که شبکهٔ ۴.۸.۸ سه شبکهٔ دوگان (یک شبکهٔ مربعی و دو شبکهٔ ستاره‌ای) دارد بسته به این که تبدیل GHZ بر روی کیوبیت‌های متعلق به کدام وجه اعمال می‌شود، کد رنگ به نسخه‌هایی از کد چنبره تبدیل می‌شود به طوری که رأس‌های کد چنبره بر روی وجوهی با رنگی متفاوت از رنگ وجهی که تبدیل GHZ بر روی آن اثر کرده، قرار می‌گیرند.

به عنوان یک مثال دیگر در شکل۸، شبکهٔ ۴.۶.۱۲ که سه شبکهٔ دوگان با سه ساختار مختلف است را نشان داده‌ایم [۴۵]. در اینجا نیز همانند قبل با اعمال تبدیل GHZ روی کیوبیت‌های واقع بر یک نوع از وجوه، کد چنبره‌ای روی شبکهٔ دوگان ایجاد خواهد شد. متناظر با این که تبدیل GHZ بر روی کدام وجه اعمال شده است کد چنبره بر روی دو تا از سه نوع شبکهٔ دوگان قابل تعریف بر روی شبکهٔ اولیهٔ ۴.۶.۱۲ ایجاد می‌شود (شکل۸).

بنابراین تبدیل GHZ یک نگاشت دوگان بین کد رنگ دو بعدی و کد چنبرهٔ دوبعدی است، به طوری که از ساختار دوگان شبکه‌ها تبعیت می‌کند. این مسئله به خصوص از این نظر مهم است که امکان مقایسهٔ الگوی درهمتنیدگی بین کدهای رنگ روی شبکه‌های مختلف را فراهم می‌کند. به بیان دیگر در حالی

که همۀ کدهای رنگ توسط واهمتنده‌ها در نهایت به دو کد چنبره تبدیل می‌شوند اما ساختار شبکه‌های دوگان مربوط به کدهای چنبره با یکدیگر تفاوت دارند و درنتیجه الگوی درهمتنیدگی، متفاوت خواهد بود. این مسئله می‌تواند توضیحی برای تفاوت بین قابلیت‌های کدهای رنگ روی شبکه‌های مختلف دوبعدی باشد [۱۲].

۶. نتیجه‌گیری

در حالی که اثبات وجود تبدیلاتی موضعی بین کدهای کوانتومی توپولوژیکی، در فهم مشابه بودن نظم توپولوژیکی آنها راهگشا است، اما شناخت و معرفی صریح این تبدیلات به منظور درک تفاوت‌های بین این کدها ضروری است. بر این اساس، در این مقاله به بررسی هم‌ارزی بین کدهای کوانتومی توپولوژیکی چنبره و کد رنگ پرداختیم و با معرفی واهمتنده‌های GHZ نشان دادیم که کد رنگ با اعمال چنین تبدیلاتی به دو کد چنبره تبدیل می‌شود. به ویژه، با توجه به ماهیتی با بیشینۀ درهمتنیدگی برای حالت‌های GHZ، نتیجۀ ما امکان مقایسۀ درهمتنیدگی کوتاه برد در کد چنبره با کد رنگ را فراهم می‌کند که به منظور بررسی تفاوت‌های مهم این دو کد کوانتومی مفید است. قابل ذکر است که این کار می‌تواند برای یافتن مدارهای کوانتومی به منظور تبدیل کدهای کوانتومی رنگ و چنبره به یکدیگر نیز به کار آید. ما نشان دادیم که این روش قابل تعمیم به انواع شبکه‌های دو بعدی سه رنگ‌پذیر مثل شبکه‌های ۴.۸.۸ و ۴.۶.۱۲ نیز است. به خصوص، با معرفی سه نوع شبکۀ دوگان متناظر با سه رنگ از شبکه‌های سه رنگ‌پذیر مربوط به کد رنگ، نشان دادیم که تبدیل بین کد رنگ و کد چنبره به نوعی می‌تواند به عنوان یک نگاشت دوگان تلقی شود. در همین راستا دیدیم که تبدیل GHZ بر روی کد رنگ لانه زنبوری آن را به نسخه‌هایی از کد چنبره بر روی سه ساختار یکسان تبدیل می‌کند. این در حالی است که این تبدیل، کد رنگ روی شبکۀ ۴.۸.۸ را به دو ساختار متفاوت و شبکۀ ۴.۶.۱۲ را به سه ساختار متفاوت می‌نگارد. این تفاوت در ساختارهای دوگان برای کدهای رنگ لانه زنبوری و ۴.۸.۸ و ۴.۶.۱۲، می‌تواند برای درک تفاوت‌های بین این کدها نیز راهگشا باشد.

مراجع

1. H Jiang, Z Wang, and L Balents, *Nature Phys.* **8** (2012) 902.
2. S Sachdev, *"Quantum Phase Transition"*, Cambride University Press. (2011) 2nd ed.
3. L Carr, "*Understanding Quantum Phase Transitions*". CRC Press. (2010).
4. B Kraus, *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 020504.
5. B Kraus, *Phys. Rev. A* **82** (2010) 032121.
6. B Liu, J L Li, X Li, and C F Qiao, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 050501.
7. M Grassl, M Rotteler, and T Beth, *Phys. Rev. A* **58** (1998) 1833.
8. X -G Wen, *ISRN Condensed Matter Physics*, (2013). Article ID 198710, 20 pages.
9. M Levin and X G Wen, *Phys. Rev. Lett*. **96**, 11 (2006) 110405.
10. E Dennis, A Kitaev, A Landahl, and J Preskill, *J. Math. Phys*. **43** (2002) 4452.
11. A Y Kitaev, *Ann. Phys*. **303** (2007) 160502.
12. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 160502
13. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 180501.
14. B J Brown, D Loss, J K. Pachos, C N Self, and J R Wootton, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016) 045005.
15. A Y Kitaev, *Ann. Phys. (N.Y.)* **2** (2003) 303.
16. C L Kane and E J Male, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 14.
17. S Trebst, P Werner, M Troyer, K Shtengel, and C Nayak, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 070602.
18. J Vidal, S Dusuel, and K P Schmidt, *Phys. Rev.B* **79** (2009) 033109.
19. J Vidal, R Thomale, K P Schmidt, and S Dusuel, *Phys. Rev. B* **80** (2009) 081104.
20. I S Tupitsyn, A Kitaev, N V Prokofev, and P C E Stamp, *Phys. Rev. B* **82** (2010) 085114.
21. F Wu, Y Deng, and N Prokof'ev, *Phys. Rev. B* **85** (2012) 195104.
22. M H Zarei, *Phys. Rev. A* **91** (2015) 022319.
23. M H Zarei, *Phys. Rev. B* **96** (2017) 165146.
24. M H Zarei and A Montakhab, *Phys. Rev. A* **99** (2019) 052312.
25. C Castelnovo and C Chamon, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 054433.
26. A Jamadagni, H Weimer, A Bhattacharyya, *Phys. Rev. B* **98** (2018) 235147.

27. A Hamma and D A Lidar, *Phys. Rev. Lett*. **100** (2008) 030502.
28. S Dusuel, M Kamfor, R Orus, K P Schmidt, and J Vidal, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 107203.
29. S.S. Jahromi, M. Kargarian, S. F. Masoudi and K.P. Schmidt, *Phys. Rev. B* **87** (2013) 094413.
30. H Bombin and M A Martin-Delgado, *J. Phys. A: Math. Theor* **42** (2009) 095302.
31. H Bombin, *New J. Phys.* **17** (2015) 083002.
32. H Bombin and M A Martin-Delgado, *Phys. Rev. B* **75** (2007) 075103.
33. S Bravyi and R Konig, *Phys. Rev. Lett*. **110** (2013) 170503.
34. A Kubica, B Yoshida, and F Pastawski, *New J. Phys*. **17** (2015) 083026.
35. A B Aloshious and P K Sarvepalli, *Phys. Rev. A* **98** (2018) 012302.
36. A Kubica and N Delfosse, Efficient color code decoders in d≤2 dimensions from toric code decoders, arXiv preprint arXiv:1905.07393 (2019).
37. H Bombin, G Duclos-Cianci, and D Poulin, *New J. Phys*., **14** (2012) 073048.
38. N Delfosse, *Phys. Rev. A* **89** (2014) 012317.
39. A B Aloshious and P K Sarvepalli, *Phys. Rev. A* **100** (2019) 042312.
40. A Bhagoji and P Sarvepalli, *2015 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, **1** (2015) 1109.
41. M H Zarei, *Phys. Rev. A* **93**(4) (2016) 042306.
42. M H Zarei and M R Haghighi , *Phys. Rev. B* **108** (2023) 035116.
43. P Parrado-Rodriguez, M Rispler, and M Muller, *Phys. Rev. A* **106** (2021) 032431.
44. A J Landahl and C Ryan-Anderson, *arXiv: 1407.5103 (2014).*
45. D Amaro, J Bennett, D Vodola and M Muller, *Phys. Rev. A* **101** (2020) 032317.