



مطالعه ناوردایی همیوگ باری در الکترودینامیک کوانتومی با تقارن SIM(2)

معصومه قاسم‌خانی و زینا حق‌گویان

دانشکده فیزیک، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

پست الکترونیکی: m_ghasemkhani@sbu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۱۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۱۰/۳۰)

چکیده:

در این مقاله، مدل الکترودینامیک کوانتومی چهار بعدی با تقارن SIM(2) را در چارچوب نسبیت خیلی خاص در نظر می‌گیریم. ابتدا به بررسی تقارن همیوگ باری کنش در حد درختی (کلاسیک) پرداخته و نشان می‌دهیم که این کنش تحت تبدیل همیوگ باری ناورداست. سپس جهت بررسی اختلالی حفظ تقارن همیوگ باری در حد حلقه (کوانتومی)، روی نمودارهای تک-حلقه با تعداد فرد پای فوتونی متمرکز خواهیم شد. برای این منظور، با استفاده از رهیافت کنش مؤثر، شکل کلی توابع فرد-نقطه‌ای فوتون را به دست آورده و رفتار توابع یک و سه-نقطه‌ای فوتون را تحت تبدیل همیوگ باری مطالعه می‌کنیم. محاسبات ما نشان می‌دهد دامنه کل توابع یک و سه-نقطه‌ای صفر بوده و تقارن همیوگ باری در حد کوانتومی حفظ می‌شود. در ادامه، با استفاده از روش غیر اختلالی، نشان می‌دهیم این تقارن در حد کوانتومی (در تمام مراتب) موجود بوده و دامنه تمام توابع فرد-نقطه‌ای فوتون صفر می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تقارن SIM(2)، نسبیت خیلی خاص، تقارن همیوگ باری، توابع فرد-نقطه‌ای فوتون

۱. مقدمه

مدل‌هایی با نقض تقارن لورنتس صورت گرفته است که از جمله آنها نظریه ریسمان، هندسه ناجابه‌جایی و گرانش کوانتومی در سطح حلقه هستند [۲-۵]. با وجود تلاش‌های فیزیکدانان نظری در رسیدن به یک نظریه بنیادین وحدت بخش، تحقیقات آزمایشگاهی برای بررسی نقض ناوردایی لورنتس می‌تواند مسیر دستیابی به این نظریه را تا حدودی هموار سازد [۶]. از دیگر مدل‌های همراه با نقض تقارن "مدل استاندارد تعمیم یافته" [۷ و ۸] و نسبیت خیلی خاص است [۹ و ۱۰].

مدل استاندارد علیرغم موفقیت‌های چشمگیرش در فیزیک ذرات بنیادی از توصیف نتایج مشاهداتی مربوط به پدیده نوسان نوترینوها که منجر به جرم‌دار شدن آنها می‌شود، عاجز است [۱۱]. مشهورترین ایده برای توضیح جرم نوترینوها سازوکار الاکلنگ است که مستلزم وجود ذره جدیدی به نام

تقارن لورنتس یک تقارن بنیادی در نسبیت عام انیشتین و مدل استاندارد ذرات بنیادی است. نسبیت عام انیشتین در توصیف کلاسیکی گرانش و مدل استاندارد در توصیف فیزیک ذرات و نیروهای بنیادی (به جز نیروی گرانش) بسیار موفق بوده‌اند. هر چند در مقیاس انرژی پلانک (حدود 10^{19} گیگا الکترون ولت)، یک نظریه بنیادی‌تر مورد نیاز است تا وحدت بخش تمام نیروها از جمله گرانش بوده به طوری که نظریه نسبیت عام و مدل استاندارد به نوعی کنش مؤثر آن نظریه در انرژی‌های پایین باشند [۱].

در این نظریه وحدت بخش، پیش‌بینی می‌شود که تقارن لورنتس به دلیل ساختار فضا-زمان در مقیاس پلانک نقض می‌شود. به لحاظ نظری، تحقیقات گسترده‌ای در خصوص

نظریه میدان‌های کوانتومی چهار بعدی در چارچوب نسبیت خیلی خاص با تقارن $SIM(2)$ انجام شده است [۱۴-۲۳]. همچنین اثرات نسبیت خیلی خاص در نظریه میدان‌هایی با ابعاد پایین از جمله مدل شوئینگر در $(1+1)$ -بعد [۲۴] و مدل چرن-سایمونز آبلی و غیر آبلی در $(2+1)$ -بعد [۲۵ و ۲۶] مطالعه شده است.

همان طور که اشاره شد گروه $SIM(2)$ در چهار بعد جهت چهار-بردار نورگونه n^μ را ناوردا نگه می‌دارد. با استفاده از این ویژگی، شکل لاگرانژی آزاد میدان دیراک با تقارن $SIM(2)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$L_0 = \bar{\psi} \left[i \not{\partial} - m_e + i \frac{m^2}{2} \frac{\not{n}}{n \cdot \partial} \right] \psi, \quad (1)$$

که در آن m پارامتر نسبیت خیلی خاص، m_e جرم الکترون و n_μ چهار-بردار نورگونه ثابت $(1, 0, 0, 1)$ در چهار بعد است. جمله آخر در رابطه (۱) نه تنها تقارن لورنتس را نقض می‌کند بلکه تحت تبدلات گسسته وارونی زمان (T) ، پارته (P) ، همیوگ بار-پارته (CP) و همیوگ بار-وارونی زمان (CT) نیز ناوردا نیست. اما این لاگرانژی تحت تبدیل فضایی-زمانی $SIM(2)$ و تبدیل گسسته C ناورداست. می‌توان دید در صورتی که جمله برهم‌کنشی فوتون با میدان دیراک نیز در نظر گرفته شود، لاگرانژی برهم‌کنشی هم تحت تبدیل C ناوردا خواهد بود. به عبارت دیگر، کنش الکترودینامیک کوانتومی با تقارن فضا-زمانی $SIM(2)$ در حد درختی (کلاسیک) ناورداست اما آیا این ناوردایی در سطح کوانتومی نیز حفظ می‌شود یا خیر؟ بررسی ناوردایی C در الکترودینامیک کوانتومی با تقارن $SIM(1)$ در سه بعد به صورت اختلالی در [۲۵] مطالعه شده و نشان دادند ناوردایی تحت C در حد کوانتومی برقرار است. در این مقاله، هدف ما بررسی این ناوردایی در سطح کوانتومی در چهار بعد به دو روش اختلالی و غیر اختلالی است.

ابتدا مدل برهم‌کنشی میدان دیراک با فوتون در چارچوب نسبیت خیلی خاص را معرفی کرده و کنش مربوطه را تحت تبدیل همیوگ بار در سطح کلاسیکی بررسی می‌کنیم. سپس با معرفی کنش مؤثر فوتون به بررسی اختلالی ناوردایی C می‌پردازیم. برای این منظور، دامنه توابع فرد-نقطه‌ای فوتون در حد تک-

نوترینوی استریل است [۱۲]. این ذره جدید باید به اندازه کافی جرم‌دار باشد تا بتواند به نوترینوها جرم کوچکی بدهد. هر چند تا کنون شواهدی دال بر وجود ذره‌ای با خواص نوترینوی استریل یافت نشده است.

یکی از انگیزه‌های اصلی برای فرمول‌بندی نظریه نسبیت خیلی خاص، ارائه سازوکار جدیدی برای جرم‌دار کردن نوترینوها بدون در نظر گرفتن ذره جدید بود [۱۰]. نظریه نسبیت خیلی خاص (VSR) اولین بار توسط کوهن و گلاشو در سال ۲۰۰۶ مطرح شد. در واقع، آنها بر این باور بودند که تقارن لورنتس به عنوان تقارن بنیادی نبوده و در عوض طبیعت تحت زیرگروه‌های گروه لورنتس ناورداست. این زیر گروه‌ها شامل $E(2), T(2), HOM(2)$ و $SIM(2)$ هستند که تحت این چهار زیر گروه روابط بنیادی نسبیت خاص از جمله انقباض طول، اتساع زمان و رابطه پاشندگی تغییری نمی‌کنند. اگر هر یک از تقارن‌های پارته (P) ، وارونی زمان (T) ، تقارن مرکب همیوگ بار-پارته (CP) و یا همیوگ بار-وارونی زمان (CT) را به این چهار زیر گروه لورنتس اضافه کنیم، گروه لورنتس به طور کامل به دست می‌آید [۹]. بنابراین اگر نظریه‌ای فاقد تقارن لورنتس بوده اما تحت یکی از چهار زیر گروه لورنتس ناوردا باشد، حتماً تقارن P, T, CP و یا CT را نقض خواهد کرد [۱۳].

بزرگ‌ترین زیرگروه لورنتس، زیر گروه $SIM(2)$ است که ۴ مولد به صورت $T_1 = K_x + J_y$ ، $T_2 = K_y - J_x$ ، J_z و K_z دارد که در آن K_i و J_i به ترتیب مولدهای خیز و دوران در سه بعد فضایی هستند. این زیر گروه هیچ بردار یا تانسور ناوردایی ندارد اما جهت چهار-بردار نورگونه n^μ تحت تبدیل $SIM(2)$ حفظ شده و به صورت یک فاز تبدیل می‌یابد. با توجه به این ویژگی، به راحتی می‌توان دید کسرهایی که به صورت $\left(\frac{n \cdot p}{n \cdot q}\right)$ هستند، تحت تبدیل $SIM(2)$ ناوردا بوده و در نتیجه جملات غیر موضعی وارد مدل می‌شوند [۹]. وجود این جملات غیر موضعی در فرمول‌بندی نظریه میدان در چارچوب نسبیت خیلی خاص اولاً سبب تصحیح رأس‌های برهم‌کنشی قبلی شده و ثانیاً رأس‌های برهم‌کنشی جدیدی نیز ایجاد می‌کند. کارهای متعددی در زمینه بررسی

که در آن d, c, b, a ضرایب بسط هستند. از آنجایی که در نظریه اختلالی الکترودینامیک کوانتومی استاندارد، ضریب جفت شدگی e کوچک بوده و بسط اختلالی مجاز است، در اینجا نیز سری فوق که بر حسب توان‌های مختلف e است مجاز بوده و بنابراین سری همگراست. چون حاصل ضرب معکوس هر عملگری در خودش برابر یک می‌شود، می‌توانیم ضرایب بسط را به دست آوریم. در اینجا بسط را تا مرتبه e^4 می‌نویسیم.

$$n.D \frac{1}{n.D} = [n.\partial - ie n.A] \times [(n.\partial)^{-1} + a e + b e^2 + c e^3 + d e^4 + \dots] = 1. \quad (6)$$

با به دست آوردن ضرایب بسط اختلالی از رابطه (۶)، عبارت $\frac{1}{n.D}$ تا مرتبه e^4 به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{n.D} = \frac{1}{n.\partial} + ie \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} - e^2 \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} - i e^3 \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} + e^4 \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} n.A \frac{1}{n.\partial} + \dots \quad (7)$$

با جایگذاری عبارت (۷) در کنش (۲)، بخش آزاد و برهم‌کنشی نظریه VSR-QED به راحتی از هم تفکیک می‌شوند. تبدیل همیوگ بار (C) روی بخش آزاد فرمیونی به صورت زیر است:

$$L_0 = \bar{\psi}^c [i \not{\partial} - m_e + i \frac{m^2}{2} \frac{\not{\partial}}{n.\partial}] \psi^c. \quad (8)$$

میدان‌های ψ^c و $\bar{\psi}^c$ تبدیل یافته ψ و $\bar{\psi}$ تحت عملگر همیوگ بار بوده و برابرند با [۲۷]:

$$\psi^c = C \bar{\psi}^t; \quad \bar{\psi}^c = -\psi^t C^{-1}, \quad (9)$$

که نماد t ، به معنای ترانهاده میدان فرمیونی است. با استفاده از اتحاد زیر:

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^t, \quad (10)$$

و نیز رابطه پاد جابه‌جایی فرمیون‌ها، ناوردایی همیوگ بار جملات اول و دوم L_0 به راحتی اثبات می‌شود. همچنین تبدیل همیوگ بار جمله غیر موضعی L_0 به صورت زیر می‌شود:

حلقه را به ازای تعداد یک و سه پای خارجی فوتون محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که دامنه هر دو دقیقاً صفر است. در ادامه، به ارائه روش غیر اختلالی جهت بررسی ناوردایی C در حد کوانتومی پرداخته و ثابت می‌کنیم تقارن همیوگ باری در حد کوانتومی در چهار بعد نیز حفظ می‌شود.

۲. معرفی مدل

فرض کنید میدان فرمیونی ψ به جرم m_e با میدان پیمانه‌ای خارجی A_μ در چارچوب نسبیت خیلی خاص برهم‌کنش دارد. این کنش با تقارن SIM(2) در چهار بعد به صورت زیر داده می‌شود [۱۵]:

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi} (i \gamma^\mu \nabla_\mu - m_e) \psi, \quad (2)$$

که در آن γ^μ ماتریس‌های دیراک و ∇_μ مشتق هموردای VSR است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_\mu \equiv D_\mu + \frac{m^2}{2} \frac{n_\mu}{n.D}, \quad (3)$$

که در آن $D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$ مشتق هموردای معمولی در نظریه الکترودینامیک کوانتومی است. ضمناً در کنش (۲)، انرژی جنبشی میدان فوتون نوشته نشده زیرا به عنوان یک میدان خارجی در مدل فرض شده است [۲۷]. در حد غیر برهم‌کنشی (آزاد)، مشتق هموردای VSR در رابطه (۳) به $\tilde{\partial}_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{1}{2} \frac{m^2}{n.\partial} n_\mu$ تقلیل می‌یابد. این کنش تحت تبدیلات پیمانه‌ای اَبلی بسیار کوچک زیر ناورداست [۱۵]:

$$\delta\psi = i \Lambda \psi, \quad \delta A_\mu = \tilde{\partial}_\mu \Lambda, \quad (4)$$

که در آن Λ پارامتر تبدیل پیمانه‌ای است.

۲.۱. بررسی تبدیل همیوگ بار در حد درختی (کلاسیک)

جهت سهولت در بررسی تبدیل همیوگ باری نظریه الکترودینامیک کوانتومی در چارچوب نسبیت خیلی خاص، بخش‌های آزاد و برهم‌کنشی در رابطه (۲) را از هم تفکیک می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا کمیت $\frac{1}{n.D}$ را بر حسب توانی از ثابت جفت شدگی e به صورت اختلالی بسط می‌دهیم:

$$\frac{1}{n.D} = (n.\partial)^{-1} + a e + b e^2 + c e^3 + d e^4 + \dots, \quad (5)$$

جملات با تعداد فرد میدان فوتونی ندارد. در واقع، این جملات با تعداد فرد فوتون طبق رابطه $A_{\mu}^C = -A_{\mu}$ تحت تبدیل همیوگ باری به منفی خود رفته و تقارن همیوگ باری را نقض می‌کنند. در بخش بعد، ابتدا کنش مؤثر فوتون در چارچوب این مدل را معرفی کرده و سپس صحت این قضیه را در چارچوب نسبیت خیلی خاص بررسی خواهیم کرد.

۲.۲. رهیافت کنش مؤثر

به منظور ارائه شکل کلی کنش مؤثر فوتون در نسبیت خیلی خاص، از رهیافت انتگرال مسیر استفاده می‌کنیم. ابتدا با انتگرال‌گیری روی میدان‌های فرمیونی داریم:

$$e^{i\Gamma[A]} = \int D\bar{\psi} D\psi e^{iS_F}, \quad (14)$$

که در آن $\Gamma[A]$ ، کنش مؤثر فوتون نام دارد. با استفاده از تکنیک‌های محاسباتی در انتگرال مسیر، شکل نهایی کنش مؤثر فوتون برابر است با [۲۷]:

$$\Gamma[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1, \dots, x_n) \times A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n). \quad (15)$$

تابع $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1, \dots, x_n)$ تابع n-نقطه‌ای فوتون نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_n}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{e^n}{n} \int \prod_i \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\sum_i p_i) \times e^{-ip_i \cdot x_i} \Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, \dots, p_n). \quad (16)$$

تابع $\Pi_{\mu_1 \dots \mu_n}(p_1, \dots, p_n)$ تبدیل فوریه تابع n-نقطه‌ای فوتون در فضای تکانه است. به منظور بررسی صحت قضیه فری در این مدل، تمرکز اصلی ما بر روی محاسبه $\Pi_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}$ برای توابع $(2n+1)$ -نقطه‌ای در چارچوب نسبیت خیلی خاص خواهد بود. بنابراین در بخش بعدی، ابتدا به معرفی قوانین فاینمن مربوطه پرداخته و سپس محاسبات در حد تک-حلقه را انجام می‌دهیم.

$$\bar{\psi}^c \gamma^{\mu} \left(\frac{1}{n \cdot \partial} \psi^c \right) = - \left(\frac{1}{n \cdot \partial} \bar{\psi} \right) \gamma^{\mu} \psi. \quad (11)$$

حال با استفاده از رابطه $\frac{1}{n \cdot \partial} = \int_0^{\infty} ds e^{-s(n \cdot \partial)}$ و نیز انتگرال‌گیری جزء به جزء، رابطه بالا در زیر انتگرال کنش برابر است با:

$$\int d^4x \bar{\psi}^c \gamma^{\mu} \left(\frac{1}{n \cdot \partial} \psi^c \right) = - \int d^4x \left(\frac{1}{n \cdot \partial} \bar{\psi} \right) \gamma^{\mu} \psi = \int d^4x \bar{\psi} \gamma^{\mu} \left(\frac{1}{n \cdot \partial} \psi \right). \quad (12)$$

بنابراین بخش آزاد کنش فرمیونی تحت تبدیل همیوگ بار ناورداست. در مورد بخش برهم‌کنشی، ابتدا جمله مربوطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{\psi} \gamma^{\mu} \left(\frac{1}{n \cdot \partial} \psi \right) = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \left(\int_0^{\infty} ds e^{-s(n \cdot \partial)} \psi \right), \quad (13)$$

و سپس تابع نمایی را بسط می‌دهیم. در ادامه، با استفاده از اتحاد (۱۰) و رابطه همیوگ باری فوتون $A_{\mu}^C = -A_{\mu}$ ، به راحتی ملاحظه می‌شود که قسمت برهم‌کنشی نیز تحت تبدیل همیوگ بار ناورداست. بنابراین با توجه به ناوردایی بخش آزاد و برهم‌کنشی می‌توان نتیجه گرفت که کنش کل نظریه در حد درختی (کلاسیک) تقارن همیوگ باری دارد. نکته دیگر این که با رفتن به چارچوب نسبیت خیلی خاص، اگر چه تقارن‌های پارته و انعکاس زمانی برقرار نیستند اما تقارن همیوگ باری همچنان برقرار است؛ چرا که یک تقارن داخلی است و ربطی به مختصات ندارد. حال سؤال اصلی این است که آیا این تقارن در حد محاسبات حلقه (کوانتومی) نیز حفظ می‌شود؟

همان‌طور که می‌دانیم در مدل الکترودینامیک کوانتومی معمولی این تقارن تحت عنوان قضیه فری در حد کوانتومی نیز برقرار است و دامنه کل نمودارهای با تعداد فرد پای خارجی فوتون، صفر است [۲۷ و ۲۸]. به عبارت دیگر، کنش مؤثر فوتون که با انتگرال‌گیری بر روی درجات آزادی فرمیونی حاصل می‌شود

$$S(\tilde{p}) = \frac{i(\tilde{\not{p}} + m_e)}{\tilde{p}^\tau - m_e^\tau}$$

$$\Lambda^\mu = -ie \left[\gamma^\mu + \frac{m^\tau}{2} \frac{\not{n} n^\mu}{(n \cdot p)(n \cdot q)} \right]$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{-ie^\tau m^\tau}{2} \frac{\not{n} n^\mu n^\nu}{(n \cdot p)(n \cdot q)} \left[\frac{1}{n \cdot (p+k_\tau)} + \frac{1}{n \cdot (p+k_\nu)} \right]$$

$$\Sigma^{\mu\nu\rho} = \frac{-ie^\tau m^\tau}{2} \frac{\not{n} n^\mu n^\nu n^\rho}{(n \cdot p)(n \cdot q)} \left[\left(\frac{1}{n \cdot (p+k_\tau)} + \frac{1}{n \cdot (p+k_\nu)} \right) \frac{1}{n \cdot (p+k_\tau+k_\nu)} + \text{perm} \right]$$

شکل ۱. قوانین فاینمن در مدل VSR-QED.

می‌یابد. اولین رأس برهم‌کنشی مربوط به دو میدان فرمیونی و یک فوتون است که مشابه آن در QED معمولی وجود دارد؛ با این تفاوت که جمله غیرموضعی $\frac{-ie m^\tau}{2} \frac{\not{n} n^\mu}{n \cdot p n \cdot q}$ نیز به این رأس اضافه می‌شود. ظهور رأس‌های جدید برهم‌کنشی غیر موضعی $\Gamma^{\mu\nu}$ و $\Sigma^{\mu\nu\rho}$ از دیگر شاخصه‌های این مدل است که متناسب با مجذور پارامتر m بوده و مشابهی در QED معمولی ندارند [۱۵]. البته همان‌طور که انتظار داریم در حد $m \rightarrow 0$ ، انتشارگر و تک رأس برهم‌کنشی QED معمولی به دست می‌آید (همه رأس‌های متناسب با m حذف می‌شوند).

۳. بررسی اختلالی ناوردایی همیوگ باری در حد کوانتومی

در این بخش، توابع $(2n+1)$ -نقطه‌ای فوتون را در حد تک-حلقه به ازای $n = 1, 3, 5$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۳.۲. قوانین فاینمن در مدل VSR-QED

برای شروع محاسبات، قدم اول تعیین قوانین فاینمن مربوط به رأس‌های برهم‌کنشی و انتشارگر آزاد میدان فرمیونی با استفاده از کنش (۲) است که در شکل ۱ ارائه شده است. در این شکل همهٔ تکانه‌های فوتون‌های خروجی (k_i) به سمت داخل بوده و قوانین پایستگی انرژی-تکانه در هر رأس برقرار است. انتشارگر آزاد فرمیونی $S(p)$ در مدل VSR-QED مشابه نظریهٔ الکترودینامیک معمولی است، با این تفاوت که به جای تکانه فرمیون p ، تکانه $\tilde{p}_\mu \equiv p_\mu - \frac{m^\tau}{2} \frac{n_\mu}{n \cdot p}$ قرار می‌گیرد. با توجه به بسط رابطه (۷)، مشاهده می‌کنیم که در این مدل تعداد بی‌شمار رأس برهم‌کنشی بین فرمیون و فوتون وجود دارد. در تمام رأس‌ها تعداد پاهای فرمیونی ثابت و برابر ۲ است، اما تعداد پای فوتونی متناسب با افزایش توان e افزایش

ندارد. در بخش بعد، به محاسبه تابع سه-نقطه‌ای فوتون می‌پردازیم.

۳.۲. تابع سه-نقطه‌ای فوتون

با استفاده از رهیافت ماتریس پراکندگی و بسط آن تا مرتبه سوم ضریب جفت شدگی e ، نمودارهای فاینمن توابع ۳-نقطه‌ای به دست می‌آید. این نمودارها شامل دو نمودار مثلثی مشابه نظریه QED و دو نمودار دیگر ناشی از رأس‌های غیر موضعی VSR است که در شکل ۳ رسم شده‌اند. ضمناً نمودار (b) همان نمودار (a) ولی با جهت تکانه معکوس است. حال به محاسبه دامنه متناظر با هر یک از نمودارها می‌پردازیم.

۳.۲.۱. محاسبه دامنه نمودارهای (a) و (b)

عبارت فاینمن مربوط به نمودار (a) برابر است با:

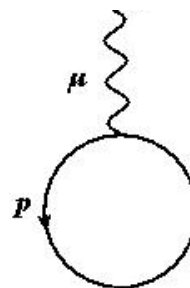
$$\begin{aligned} \Pi_{(a)}^{\mu\nu\rho} = & -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \text{Tr}[S(u)\Lambda^\nu(u,p)S(p) \\ & \times \Lambda^\rho(p,r)S(r)\Lambda^\mu(r,u)]. \end{aligned} \quad (21)$$

که s^ρ ، q^ν و k^μ در شکل ۳، چهار-بردارهای مربوط به تکانه پاهای فوتونی بوده و جهت همگی به سمت داخل است. با جایگذاری مقایر رأس‌ها و انتشارگرها از روابط شکل ۱ داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{(a)}^{\mu\nu\rho} = & -(-ie)^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{i(\not{u} + m_e)}{(u^\nu - \mu^\nu)} \right. \\ & \times \left(\gamma^\nu + \frac{m^\nu}{2} \frac{\not{n} n^\nu}{n.u n.p} \right) \frac{i(\not{p} + m_e)}{(p^\nu - \mu^\nu)} \\ & \times \left(\gamma^\rho + \frac{m^\rho}{2} \frac{\not{n} n^\rho}{n.p n.r} \right) \frac{i(\not{r} + m_e)}{(r^\nu - \mu^\nu)} \\ & \left. \times \left(\gamma^\mu + \frac{m^\mu}{2} \frac{\not{n} n^\mu}{n.r n.u} \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

عبارت فاینمن مربوط به نمودار (b) نیز به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \Pi_{(b)}^{\mu\nu\rho} = & -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(-r)\Lambda^\rho(-r,-p)S(-p) \\ & \times \Lambda^\nu(-p,-u)S(-u)\Lambda^\mu(-u,-r)]. \end{aligned} \quad (23)$$



شکل ۲. نمودار فاینمن تابع یک-نقطه‌ای فوتون در حد تک-حلقه.

۳.۳.۱. تابع یک-نقطه‌ای فوتون

نمودار با یک پای خارجی، در شکل ۲ رسم شده است. به راحتی می‌توان نشان داد که سهم این نمودار برابر صفر است.

عبارت فاینمن مربوطه برابر است با:

$$\Pi^\mu = -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\Lambda^\mu(p)S(\tilde{p})]. \quad (17)$$

با جایگذاری رأس $\Lambda^\mu(p)$ و انتشارگر $S(\tilde{p})$ از روابط شکل ۱ در عبارت Π^μ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Pi^\mu = & -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-ie)}{(\tilde{p}^\nu - m_e^\nu)} \\ & \times \text{Tr} \left\{ \left[\gamma^\mu + \frac{m^\mu}{2} \frac{\not{n} n^\mu}{(n.p)^\nu} \right] (\not{\tilde{p}} + m_e) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

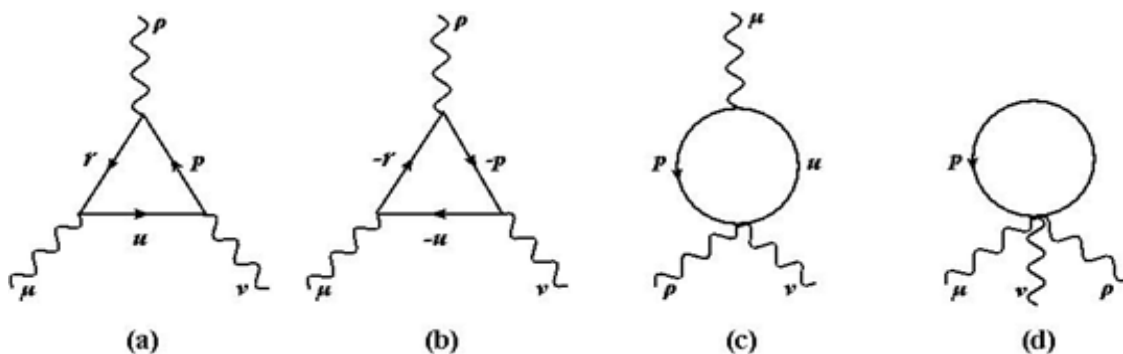
با ردگیری از عبارت ماتریسی رابطه (۱۸)، ملاحظه می‌شود که جملات غیر موضعی VSR از مرتبه m^2 از بین می‌روند و فقط جمله‌ای از مرتبه m^4 باقی می‌ماند که برحسب n^2 است. آنجایی که $n^2 = 0$ است، سهم این جمله نیز صفر می‌شود. بنابراین به همان عبارت مشابه نظریه الکترودینامیک کوانتومی معمولی برای نمودار یک-نقطه‌ای می‌رسیم:

$$\Pi^\mu = ie \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu}{(p^\nu - \mu^\nu)}, \quad (19)$$

که در آن $\mu^\nu \equiv m^\nu + m_e^\nu$ است. مقدار این انتگرال صفر بوده و در نتیجه داریم:

$$\Pi^\mu = 0. \quad (20)$$

تابع یک-نقطه‌ای فوتون در چارچوب VSR در حد تک-حلقه صفر بوده و در نتیجه این نمودار سهمی در کنش مؤثر (۱۵)



شکل ۳. نمودارهای فاینمن تابع سه-نقطه‌ای فوتون در حد تک-حلقه.

$$\Pi_{(a+b)}^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (28)$$

لازم به ذکر است دامنه کل نمودارهای مثلثی در سه بعد نیز صفر است [۲۵].

همان طور که اشاره شد در چارچوب نسبیت خیلی خاص به علت وجود رأس‌های غیرموضعی جدید ($\Gamma^{\mu\nu}$ و $\Sigma^{\mu\nu\rho}$)، علاوه بر دو نمودار مثلثی، دو نمودار دیگر با سه پای خارجی فوتون نیز داریم که در بخش‌های بعدی به محاسبه آنها می‌پردازیم.

۳.۲.۲. محاسبه دامنه نمودار (c)

با استفاده از قوانین فاینمن ذکر شده، دامنه این نمودار به صورت زیر است:

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\Lambda^\mu(p, u)S(u) \times \Gamma^{\nu\rho}(p, u, s, q)S(p)]. \quad (29)$$

که شکل صریح آن برابر است با:

$$\begin{aligned} \Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = & -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[-ie] \\ & \times (\gamma^\mu + \frac{m^\dagger}{2} \not{n} n^\mu) \frac{i(\not{u} + m_e)}{(u^\dagger - \mu^\dagger)} \\ & \times (\frac{-ie^\dagger m^\dagger}{2}) \frac{\not{n} n^\nu n^\rho}{n.p n.u} \\ & \times (\frac{1}{n.(u+q)} + \frac{1}{n.(u+s)}) \frac{i(\not{p} + m_e)}{(p^\dagger - \mu^\dagger)}. \quad (30) \end{aligned}$$

با توجه به صفر بودن اندازه چهار-بردار نورگونه n_μ عبارت فوق به شکل زیر ساده می‌شود:

با قرار دادن رأس‌ها و انتشارگرها داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_{(b)}^{\mu\nu\rho} = & -(ie)^\dagger \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\frac{i(-\not{r} + m_e)}{(r^\dagger - \mu^\dagger)} \\ & \times (\gamma^\rho + \frac{m^\dagger}{2} \not{n} n^\rho) \frac{i(-\not{p} + m_e)}{(p^\dagger - \mu^\dagger)} \\ & \times (\gamma^\nu + \frac{m^\dagger}{2} \not{n} n^\nu) \frac{i(-\not{u} + m_e)}{(u^\dagger - \mu^\dagger)} \\ & \times (\gamma^\mu + \frac{m^\dagger}{2} \not{n} n^\mu)]. \quad (24) \end{aligned}$$

با جایگذاری \not{u} ، \not{p} و \not{r} بر حسب چهار-بردار n_μ و تکانه u_μ ، p_μ ، r_μ در عبارات $\Pi_{(a)}^{\mu\nu\rho}$ و $\Pi_{(b)}^{\mu\nu\rho}$ مجموع دامنه دو نمودار مثلثی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \Pi_{(a+b)}^{\mu\nu\rho} = & -e^\dagger \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(u^\dagger - \mu^\dagger)(p^\dagger - \mu^\dagger)(r^\dagger - \mu^\dagger)} \\ & \times (\delta_\alpha^\nu + \frac{m^\dagger}{2} \frac{n_\alpha n^\nu}{n.u n.p}) (\delta_\beta^\rho + \frac{m^\dagger}{2} \frac{n_\beta n^\rho}{n.p n.r}) \\ & \times (\delta_\lambda^\mu + \frac{m^\dagger}{2} \frac{n_\lambda n^\mu}{n.r n.u}) (\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda} + \mathcal{N}^{\beta\alpha\lambda}), \quad (25) \end{aligned}$$

که در آن تانسورهای $\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda}$ و $\mathcal{N}^{\beta\alpha\lambda}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda} = & \text{Tr}[(\not{u} + m_e)\gamma^\alpha (\not{p} + m_e)\gamma^\beta (\not{r} + m_e)\gamma^\lambda], \\ \mathcal{N}^{\beta\alpha\lambda} = & -\text{Tr}[(\not{r} - m_e)\gamma^\beta (\not{p} - m_e)\gamma^\alpha (\not{u} - m_e)\gamma^\lambda]. \quad (26) \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه چرخشی رد ماتریس‌های دیراک که در پیوست (الف) آمده است، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{N}^{\beta\alpha\lambda} = -\mathcal{M}^{\alpha\beta\lambda}, \quad (27)$$

در نتیجه مجموع دامنه دو نمودار مثلثی مشابه نظریه الکترو دینامیک معمولی قبل از انتگرال‌گیری صفر می‌شود:

کسرهای مرتبط با ضرب داخلی n_μ در تکه‌ها را به صورت تفریق چنین کسرهایی می‌نویسیم. با این روش به راحتی می‌توان انتگرال‌های حاصل را با استفاده از انتگرال پیوست (الف) محاسبه کرده و به نتیجه زیر رسید.

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = \Theta_i^{\mu\nu\rho} (J_i^+ + J_i^-) + (\Psi_j)_\sigma^{\mu\nu\rho} (J_j^{\sigma+} - J_j^{\sigma-}), \quad (36)$$

$$i = 1, 2, 5, 6; \quad j = 3, 4,$$

که در آن عبارات تانسوری به شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\Theta_1^{\mu\nu\rho} = \frac{\imath m^\imath e^\imath \mu^\imath n^\mu n^\nu n^\rho}{n.q \ n.(q-k)};$$

$$\Theta_3^{\mu\nu\rho} = \frac{-\imath m^\imath e^\imath n^\nu n^\rho}{n.q \ n.(q-k)} (\mu^\imath n^\mu + n.(2q-k)q^\mu - q.(q-k)n^\mu - (n.q)k^\mu);$$

$$\Theta_5^{\mu\nu\rho} = -\Theta_6^{\mu\nu\rho} = -\frac{\Theta_1^{\mu\nu\rho}}{\mu^\imath}, \quad (37)$$

$$(\Psi_3)_\sigma^{\mu\nu\rho} = \frac{\imath m^\imath e^\imath n^\nu n^\rho}{n.q \ n.(q-k)} \times [k_\sigma n^\mu - (n.k) \delta_\sigma^\mu],$$

$$(\Psi_4)_\sigma^{\mu\nu\rho} = \frac{-\imath m^\imath e^\imath n^\nu n^\rho}{n.q \ n.(q-k)} \times [n.(2q-k) \delta_\sigma^\mu - (2q-k)_\sigma n^\mu]. \quad (38)$$

انتگرال‌های $J_{j=3,4}^{\sigma\pm}$ و $J_{i=1,2,5,6}^\pm$ نیز به صورت زیرند:

$$J_{(1,3,5,6)}^{\pm, \sigma\pm} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(\imath\pi)^4} \times \frac{(1, p^\sigma, p^\imath)}{(p^\imath \pm \imath x(p.k) - \Phi^\imath)^\imath} \frac{1}{n.p},$$

$$J_{(2,4)}^{\pm, \sigma\pm} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(\imath\pi)^4} \times \frac{(1, p^\sigma, p^\imath)}{(p^\imath \pm \imath p.(q-xk) - \Omega^\imath)^\imath} \frac{1}{n.p}. \quad (39)$$

کمیت‌های Φ^\imath و Ω^\imath برابرند با:

$$\Phi^\imath = \mu^\imath - x \ k^\imath, \quad (40)$$

$$\Omega^\imath = \mu^\imath - x \ k^\imath + \imath x \ k.q - q^\imath.$$

با به کارگیری نسخهٔ مندلستام-لیبرندت^۱ می‌توان نشان داد که در انتگرال‌های (۳۹)، رابطهٔ زیر برقرار است [۲۹]:

$$J_i^{\pm} = -J_i^{\mp}, \quad J_j^{\sigma\pm} = J_j^{\sigma\mp}. \quad (41)$$

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = -\frac{m^\imath}{\imath} e^\imath n^\nu n^\rho \int \frac{d^4 p}{(\imath\pi)^4} \times \frac{1}{(p^\imath - \mu^\imath)(u^\imath - \mu^\imath)} \left(\frac{1}{n.(u+q)} + \frac{1}{n.(u+s)} \right) \times \left\{ \frac{1}{n.p \ n.u} Tr[\gamma^\mu (\not{\mu} + m_e) \not{\not{p}} (\not{p} + m_e)] + \frac{m^\imath}{\imath} \frac{n^\mu}{(n.p \ n.u)^\imath} Tr[\not{\not{p}} (\not{\mu} + m_e) \not{\not{p}} (\not{p} + m_e)] \right\}, \quad (31)$$

چون رد تعداد فرد ماتریس‌های دیراک در چهار بعد صفر است، خواهیم داشت:

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = -\frac{m^\imath}{\imath} e^\imath n^\nu n^\rho \int \frac{d^4 p}{(\imath\pi)^4} \frac{1}{(p^\imath - \mu^\imath)(u^\imath - \mu^\imath)} \times \left(\frac{1}{n.(u+q)} + \frac{1}{n.(u+s)} \right) \left\{ \frac{1}{n.p \ n.u} \times Tr[\gamma^\mu \not{\not{p}} \not{\not{p}} (\not{p} + m_e) \gamma^\mu \not{\not{p}}] + \frac{m^\imath}{\imath} \frac{n^\mu}{(n.p \ n.u)^\imath} Tr[\not{\not{p}} \not{\not{p}} \not{\not{p}} (\not{p} + m_e)] \right\}, \quad (32)$$

که در آن $u = p - k$ است. با ساده کردن رابطهٔ (۳۲) داریم:

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = -\imath m^\imath e^\imath n^\nu n^\rho \int \frac{d^4 p}{(\imath\pi)^4} \times \frac{1}{(p^\imath - \mu^\imath)[(p-k)^\imath - \mu^\imath]} \times \frac{1}{n.p \ n.(p-k)} [A^\mu + {}^\mu A] \times \left(\frac{1}{n.(p-k+q)} + \frac{1}{n.(p-k+s)} \right). \quad (33)$$

کمیات A^μ و B^μ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^\mu = -(n.p)k^\mu + (k.p)n^\mu - p^\imath n^\mu - (n.k)p^\mu + \imath(n.p)p^\mu,$$

$${}^\mu A = \mu^\imath n^\mu. \quad (34)$$

ین مرحله، با استفاده از تجزیهٔ کسرها به شکل زیر:

$$\frac{1}{n.(p+q_i) \ n.(p+q_j)} = \frac{1}{n.(q_i - q_j)} \times \left(\frac{1}{n.(p+q_j)} - \frac{1}{n.(p+q_i)} \right). \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho} = & \gamma e^\tau m^\tau n^\mu n^\nu n^\rho \\ & \left\{ -\gamma \left(\frac{1}{n.k} + \frac{1}{n.q} + \frac{1}{n.s} \right) \right. \\ & + \frac{\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)}}{n.(s+k)} + \frac{\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)}}{n.(s+q)} \\ & \left. + \frac{\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)}}{n.(q+k)} + \frac{\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)}}{n.(q+s)} \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

که I و $H_i^{(\pm)}$ برابرند با:

$$\begin{aligned} I & \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^\tau - \mu^\tau)(n.p)} = 0, \\ H_i^{(\pm)} & = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p \pm q_i)^\tau - \mu^\tau)(n.p)}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (47)$$

اما به کمک نسخه مندلستام-لیبرندت، می توان نشان داد:

$$H_i^{(-)} = -H_i^{(+)}. \quad (48)$$

سرانجام با قرار دادن $H_i^{(\pm)}$ در $\Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho}$ ، دامنه این نمودار نیز صفر به دست می آید.

$$\Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (49)$$

با در نظر گرفتن نتایج به دست آمده در روابط (۲۸)، (۴۲) و (۴۹)، نتیجه می گیریم دامنه کل مربوط به تابع سه-نقطه‌ای فوتون در VSR-QED چهار بعدی صفر است.

$$\Pi^{\mu\nu\rho} = \Pi_{(a+b)}^{\mu\nu\rho} + \Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} + \Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (50)$$

این نتیجه در VSR-QED سه بعدی نیز صفر به دست آمده است [۲۵]. در واقع، در روش اختلالی تنها تفاوت محاسباتی در فضا-زمان‌های ۱+۲ و ۱+۳ بعدی در محاسبه رد ماتریس‌های دیراک است. رد تعداد فردی از ماتریس‌های دیراک در ۱+۲ بعد بر خلاف ۱+۳ بعد صفر نیست. همچنین ضریب عددی که در رد تعداد زوجی از ماتریس‌های دیراک ظاهر می شود در ابعاد ۱+۲ و ۱+۳ متفاوت است. اما با وجود این تفاوت‌ها، همچنان نتایج اختلالی مربوط به دامنه کل توابع فرد-نقطه‌ای یکسان به دست آمده و صفر است.

با قرار دادن نتیجه بالا در رابطه (۳۶)، مقدار کل دامنه نمودار (c) برابر است با:

$$\Pi_{(c)}^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (42)$$

تا این مرحله دامنه کل ۳ نمودار اول صفر شد. حال دامنه آخرین نمودار را بررسی می کنیم.

۳.۲.۳. محاسبه دامنه نمودار (d)

دامنه متناظر با نمودار (d) با توجه به شکل ۳ به صورت زیر داده می شود:

$$\Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho} = -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr [S(p) \Sigma^{\mu\nu\rho}(p, p, k, q, s)]. \quad (43)$$

بعد از جایگذاری رأس $\Sigma^{\mu\nu\rho}$ و انتشارگر $S(p)$ ، داریم:

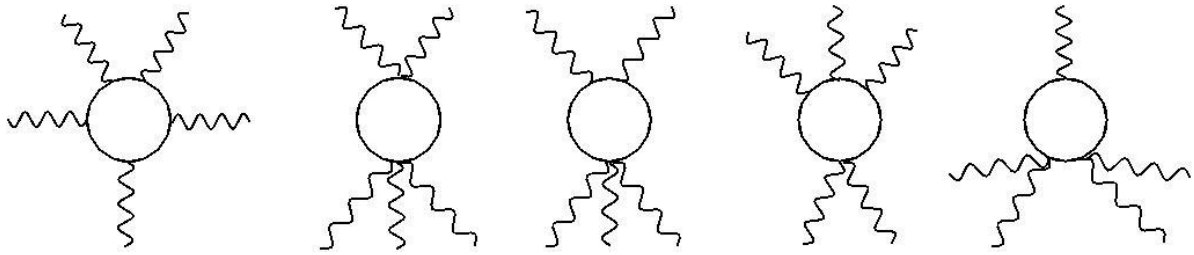
$$\begin{aligned} \Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho} = & -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-ie^\tau m^\tau}{2} Tr \left[\frac{i(\not{p} + m_e) \not{x} n^\mu n^\nu n^\rho}{p^\tau - \mu^\tau} \right. \\ & \times \left[\left(\frac{1}{n.(p+k)} + \frac{1}{n.(p+q)} \right) \frac{1}{n.(p+k+q)} \right. \\ & + \left(\frac{1}{n.(p+k)} + \frac{1}{n.(p+s)} \right) \frac{1}{n.(p+k+s)} \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{n.(p+q)} + \frac{1}{n.(p+s)} \right) \frac{1}{n.(p+q+s)} \right] \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

با اعمال ردگیری و انجام ساده‌سازی‌های لازم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \Pi_{(d)}^{\mu\nu\rho} = & \gamma e^\tau m^\tau n^\mu n^\nu n^\rho \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^\tau - \mu^\tau)(n.p)} \\ & \times \left(\frac{1}{n.(p+k)n.(p-s)} + \frac{1}{n.(p+k)n.(p-q)} \right. \\ & + \frac{1}{n.(p+q)n.(p-s)} + \frac{1}{n.(p+q)n.(p-k)} \\ & \left. + \frac{1}{n.(p+s)n.(p-q)} + \frac{1}{n.(p+s)n.(p-k)} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

که در آن برای ساده‌نویسی از رابطه پایستگی انرژی-تکانه $k + q + s = 0$ استفاده شده است. با دو بار استفاده از روش تفکیک کسرها، در نهایت عبارت (۴۵) را بر حسب

انتگرال‌های I و $H_i^{(\pm)}$ می‌نویسیم.



شکل ۴. نمودارهای فاینمن تابع پنج-نقطه‌ای فوتون در حد تک-حلقه.

۴. بررسی غیر اختلالی ناوردایی همیوگ باری در حد

کوانتومی

همان طور که می‌دانیم، کنش QED معمولی در حد درختی (کلاسیک) تحت تبدیل همیوگ باری ناورداست، همچنین صفر شدن دامنه کل نمودارهای با تعداد فرد پای فوتونی نشانگر برقراری تقارن همیوگ باری در حد کوانتومی است. اما با یک اثبات غیر اختلالی می‌توان دید که این صفر شدن دامنه واقعاً در مورد نمودارهای با پای فرد فوتون رخ داده و نیازی به اثبات اختلالی از طریق محاسبه دامنه فاینمن نیست. قضیه فری بیان می‌کند که مقدار چشمداشتی خلأ برای تعداد فرد چگالی جریان برابر صفر است. یعنی داریم:

$$\langle \Omega | T [j^\mu(x_1) \dots j^{\mu_{n+1}}(x_{n+1})] | \Omega \rangle = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (51)$$

که $|\Omega\rangle$ ویژه حالت خلأ است. مروری بسیار کوتاه بر اثبات رابطه فوق خواهیم داشت. از آنجایی که خلأ تحت تبدیل همیوگ باری C ناوردا است، داریم:

$$C |\Omega\rangle = |\Omega\rangle, \quad \langle \Omega | C^{-1} = \langle \Omega |. \quad (52)$$

از طرفی چگالی جریان j^μ تحت C به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(j^\mu)^C = C j^\mu(x) C^{-1} = -j^\mu. \quad (53)$$

حال مقدار چشمداشتی خلأ تعداد فردی از j^μ ها را در نظر گرفته و رابطه $C^{-1}C = 1$ را بین جریان‌ها درج می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T [j^\mu(x_1) \dots j^{\mu_{n+1}}(x_{n+1})] | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T [C^{-1} C j^\mu(x_1) C^{-1} C \dots C^{-1} C j^{\mu_{n+1}}(x_{n+1}) C^{-1} C] | \Omega \rangle \\ &= (-1)^{n+1} \langle \Omega | T [j^\mu(x_1) \dots j^{\mu_{n+1}}(x_{n+1})] | \Omega \rangle \\ &= -\langle \Omega | T [j^\mu(x_1) \dots j^{\mu_{n+1}}(x_{n+1})] | \Omega \rangle \quad (54) \end{aligned}$$

صفر شدن دامنه کل تابع سه-نقطه‌ای نشان می‌دهد که تقارن همیوگ باری در این بخش حفظ شده است. به عبارت دیگر، این دامنه به طور مؤثر توصیف‌گر رأس سه فوتونی با ضریب جفت شدگی g_{eff} است که تحت C به صورت $g_{eff} A_\mu A_\nu A_\rho \xrightarrow{C} -g_{eff} A_\mu A_\nu A_\rho$ تبدیل شده و ناقص تقارن C است. اما طبق محاسبات ما $g_{eff} = 0$ است و در نتیجه تقارن همیوگ باری برقرار است.

۳.۳. تابع پنج-نقطه‌ای فوتون

نمودارهای تابع پنج-نقطه‌ای فوتون در مدل VSR-QED در شکل ۴ رسم شده است. طبق شکل ۴، علاوه بر نمودار پنج ضلعی در سمت چپ (که در نظریه QED معمولی نیز وجود دارد) نمودارهای ناشی از رأس‌های برهم‌کنشی غیر موضعی نیز به تابع ۵-نقطه‌ای سهم می‌دهند. با توجه به این که ضرایب رأس‌های غیر موضعی در نمودارهای جدید طولانی هستند، قطعاً محاسبه دامنه کل این نمودارها بسیار حجیم خواهد بود. بنابراین از آوردن جزئیات این محاسبه صرف‌نظر می‌کنیم. هر چند به لحاظ فیزیکی انتظار داریم که دامنه نمودار پنج ضلعی اول با تمام جایگشت‌های ممکنه صفر شده و دامنه هر یک از چهار نمودار بعدی (که به طور خالص از VSR می‌آیند) نیز مستقلاً صفر شود.

با توجه به افزایش حجم محاسبات دامنه کل با افزایش تعداد پاهای خارجی فوتون، در بخش بعدی سعی می‌کنیم یک اثبات غیر اختلالی برای بررسی ناوردایی همیوگ باری در حد کوانتومی ارائه دهیم.

در نتیجه داریم:

$$\langle \Omega | T [j^\mu(x_1) \dots j^{\mu_{n+1}}(x_{n+1})] | \Omega \rangle = 0. \quad (55)$$

آیا این اثبات غیر اختلالی در مورد مدل VSR-QED نیز برقرار است؟ جهت بررسی این مسئله، ابتدا نیاز است رفتار چگالی جریان در این چارچوب را تحت C مطالعه کنیم. شکل چگالی جریان به صورت زیر داده می‌شود [۲۴]:

$$J^\mu = j^\mu + j_{VSR}^\mu. \quad (56)$$

عبارت $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ چگالی جریان معمولی و j_{VSR}^μ هم با رابطه زیر معرفی می‌شود:

$$j_{VSR}^\mu = \frac{m^\nu}{2} \left(\frac{1}{n.D^\dagger} \bar{\psi} \right) \gamma^\nu n^\mu \left(\frac{1}{n.D} \psi \right) = \frac{m^\nu}{2} n^\mu n_\nu \Upsilon^\nu, \quad (57)$$

که $\Upsilon^\nu \equiv \left(\frac{1}{n.D^\dagger} \bar{\psi} \right) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} \psi \right)$ تعریف شده است. همان طور که انتظار داریم در حد $m \rightarrow 0$ ، چگالی جریان j_{VSR}^μ حذف می‌شود. از آنجایی که رفتار J^μ تحت تبدیل C مشخص است، برای تعیین رفتار J^μ تحت C صرفاً کافی است نحوه تبدیل j_{VSR}^μ بررسی شود. برای این منظور، ابتدا جملات غیر موضعی در Υ^ν را بسط اختلالی می‌دهیم. با توجه به این که بسط $\frac{1}{n.D^\dagger}$ مشابه بسط $\frac{1}{n.D}$ در بخش ۱.۲ است، عبارت Υ^ν به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \Upsilon^\nu &= \left(\frac{1}{n.D} - ie \frac{1}{n.D} n.A \frac{1}{n.D} \right. \\ &\quad \left. - e^\nu \frac{1}{n.D} n.A \frac{1}{n.D} n.A \frac{1}{n.D} + \dots \right) \bar{\psi} \gamma^\nu \\ &\quad \times \left(\frac{1}{n.D} + ie \frac{1}{n.D} n.A \frac{1}{n.D} \right. \\ &\quad \left. - e^\nu \frac{1}{n.D} n.A \frac{1}{n.D} n.A \frac{1}{n.D} + \dots \right) \psi. \quad (58) \end{aligned}$$

هر چند تعداد جملات بسط بی‌شمار است اما با افزایش توان e کوچک‌تر می‌شوند. همان طور که در بخش دوم در مورد همگرایی سری رابطه (۵) نیز اشاره شد، در اینجا تأکید می‌کنیم که بسط فوق به دلیل کوچک بودن ضریب جفت شدگی e همگراست. حاصل ضرب دو پرانتز فوق بر حسب توان‌های

مختلف e است که ما به جملات از مرتبه e^0 و e^1 اکتفا کرده و رفتار آنها را تحت تبدیل C بررسی می‌کنیم. اولین جمله بسط اختلالی Υ^ν از مرتبه e^0 را Υ_0^ν و دومین جمله بسط Υ^ν از مرتبه e^1 را Υ_1^ν می‌نامیم که مقادیر آنها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Upsilon_0^\nu &\equiv \left(\frac{1}{n.D} \bar{\psi} \right) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} \psi \right), \\ \Upsilon_1^\nu &\equiv ie \left(\left(\frac{1}{n.D} \bar{\psi} \right) \gamma^\nu \frac{1}{n.D} (n.A \frac{1}{n.D} \psi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n.D} (n.A \frac{1}{n.D} \bar{\psi}) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} \psi \right) \right). \quad (59) \end{aligned}$$

حال تبدیل همیوگ بار Υ_0^ν و Υ_1^ν را بررسی می‌کنیم. به کمک روابط (۹) و (۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} (\Upsilon_0^\nu)^C &\equiv \left(\frac{1}{n.D} \bar{\psi}^C \right) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} \psi^C \right) \\ &= - \left(\frac{1}{n.D} \psi'^C C^{-1} \right) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} C \bar{\psi}' \right) \\ &= \left(\frac{1}{n.D} \psi' \right) (\gamma^\nu)' \left(\frac{1}{n.D} \bar{\psi}' \right) \quad (60) \end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت پادجاب‌جایی میدان‌های فرمیونی، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$(\Upsilon_0^\nu)^C = -\Upsilon_0^\nu \quad (61)$$

تبدیل همیوگ بار جمله بعدی نیز به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} (\Upsilon_1^\nu)^C &= ie \left\{ \left(\frac{1}{n.D} \bar{\psi}^C \right) \gamma^\nu \frac{1}{n.D} (n.A^C \frac{1}{n.D} \psi^C) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n.D} (n.A^C \frac{1}{n.D} \bar{\psi}^C) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} \psi^C \right) \right\}. \quad (62) \end{aligned}$$

ابتدا جمله اول را بررسی می‌کنیم. با توجه به $A_\mu^C = -A_\mu$ داریم:

$$\begin{aligned} (\Upsilon_1^\nu)_1^C &= -ie \left(\frac{1}{n.D} \psi' \right) (\gamma^\nu)' \frac{1}{n.D} (n.A \frac{1}{n.D} \bar{\psi}') \\ &= +ie \frac{1}{n.D} (n.A \frac{1}{n.D} \bar{\psi}) \gamma^\nu \left(\frac{1}{n.D} \psi \right) \quad (63) \end{aligned}$$

نتیجه به دست آمده قرینه جمله دوم در رابطه (۵۹) است یعنی $(\Upsilon_1^\nu)_1^C = -(\Upsilon_1^\nu)_1$. به همین ترتیب اگر جمله دوم در (۶۲) را بررسی کنیم به قرینه جمله اول (۵۹) می‌رسیم یعنی $(\Upsilon_1^\nu)_1^C = -(\Upsilon_1^\nu)_1$. بنابراین:

$$(\Upsilon_1^\nu)^C = -[(\Upsilon_1^\nu)_1 + (\Upsilon_1^\nu)_1] = -\Upsilon_1^\nu \quad (64)$$

برقراری قضیه فری از منظر کنش مؤثر فوتون به معنای عدم برهم‌کنش مؤثر تعداد فردی از فوتون‌ها در هر بعدی است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی تقارن همیوگ باری در نظریه الکتروپدینامیک کوانتومی چهار بعدی با تقارن $SIM(2)$ در چارچوب نسبیت خیلی خاص پرداختیم. ابتدا کنش این مدل را در حد درختی (کلاسیک) تحت تبدیل همیوگ بار بررسی کرده و نشان دادیم که تقارن همیوگ باری برقرار است. سپس به مطالعه این تقارن در حد حلقه (کوانتومی) پرداختیم. برای این منظور، با استفاده از روش انتگرال مسیر، روی درجات آزادی فرمیونی انتگرال‌گیری کرده و ساختار کلی کنش مؤثر فوتون را به شکل یک سری به دست آوردیم. در ادامه، با تمرکز بر جملات با تعداد فرد پای خارجی فوتون، به محاسبه دقیق توابع یک و سه- نقطه‌ای فوتون ($n = 1, 3$) در حد تک-حلقه پرداخته و در مورد تابع پنج نقطه‌ای ($n = 5$) نیز بحث کیفی انجام شد.

مقدار دامنه تابع تک-نقطه‌ای که فقط شامل یک نمودار حلقه بود صفر شد. تابع سه-نقطه‌ای هم شامل چهار نمودار بود که دو نمودار مثلثی مشابه نمودارهای QED معمولی بوده و مجموع دامنه‌شان صفر شد. دو نمودار دیگر نیز به طور خالص از نسبیت خیلی خاص نشأت گرفته بودند که دامنه تک تک آنها مستقلاً صفر شد. در نهایت دامنه تابع سه-نقطه‌ای فوتون صفر به دست آمد. صفر شدن دامنه کل توابع یک و سه-نقطه‌ای نشان داد که تقارن همیوگ باری حفظ شده است؛ چرا که نمودارهای مربوطه به طور مؤثر توصیف‌گر رأس‌های یک و سه فوتونی بودند که در صورت صفر نبودن، تقارن همیوگ باری نقض می‌شد.

در ادامه، به بررسی کیفی تابع ۵-نقطه‌ای فوتون پرداختیم که شامل نمودارهای بیشتری بوده و از آوردن جزئیات محاسبه صرف‌نظر کردیم؛ هر چند به لحاظ فیزیکی انتظار داریم که دامنه کل صفر شود.

از آنجایی که کنش این مدل در حد درختی (کلاسیک) ناوردای همیوگ بار بود، با صفر شدن دامنه توابع یک و سه-نقطه‌ای

می‌توان دید اگر بقیه جملات بسط در مراتب بالاتر ثابت جفت شدگی e را نیز در نظر بگیریم، در نهایت خواهیم داشت:

$$(J_{VSR}^{\mu})^C = -J_{VSR}^{\mu}. \quad (65)$$

با توجه به روابط (۵۳)، (۵۶) و (۶۵)، تبدیل همیوگ باری چگالی جریان در مدل VSR-QED به صورت زیر است:

$$(J^{\mu})^C = (j^{\mu} + j_{VSR}^{\mu})^C = -J^{\mu} \quad (66)$$

در این مرحله، مقدار چشمداشتی خلأ تعداد فردی از J^{μ} ‌ها را در نظر گرفته و رابطه $C^{-1}C = 1$ را بین جریان‌ها درج می‌کنیم.

$$\begin{aligned} & \langle \Omega | T [J^{\mu_1}(x_1) \dots J^{\mu_{n+1}}(x_{\tau_{n+1}})] | \Omega \rangle \\ &= \langle \Omega | T [C^{-1}C J^{\mu_1}(x_1) C^{-1}C \dots C^{-1}C J^{\mu_{n+1}}(x_{\tau_{n+1}}) C^{-1}C] | \Omega \rangle \\ &= (-1)^{\tau_{n+1}} \langle \Omega | T [J^{\mu_1}(x_1) \dots J^{\mu_{n+1}}(x_{\tau_{n+1}})] | \Omega \rangle \\ &= -\langle \Omega | T [J^{\mu_1}(x_1) \dots J^{\mu_{n+1}}(x_{\tau_{n+1}})] | \Omega \rangle \quad (67) \end{aligned}$$

سرانجام خواهیم داشت:

$$\langle \Omega | T [J^{\mu_1}(x_1) \dots J^{\mu_{n+1}}(x_{\tau_{n+1}})] | \Omega \rangle = 0. \quad (68)$$

قبلاً اشاره شد که تقارن همیوگ باری در حد کوانتومی (قضیه فری) در مدل الکتروپدینامیک کوانتومی سه بعدی در چارچوب نسبیت خیلی خاص برقرار است [۲۵]. اکنون، محاسبات ما نشان می‌دهد که این قضیه در چهار بعد نیز برقرار است. هر چند اثبات غیر اختلالی قضیه فری در مقاله [۲۵] بررسی نشده است اما نتایج محاسباتی ما نشان می‌دهد که قضیه فری با دو روش اختلالی و غیر اختلالی در چارچوب نسبیت خیلی خاص در فضا-زمان‌های $1+2$ و $1+3$ بعدی برقرار است.

لازم به ذکر است بر خلاف اثبات اختلالی قضیه فری که بعد فضا-زمان صریحاً در محاسبات ظاهر شد، در هیچ یک از روابط مربوط به اثبات غیر اختلالی بعد فضا-زمان ظاهر نشد. از آنجایی که تبدیل همیوگ باری، برخلاف تبدیلات پاریته و وارونی زمان، یک تبدیل داخلی است که فقط میدان‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد (و نه فضا-زمان)، به لحاظ شهود فیزیکی هم انتظار داشتیم که این تقارن مستقل از بعد فضا-زمان در چهار بعد نیز برقرار باشد.

چون میدان فوتون، مستقل از بعد فضا-زمان، ویژه حالت عملگر همیوگ باری با ویژه مقدار -1 است، تعبیر فیزیکی

پوست (الف):

رد ماتریس‌های دیراک در ۴ بعد:

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\nu) = 4(\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}),$$

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0,$$

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\sigma) = 4\eta_{\mu\sigma}.$$

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}} \gamma^{\mu_n})$$

$$= (-1)^n \text{tr}(\gamma^{\mu_n} \gamma^{\mu_{n-1}} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}).$$

نسخه مندلستام-لیبرندت:

$$\int d^d q \frac{1}{(q^\tau + \tau q \cdot p - m^\tau)^a} \frac{1}{(nq)^b}$$

$$= (-1)^{a+b} i \pi^{\frac{d}{2}} (-\tau)^b \frac{\Gamma(a+b - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$\times (\bar{n} \cdot p)^b \int_0^1 dt t^{b-1} \frac{1}{\Delta^{a+b-\frac{d}{2}}},$$

$$\Delta = m^\tau + p^\tau - \tau(n \cdot p)(\bar{n} \cdot p)t$$

انتظار ما این بود که در بقیه توابع فرد- نقطه‌ای هم، دامنه نهایی صفر شود. در بخش آخر مقاله، با ارائه یک اثبات غیر احتمالی، ناوردایی همیوگ باری را در حد کوانتومی در چارچوب نسبت خیلی خاص مطالعه کردیم. برای این منظور، نخست رفتار چگالی جریان مربوطه را تحت تبدیل C بررسی کرده و نشان دادیم $(J^\mu)^C = -J^\mu$ است. سپس با استفاده از این ویژگی ثابت کردیم مقدار چشمداشتی خلأ تعداد فردی از جریان‌ها صفر بوده و بنابراین تقارن C در حد کوانتومی نیز برقرار است. پس همان طور که تقارن همیوگ باری در الکترودینامیک کوانتومی با تقارن فضا-زمانی لورنتس در حد کوانتومی به طور کامل حفظ می‌شود، در الکترودینامیک کوانتومی با تقارن فضا-زمانی SIM(2) نیز حفظ شده و ناهنجاری همیوگ باری در چهار بعد رخ نمی‌دهد.

مراجع

1. S Weinberg, *PoS CD 09* (2009) 001.
2. G Amelino-Camelia, *Living Rev. Relativ.* **16**, (2013) 5.
3. V A Kostelecky and S Samuel, *Phys. Rev. D* **39** (1989) 683.
4. S M Carroll, J A Harvey, V A Kostelecky, C D Lane and T Okamoto, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 141601.
5. T. Jacobson, S. Liberati and D Mattingly, *Ann Phys.* **321** (2006) 150.
6. V A Kostelecky, N Russell, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 11.
7. D Colladay, V A Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 6760.
8. D Colladay, V A Kostelecky, *Phys. Rev. D* **58** (1998) 116002.
9. G Cohen and S L Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 021601.
10. G Cohen and S L Glashow, hep-ph/0605036.
11. Y Fukuda et al., *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998).
12. Rabindra N Mohapatra and Goran Senjanovic, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 912.
13. A C Nayak and P Jain, *Phys. Rev. D* **96**,7 (2017) 075020, 1610.
14. G Cohen and D Z Freedman, *JHEP* **07** (2007) 039.
15. S Cheon, C Lee and S J Lee, *Phys. Lett. B* 679 (2009) 73.
16. J Vohanka, *Phys. Rev. D* **85** (2012) 105009.
17. J Alfaro, P Gonzalez and R Avila, *Phys. Rev. D* **91**(2015) 105007.
18. R Bufalo and M Ghasemkhani, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 065024.
19. R Bufalo and T Cardoso e Bufalo, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 125017.
20. R. Bufalo and M Ghasemkhani, *Mod. Phys. Lett. A* **37** (2022) 2250002.
21. F Santos and Faqir C Khanna, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 703.
22. J Alfaro, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 075011.
23. F Santos and F C. Khanna, *Eur. Phys. J. Plus* **137** (2022) 101.
24. J Alfaro and A Soto, *Phys. Lett. B* **797** (2019) 134923.
25. R Bufalo, M Ghasemkhani, Z Haghgouyan, and A Soto, *Eur. Phys. J. C* **80** (2020) 1129.
26. Z Haghgouyan, M Ghasemkhani, R Bufalo, and A Soto, *Eur. Phys. J. Plus* **137** (2022) 732.
27. M E Peskin and D V Schroeder, "An introduction to quantum field theory", Addison-Wesley (1995).
28. W H Furry, *Phys. Rev.* **51** (1937) 125.
29. J Alfaro, *Phys. Rev. D* **93**, 6 (2016) 065033.