

## پدیده انتقال در زنجیره آیزینگ: مقایسه رویکرد موضعی با رویکرد جمعی

اعظم مانی

دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران

پست الکترونیکی: mani.azam@ut.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۱۸؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۱۱/۱۹)

### چکیده:

ما به بررسی پدیده انتقال انرژی و اسپینی در یک زنجیره آیزینگ یک بعدی که دو انتهایش به دو حمام گرمایی مجزا در دماهای متفاوت متصل است، می‌پردازیم. با لحاظ کردن تقریب برون مارکوف و فرض اندرکنش ضعیف، تحول سامانه را از نوع مارکوف در نظر گرفته و با استفاده از رویکرد جمعی، صراحتاً عملگرهای لیندبلاد را به دست آورده، حالت پایای سامانه را به دست می‌آوریم. همچنین دینامیک انرژی و برانگیختگی‌ها در دو سر زنجیره را مطالعه می‌کنیم. سپس همین مسئله را با رویکرد موضعی پدیده شناختی بررسی کرده و نشان می‌دهیم که حالت پایا و همچنین نتایج جریان انرژی و اسپینی به دست آمده از دو رویکرد یکسان نیستند.

**واژه‌های کلیدی:** تقریب برون مارکوف - تحول مارکوفی - رویکرد سراسری - رویکرد موضعی

### ۱. مقدمه

بسته و در نتیجه پدیده انتقال در این سامانه‌ها، تنها به حالت اولیه سامانه و نحوه اندرکنش جایگاه‌ها<sup>۱</sup> با یکدیگر وابسته است و با استفاده از معادله شرودینگر، با یک تحول هم‌دوس یکانی توصیف می‌شود. اما در مورد سامانه‌های باز که با اطراف برهمکنش دارند، بحث پیچیده‌تر است. در یک سامانه باز، انتقال کوانتومی بین جایگاه‌های همبسته، نه تنها به تحول هم‌دوس سامانه مرتبط است، بلکه به نحوه اندرکنش جایگاه‌ها با محیط پیرامونشان نیز ربط دارد (پدیده‌های اتلاف و واهلش). به طور کلی برای مطالعه سامانه‌های باز باید تحول هم‌زمان سامانه و محیط را مورد بررسی قرار داد و نهایتاً با رد گرفتن روی درجات آزادی محیط، تحول غیر یکانی برگشت‌ناپذیر سامانه به صورت یک نگاشت کاملاً مثبت رد نگهدار، به دست می‌آید [۶]. در حالت کلی این نگاشت همیشه قابل ساده‌سازی

پدیده انتقال انرژی یا انتقال الکترون و برانگیختگی در یک سامانه فیزیکی، مسئله‌ای است که اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته است. شناخت منشأ میکروسکوپی و سپس چگونگی مهندسی این پدیده، می‌تواند در ساخت و طراحی بسیاری از وسیله‌ها که بر مبنای انتقال کار می‌کنند - مانند دیودهای حالت جامدی [۱ و ۲]، سلول‌های خورشیدی پر بازده [۳] و همچنین اتم‌های سرد [۴] و تله‌های یونی [۵] - مؤثر باشد.

پدیده انتقال در سامانه‌های فیزیکی از یک منظر می‌تواند به دو مبحث تقسیم شود. یکی انتقال در سامانه‌های بسته است و دیگری انتقال در سامانه‌های به اصطلاح باز، یعنی آنها که با محیط اطراف برهمکنش دارند. تحول کوانتومی یک سامانه

می‌شود، بایستی با استفاده از کدام رویکرد به دست آمده باشد؟ نتایج پیش‌بینی‌های کدام رویکرد به واقعیت نزدیک‌تر است؟ آیا با تغییر دادن پارامترها، رویکرد موضعی باید حد مشخصی از رویکرد جمعی باشد یا خیر؟ برای پاسخ این سؤالات در جامعه علمی هنوز اجماع واحدی وجود ندارد و حتی برخی پژوهش‌ها بیان می‌کنند که برای توصیف صحیح سامانه‌ها باید ترکیبی از هر دو رویکرد را لحاظ کرد [۱۴].

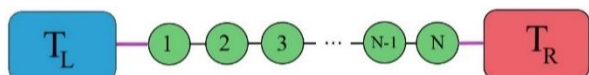
در این مقاله، ما قصد داریم که ماهیت ناموضعی بودن و اهمیت ناموضعی لحاظ کردن عملگرهای لیندبلاد را بیان کنیم. برای نشان دادن اهمیت ذات ناموضعی عملگرهای لیندبلاد، ما یک زنجیره آیزینگ یک بعدی در نظر می‌گیریم که دو انتهایش به دو حمام گرمایی متصل است (شکل ۱). سپس با استفاده از روشی که در [۷] آمده است، و با محاسبه دقیق جملات انتقال لمب و عملگرهای لیندبلاد، نشان می‌دهیم که این جملات به صورت موضعی بر روی جایگاه‌های ابتدا و انتهای زنجیره (که در تماس مستقیم با محیط‌اند) نیستند. سپس جریان انرژی و جریان اسپینی در زنجیره را محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم مستقل از دمای حمام‌های گرمایی ابتدا و انتهای زنجیره، هیچ انتقال انرژی در سامانه صورت نمی‌گیرد و این زنجیره با هامیلتونی حاکمش، رفتار عایق گونه دارد. به طور دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که با وجود حمام‌های گرمایی، اگر سامانه در حالت ابتدایی اش فقط برانگیختگی در جایگاه اولش داشته باشد، این برانگیختگی فقط می‌تواند به جایگاه دوم انتقال پیدا کند و هیچ انتقالی در باقی سراسر زنجیره رخ نخواهد داد. علاوه بر این، محاسبات ما نقش کلیدی هامیلتونی خود سامانه در پدیده انتقال را روشن می‌کند، در واقع پدیده انتقال در یک سامانه، فقط می‌تواند توسط محیط اطراف، تقویت شود و محیط، القا کننده انتقال در یک سامانه نیست [۱۵]. به عبارت دیگر اگر هامیلتونی یک سامانه، انتقال انرژی در آن را ایجاد نکند، این انتقال توسط محیط گرمایی اطراف به وجود نمی‌آید و علت این امر ارتباط عمیقی است که بین جملات انتقال لمب و عملگرهای لیندبلاد از یک طرف، و تحول همدوس و هامیلتونی خود سامانه از سوی دیگر، وجود دارد. مدلی که در این مقاله ما مورد بررسی قرار داده‌ایم، به همراه مدل ارائه شده در [۱۶]

و حل دقیق نیست اما زمانی که اندرکنش سامانه و محیط اطرافش به قدر کافی ضعیف باشد و شرایط تقریب بورن-مارکوف برقرار باشد، معادله دینامیکی سامانه به صورت یک معادله دیفرانسیل، موسوم به معادله مادر، ساده می‌شود [۷ - ۹]. معادله مادر، علاوه بر تحول همدوس سامانه، جملات انتقال لمب و عملگرهای اتلاف لیندبلاد<sup>۱</sup> را نیز در بر دارد [۷ - ۹].

شکل کلی و بسته جملات انتقال لمب و عملگرهای لیندبلاد به سادگی با انجام محاسبات مستقیم به دست می‌آید. اما در حالت کلی، به دست آوردن روابط صریح آنها و سپس حل کردن معادله مادر ممکن است پیچیده باشد. در واقع درجه سختی مسئله به‌طور کامل به هامیلتونی سامانه و محیط، و همچنین اندرکنش بین آنها وابسته است. علت سختی محاسبات این است که جملات لمب و عملگرهای لیندبلاد به طیف هامیلتونی خود سامانه وابسته هستند و این طور نیست که همیشه حل تحلیلی تحول همدوس سامانه در دسترس باشد، یا گاهی در دسترس هست ولیکن به شدت پیچیده یا تبهگن است. در حالت کلی، عملگرهای لیندبلاد می‌توانند ساختار جمعی داشته باشند، یعنی به شکل عملگرهایی باشند که نه تنها بر روی بخشی از سامانه که در تماس مستقیم با محیط است، اثر می‌کنند، بلکه بر روی بخش‌هایی که در تماس مستقیم با محیط نیستند نیز، اثر دارند. در این بین در بسیاری از کارها دیده می‌شود که با استفاده از تحلیل‌های پدیده‌شناختی، عبارت‌هایی را برای عملگرهای لیندبلاد در نظر می‌گیرند [۲، ۱۰ و ۱۱]. در رویکرد پدیده‌شناختی، اثر محیط به صورت عملگرهای لیندبلاد موضعی لحاظ می‌شود، یعنی عملگرها تنها بر روی جایگاه‌هایی اثر می‌کنند که در اندرکنش مستقیم با محیط اطراف هستند و از این‌روست که در رویکرد موضعی، عملگرهای لیندبلاد از هامیلتونی سامانه مورد نظر، مستقل هستند. بر پایه این تحلیل پدیده‌شناختی، در برخی از مقالات در مورد انتقال نامتعارف انرژی که متناقض با قانون انتقال فوریه است، گزارش‌هایی ارائه شده است [۱۲ و ۱۳].

سؤالاتی که مطرح می‌شود از این دسته است که توصیف صحیحی که از تحول یک سامانه و پدیده انتقال در آن ارائه

<sup>۱</sup> Dissipative Lindblad operators



شکل ۱. نمایی از مدل اسپینی: زنجیره اسپینی با تعداد  $N$  ذره، از سمت چپ و راست با دو حمام گرمایی مستقل در ارتباط است.

صورت می توان از تقریبی موسوم به تقریب بورن-مارکوف استفاده کرد [۷].

یکی از روش های متعارف برای استخراج معادله مادر، روش میکروسکوپی است که به طور مبسوط در [۷] توضیح داده شده است ولیکن، در اینجا به منظور پرهیز از طولانی شدن متن، فقط به بیان روابطی که در مقاله استفاده خواهیم کرد، بسنده می کنیم. در این روش، حالت اولیه سامانه و محیط را به صورت

$\rho_{th} \in \mathcal{H}_B$  که  $\rho_{tot}(\circ) = \rho_S(\circ) \otimes \rho_{th}$  در نظر می گیریم حالت محیط است که به صورت حالت گرمایی در دمای  $T = \frac{1}{K\beta}$  در نظر گرفته شده و  $K$  ثابت بولتزمن است.

همچنین هامیلتونی برهمکنش را به صورت

$$H_{int} = \sum_i A_i \otimes B_i, \quad (3)$$

بسط می دهیم، به نحوی که عملگرهای هریتی  $A_i$  روی فضای  $\mathcal{H}_S$  و عملگرهای هریتی  $B_i$  روی فضای  $\mathcal{H}_B$  اثر می کنند.

با در نظر گرفتن تقریب بورن-مارکوف و همچنین تقریب موج چرخان و انجام محاسبات [۷]، تحول دینامیکی سامانه با رابطه زیر داده می شود:

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -i[H_S + H_{LS}, \rho_S(t)] + \quad (4)$$

$$\mathcal{D}[\rho_S(t)] \equiv \mathcal{L}[\rho_S],$$

که در آن  $H_{LS}$ ، هامیلتونی انتقال لمب نامیده می شود و  $H_{LS}$  جمله اتلافی  $\mathcal{D}[0]$  با روابط زیر داده می شوند:

$$H_{LS} = \lambda \sum_{\omega} \sum_{i,j} P_{i,j}(\omega) A_i^\dagger(\omega) A_j(\omega), \quad (5)$$

$$\mathcal{D}[\rho_S(t)] = \lambda \sum_{i,j,\omega} \gamma_{i,j}(\omega) \left( \begin{array}{l} A_j(\omega) \rho_S(t) A_i^\dagger(\omega) - \\ \frac{1}{2} \{ A_i^\dagger(\omega) A_j(\omega), \rho_S(t) \} \end{array} \right), \quad (6)$$

به نحوی که

$$P_{i,j}(\omega) = P.V \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\gamma_{i,j}(\omega')}{2\pi(\omega - \omega')}, \quad (7)$$

نشان می دهند که ماهیت بسیار غیر موضعی معادله مادر، از رفتار غیر موضعی ویژه بردارهای هامیلتونی خود سامانه نشأت می گیرد، یعنی ساختار ویژه بردارهای هامیلتونی سامانه، به صورتی نیست که، بخش هایی از سامانه که در تماس مستقیم با محیط هستند و آنهایی که نیستند، جدا از هم و به صورت ضربی، ظاهر شده باشند. ساختار مقاله بدین صورت است که در بخش بعدی، مروری بر نحوه به دست آوردن معادله مادر و جملات انتقال لمب و عملگرهای لیندبلاد خواهیم داشت. سپس در بخش ۳، مدلی را که در نظر داریم توضیح خواهیم دارد. در بخش ۴ با استفاده از رویکرد جمعی عملگرهای لیندبلاد را محاسبه کرده و جریان های انرژی و اسپینی سامانه را به دست می آوریم. بخش ۵ نیز به بررسی سامانه در رویکرد موضعی می پردازد و نهایتاً در بخش ۶ مقاله را با ارائه جمع بندی به پایان می رسانیم.

## ۲. پیش زمینه

در این بخش سعی داریم فرمول بندی و نشان گذاری های مقاله را بیان کنیم و به طور خلاصه نحوه به دست آوردن معادله مادر - که ما را به سوی رهیافت جمعی رهنمون می سازد - را مرور کنیم.

دینامیک سامانه ای را که در حال برهمکنش با محیط است می توان از روی تحول یکانی سامانه به علاوه محیط اطرافش و نهایتاً رد گرفتن روی درجات آزادی محیط به دست آورد.

$$\rho_S(\circ) \mapsto \rho_S(t) \equiv \text{Tr}_B[\rho_{tot}(t)], \quad (1)$$

که در آن  $\rho_{tot}(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B)$  است و  $\mathcal{H}_B$  و  $\mathcal{H}_S$  به ترتیب فضای هیلبرت سامانه و محیط هستند و  $\mathcal{L}$  بیانگر تبدیلات خطی روی فضای هیلبرت مربوطه است. تحول یکانی کل (یعنی سامانه به علاوه محیط) با هامیلتونی کل توصیف می شود که در حالت عمومی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$H_{tot} = H_S + H_B + \lambda H_{int} \equiv H_* + \lambda H_{int}, \quad (2)$$

در رابطه فوق  $H_S$  هامیلتونی حاکم بر اجزای خود سامانه،  $H_B$  هامیلتونی محیط و  $H_{int}$  هامیلتونی توصیف کننده برهمکنش بین سامانه و محیط است. در رابطه (۲)،  $\lambda$  یک پارامتر حقیقی است که قدرت برهمکنش بین سامانه و محیط را تعیین می کند.

در شرایط اندرکنش ضعیف،  $\lambda$  بسیار کوچک است و در این

$$\langle O(t) \rangle = \text{Tr}(O\rho(t)) = \text{Tr}(Oe^{tL}[\rho(0)]) = \text{Tr}(e^{tL^\dagger}[O]\rho(0)), \quad (12)$$

داده می‌شود. از آنجا که رابطه (۱۲) به ازای تمام حالت‌های اولیه  $\rho(0)$  برقرار است، می‌توان تحول زمانی هر عملگر سامانه را به صورت

$$\frac{\partial}{\partial t} O(t) = L^\dagger[O(t)]. \quad (13)$$

به دست آورد.

بر مبنای این پیش زمینه، در ادامه تفاوت‌های عملگرهای لیندبلاد در رویکرد موضعی و جمعی را خواهیم دید و نشان می‌دهیم که چطور این امر منجر به نتایج متفاوتی در تحول مشاهده‌پذیرهایی همچون جریان اسپینی و جریان انرژی در سامانه‌های اسپینی خواهد شد.

### ۳. مدل

سامانه‌های خطی که دو انتهایشان به دو حمام گرمایی متصلند، به لحاظ نظری بسیار مورد توجه بوده و به صورت آزمایشگاهی نیز قابل پیاده‌سازی هستند [۱۷ و ۱۸]. مطابق شکل ۱، یک سامانه با تعداد  $N$  ذره اسپین  $\frac{1}{2}$  را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار گرفته است و با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H_S = j \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(i+1)} + h \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}, \quad (14)$$

که در آن  $j > 0$  ضریب جفت شدگی همسایه‌های نزدیک و  $h > 0$  بیانگر شدت میدان مغناطیسی است. همچنین  $\sigma_\alpha^{(i)}$  با  $\alpha = x, y, z$  عملگرهای پائولی مربوط به ذره  $i$ -ام هستند. اگر  $|e\rangle$  و  $|g\rangle$  به ترتیب ویژه بردارهای عملگر  $\sigma_z$  با ویژه مقادیر  $+1$  و  $-1$  باشند، هر حالتی به صورت  $|a_1 a_2 \dots a_N\rangle$  و  $a_i \in \{e, g\}$  یک ویژه بردار هامیلتونی فوق خواهد بود و به راحتی می‌توان دید که چنین سامانه‌ای به شدت تبهگن است. برای دیدن تبهگنی کافی است حالتی به صورت  $|a_1 a_2 \dots a_N\rangle$  را در نظر بگیرید که در آن  $e$ ،  $N_e$  بار و  $g$ ،  $N_g$  بار تکرار شده باشد، همچنین تعداد مرزهای بین بلوک‌های  $e$ -های پشت سر هم یا بلوک‌های  $g$ -های پشت سر هم،  $B$  باشد، ویژه انرژی مربوط به چنین حالتی  $(N - 2B - 1)j + (N_e - N_g)h$

و P.V. بیانگر ارزش اصلی انتگرال کوشی و ماتریس مثبت نیمه معین  $\gamma(\omega')$  به صورت

$$\gamma_{i,j}(\omega') = \text{Tr}(B_i(\omega') B_j \rho_{th}), \quad (8)$$

تعریف می‌شود، که در آن  $B_i(\omega')$  ها ویژه عملگرهای  $[H_B, \bullet]$  هستند، یعنی  $[H_B, B_i(\omega')] = -\omega' B_i(\omega')$  در روابط (۵) و (۶)، عملگرهای  $A_i(\omega)$ ، عملگرهای معروف به لیندبلاد هستند و با رابطه

$$A_i(\omega) = \sum_{\epsilon' - \epsilon = \omega} \Pi_\epsilon A_i \Pi_{\epsilon'}, \quad (9)$$

محاسبه می‌شوند. در این رابطه  $\Pi_\epsilon$  عملگر تصویر مربوط به ویژه فضای هامیلتونی سامانه، یعنی  $H_S$ ، با انرژی  $\epsilon$  است و  $\omega$  بیانگر اختلاف ویژه انرژی‌های سامانه است. رابطه (۹) به وضوح وابستگی عملگرهای لیندبلاد به ویژه بردارهای هامیلتونی سامانه و طیف آن را نشان می‌دهد. عموماً وقتی ویژه بردارهای هامیلتونی خود سامانه ناموضعی باشند، یا در بین ویژه مقادیر آن تبهگنی وجود داشته باشد، عملگرهای لیندبلاد هم ناموضعی به دست خواهند آمد و اثر آنها به شکل موضعی بر روی جایگاه‌های مجزا از هم نخواهد بود. در واقع رابطه (۹)، همان رابطه‌ای است که صراحتاً نشان می‌دهد که در نظر گرفتن جملات موضعی پدیده‌شناختی برای عملگرهای لیندبلاد، ممکن است همیشه درست نباشد.

اگر بخواهیم ببینیم که تفاوت دیدگاه موضعی و دیدگاه جمعی در تحول سامانه به چه صورت است، باید تحول زمانی هر عملگر دلخواه از سامانه را داشته باشیم. برای عملگرهای خطی  $X$  و  $Y$  که بر روی فضای هیلبرت  $\mathcal{H}_S$  اثر می‌کنند، رابطه  $\text{Tr}(X \mathcal{L}[Y]) = \text{Tr}(\mathcal{L}^\dagger[X]Y)$  برقرار است، که در آن  $\mathcal{L}^\dagger[0]$ ، الحاقی  $\mathcal{L}$  از رابطه (۴) بوده و

$$\mathcal{L}^\dagger[\bullet] = i[H_S + H_{LS}, \bullet] + \mathcal{D}^\dagger[\bullet], \quad (10)$$

و

$$\mathcal{D}^\dagger[\bullet] = \lambda \sum_{\omega} \sum_{i,j} \gamma_{i,j}(\omega) \left( A_j^\dagger(\omega) \bullet A_i(\omega) - \frac{1}{2} \{A_i^\dagger(\omega) A_j(\omega), \bullet\} \right), \quad (11)$$

بنابراین، برای تمام عملگرهای سامانه، تحول زمانی مقدار چشمداشتی با رابطه

عملگرهای تصویر  $\Pi_\xi$  که در رابطه (۹) تعریف شده‌اند، وجود نخواهد داشت. انجام محاسبات بخش (۲) برای زنجیره اسپینی مورد نظر ما، منجر به روابط زیر خواهد شد:

$$\dot{\rho} = -i[H_{LS} + H_s, \rho] + \sum_{\xi=L,R} \sum_{m=1}^{\nu} \eta_{\xi}(\omega_m) \mathcal{D}_{\xi,m}[\rho], \quad (18)$$

که در آن  $\omega_1$  و  $\omega_2$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\omega_\lambda = 2(h + j), \quad \omega_\nu = 2(h - j), \quad (19)$$

و همچنین  $J_{\xi}(\omega) = (h_{\xi}(\omega))^{\nu}$ ،  $\eta_{\xi}(\omega) := \pi J_{\xi}(\omega)$  و  $\mathcal{D}_{\xi,m}[\bullet] =$

$$\begin{aligned} & (1 + \bar{n}_{\xi}(\omega_m)) \left( A_{\xi}(\omega_m) \bullet A_{\xi}^{\dagger}(\omega_m) - \frac{1}{\nu} \{ A_{\xi}^{\dagger}(\omega_m) A_{\xi}(\omega), \bullet \} \right) \\ & + \bar{n}_{\xi}(\omega) \left( A_{\xi}^{\dagger}(\omega) \bullet A_{\xi}(\omega) - \frac{1}{\nu} \{ A_{\xi}(\omega) A_{\xi}^{\dagger}(\omega), \bullet \} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن  $\bar{n}_{\xi}(\omega) = \frac{1}{e^{\beta_{\xi}\omega} - 1}$  بیانگر متوسط تعداد فونون‌های

حمام  $\xi$  با انرژی  $\omega$  است و  $\beta_{\xi} = \frac{1}{KT_{\xi}}$  و عملگرهای لیندبلاد

به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} A_L(\omega_\lambda) &= 2(\sigma_- \otimes E \otimes \mathbb{1}_{\nu,N}), \\ A_L(\omega_\nu) &= 2(\sigma_- \otimes G \otimes \mathbb{1}_{\nu,N}), \\ A_R(\omega_\lambda) &= 2(\mathbb{1}_{\nu,N-2} \otimes E \otimes \sigma_-), \\ A_R(\omega_\nu) &= 2(\mathbb{1}_{\nu,N-2} \otimes G \otimes \sigma_-), \end{aligned} \quad (21)$$

و  $E = |e\rangle\langle e|$  و  $G = |g\rangle\langle g|$  و  $\mathbb{1}_{s,f}$  بیانگر عملگر واحدی است که بر روی ذرات  $s$  تا  $f$  اثر می‌کند. با انجام محاسبات، هامیلتونی جابه‌جایی لمب نیز به صورت دو بخش که بر روی ذرات ابتدا یا انتهای زنجیره اثر می‌کند به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} H_{LS} &= H_L + H_R, \\ H_{LS} &= (\lambda_1^{(L)} E \otimes E + \lambda_1^{(L)} G \otimes E + \lambda_1^{(L)} G \otimes G + \\ & \lambda_1^{(L)} E \otimes G) \otimes \mathbb{1}_{\nu,N} + \mathbb{1}_{\nu,N-2} \otimes (\lambda_1^R E \otimes E + \\ & \lambda_1^{(R)} E \otimes G + \lambda_1^{(R)} G \otimes G + \lambda_1^{(R)} G \otimes E), \end{aligned} \quad (22)$$

و

خواهد بود. بنابراین تمام حالت‌هایی که تعداد بلوک‌های یکسان  $N_e - N_g$  یکسان دارند، انرژی مشابهی خواهند داشت.

فرض کنید مطابق شکل ۱، سامانه خطی فوق از دو طرفش با دو حمام گرمایی مجزا و مستقل در دماهای  $T_R$  و  $T_L$  برهمکنش می‌کند. هامیلتونی حمام‌ها به صورت

$$H_{\xi} = \int d\omega' \hat{b}_{\xi}^{\dagger}(\omega') \hat{b}_{\xi}(\omega), \quad (15)$$

داده می‌شود که  $\xi = L, R$ ، حمام سمت چپ یا سمت راست را مشخص می‌کند و  $\hat{b}_{\xi}(\omega)$  و  $\hat{b}_{\xi}^{\dagger}(\omega)$  عملگرهای بوزونی حمام‌ها هستند که در رابطه جابه‌جایی اندرکنش سامانه با این دو حمام به صورت

$$\begin{aligned} H_I &= \int d\omega h_L(\omega) (\sigma_+^{(1)} \hat{b}_L(\omega) + \sigma_-^{(1)} \hat{b}_L^{\dagger}(\omega)) \\ &+ \int d\omega h_R(\omega) (\sigma_+^{(N)} \hat{b}_R(\omega) + \sigma_-^{(N)} \hat{b}_R^{\dagger}(\omega)), \end{aligned} \quad (16)$$

توصیف می‌شود، که در آن

$$\sigma_{\pm}^{(n)} = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(n)} + i\sigma_y^{(n)}), \quad (17)$$

عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده ذره  $n$ -ام هستند. رابطه (۱۶) یعنی با ضریب جفت شدگی  $h_L(\omega)$ ، از بین رفتن یک فونون با انرژی  $\omega$  در حمام سمت چپ، منجر به برانگیخته شدن ذره اول می‌شود و با رفتن ذره اول از حالت برانگیخته به حالت پایه، یک فونون با انرژی  $\omega$  در حمام سمت چپ تولید می‌شود. مشابه همین رفتار برای اندرکنش حمام سمت راست با ذره  $N$ -ام نیز وجود دارد.

در ادامه سعی می‌کنیم برای این مدل معادله مادر را برای رویکردهای موضعی و جمعی بنویسیم و صراحتاً ببینیم که تفاوت این دو رویکرد منجر به پیش‌بینی‌های متفاوتی از کمیت‌های فیزیکی مانند حالت پایای سامانه، جریان انرژی یا جریان اسپینی خواهد شد.

#### ۴. رویکرد جمعی

در این بخش معادله مادر برای رویکرد جمعی را به دست خواهیم آورد. برای رویکرد جمعی، روش همان چیزی است که در بخش ۲ توضیح داده شد و هیچ فرض اضافه‌تری به آن افزوده نمی‌شود. به خصوص هیچ ساده‌سازی مضاعفی برای

$$\begin{aligned}
M_{D_{\xi,m}} = & (1 + \bar{n}_{\xi}(\omega_m)) [A_{\xi}(\omega_m) \otimes A_{\xi}(\omega_m) - \frac{1}{\nu} A_{\xi}^{\dagger}(\omega_m) A_{\xi}(\omega) \otimes \mathbb{1}_{\nu N} \\
& - \frac{1}{\nu} \mathbb{1}_{\nu N} \otimes A_{\xi}^{\dagger}(\omega_m) A_{\xi}(\omega)] \\
& + \bar{n}_{\xi}(\omega) [A_{\xi}^{\dagger}(\omega) \otimes A_{\xi}^{\dagger}(\omega) - \frac{1}{\nu} A_{\xi}(\omega) A_{\xi}^{\dagger}(\omega) \otimes \mathbb{1}_{\nu N} \\
& - \frac{1}{\nu} \mathbb{1}_{\nu N} \otimes A_{\xi}(\omega) A_{\xi}^{\dagger}(\omega)],
\end{aligned} \quad (29)$$

از آنجایی که  $[\mathcal{M}_H, \mathcal{M}_D] = 0$  است و  $\mathcal{M}_H$  یک عملگر پادهرمیتی است که فقط منجر به تحول زمانی نوسانی می‌شود، رفتار واهلش و وافازی سامانه فقط با عملگر  $\mathcal{M}_D$  توصیف می‌شود. با استفاده از عملگرهایی که در رابطه (۲۱) آمده است، ماتریس  $\mathcal{M}_D$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$M_D = M_L \otimes I_T \otimes I_R + I_L \otimes I_T \otimes M_R, \quad (30)$$

$M_L$  و  $M_R$  به ترتیب بر روی بخش  $L$  یعنی ذرات (1,2) و بخش  $R$  یعنی ذرات  $(N-1, N)$  اثر می‌کنند و در کل متن این مقاله پانویس 7 بیانگر تمام ذرات میانی از ذره 3 تا ذره  $N-2$  است. در کل مقاله هر کجا که شماره ذرات با پانویس مشخص می‌شود، به منظور کوتاه شدن روابط، از نوشتن نماد ضرب تانسوری پرهیز می‌کنیم. با توجه به ساختاری که  $M_D$  دارد، به سادگی می‌توان دید که ویژه بردارهای آن بر روی بخش‌های  $L$  و  $R$  به صورت ضربی هستند.

رفتار سامانه در زمان‌های طولانی توسط ویژه بردارهای  $\mathcal{M}_D$  که ویژه مقدار صفر دارند توصیف می‌شود و با انجام محاسبات می‌توان نشان داد که ویژه بردارهای راست و چپ مربوط به ویژه مقدار صفر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
|r_{m,n}^L\rangle\rangle &= |r_m^L\rangle\rangle |\psi^T\rangle\rangle |r_n^R\rangle\rangle, \quad m, n \in \{1, 2\}, \\
\langle\langle l_{m,n}^L | &= \langle\langle l_m^L | \langle\langle \phi^T | \langle\langle l_n^R |, \quad m, n \in \{1, 2\},
\end{aligned} \quad (31)$$

که در آنها  $|\psi^J\rangle\rangle$  و  $|\phi^J\rangle\rangle$  بردارهای راست و چپ دلخواه مربوط به ذرات میانی  $J$  هستند و

$$\begin{aligned}
|r_1^L\rangle\rangle &= \frac{1}{\alpha_1^L + \alpha_1^L} (\alpha_1^L |e_1 e_1; e_1 e_1\rangle\rangle + \alpha_1^L |g_1 e_1; g_1 e_1\rangle\rangle), \\
|r_2^L\rangle\rangle &= \frac{1}{\alpha_2^L + \alpha_2^L} (\alpha_2^L |e_2 g_2; e_2 g_2\rangle\rangle + \alpha_2^L |g_2 g_2; g_2 g_2\rangle\rangle),
\end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{\xi} &= \Re(S_{1,1}^{(\xi)}(\omega_0^+) - \text{Im}(S_{1,2}^{(\xi)}(\omega_0^+))), \\
\lambda_2^{\xi} &= \Re(S_{1,1}^{(\xi)}(-\omega_0^+) + \text{Im}(S_{1,2}^{(\xi)}(-\omega_0^+))), \\
\lambda_3^{\xi} &= \Re(S_{1,1}^{(\xi)}(\omega_0^-) - \text{Im}(S_{1,2}^{(\xi)}(\omega_0^-))), \\
\lambda_4^{\xi} &= \Re(S_{1,1}^{(\xi)}(-\omega_0^-) + \text{Im}(S_{1,2}^{(\xi)}(-\omega_0^-))),
\end{aligned} \quad (24)$$

و

$$\begin{aligned}
S_{1,1}(\pm\omega_0^{\pm}) &= \\
& \pm \frac{1}{\nu} \text{P.V} \left( \int_0^{\omega_{\max}} d\omega' J(\omega') \frac{\Re\omega_0^{\pm} \bar{n}(\omega') + \omega_0^{\pm} \pm \omega'}{\omega_0^{\pm 2} - \omega'^2} \right), \\
S_{1,2}(\pm\omega_0^{\pm}) &= \\
& \mp \frac{i}{\nu} \text{P.V} \left( \int_0^{\omega_{\max}} d\omega' J(\omega') \frac{\Re\omega_0^{\pm} \bar{n}(\omega') \pm \omega_0^{\pm} + \omega'}{\omega_0^{\pm 2} - \omega'^2} \right).
\end{aligned} \quad (25)$$

به وضوح مشخص است که عملگرهای لیندبلاد (۲۱) و هامیلتونی جابه‌جایی لمب (۲۳)، عبارت‌های موضعی نیستند و لذا اگر برای به دست آوردن تحول سامانه روش اصولی را در پیش بگیریم، عموماً شاهد چنین رفتارهای ناموضعی خواهیم بود. در ادامه با در اختیار داشتن معادله مادر، حالت پایا و جریان‌های انرژی و اسپینی را برای رویکرد جمعی به دست خواهیم آورد.

#### ۴.۱. حالت پایا

در این بخش حل معادله مادر (۱۸) و همچنین شکل صریح حالت پایای سامانه در رویکرد جمعی را ارائه خواهیم داد. برای حل کردن معادله (۱۸) بهتر است که ابتدا معادله را به صورت برداری بنویسیم. برای تغییر نوشتار از شکل ماتریسی به شکل برداری، دقت کنیم که عنصر ماتریسی  $|a\rangle\langle b|$  را به صورت بردار  $|a; b\rangle\rangle$  نمایش می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{M}\rho(t), \quad (26)$$

$$\mathcal{M} = -i\mathcal{M}_H + \mathcal{M}_D, \quad (27)$$

$$\mathcal{M}_H = (H_S + H_{LS}) \otimes \mathbb{1}_{\nu N} - \mathbb{1}_{\nu N} \otimes (H_S + H_{LS}),$$

$$\mathcal{M}_D = \sum_{\xi=L,R} \sum_{m=1}^{\nu} \eta_{\xi}(\omega_m) \mathcal{M}_{D_{\xi,m}}, \quad (28)$$

که در آن

$(R, N, N-1)$  به دست می‌آید. رابطه (۳۷) به روشنی نشان می‌دهد که در حالت کلی همبستگی اولیه بین ذرات ۱ و ۲ یا بین ذرات  $N-1$  و  $N$  به کلی از بین نمی‌رود اما تمام درهم‌تنیدگی بین ذرات (۱, ۲) یا  $(N-1, N)$  پاک می‌شود و حالت نهایی این زوج‌ها، ضمن این که در حالت کلی همبستگی کلاسیکی دارد، کاملاً جدایی‌پذیر است.

اگر حالت اولیه را حالتی در نظر بگیریم که فقط ذره اول برانگیخته باشد، یعنی  $\rho_0 = E^{(1)} \otimes G^{(2)} \otimes \dots \otimes G^{(N)}$  در این صورت حالت پایا به صورت

$$\rho_\infty = \rho_\infty^L \otimes G^{(2)} \otimes \dots \otimes G^{(N-2)} \otimes \rho_\infty^R, \quad (38)$$

است که

$$\rho_\infty^L = \left( \frac{\alpha_r^L}{\alpha_r^L + \alpha_r^L} E^{(1)} + \frac{\alpha_r^L}{\alpha_r^L + \alpha_r^L} G^{(1)} \right) \otimes G^{(2)}, \quad (39)$$

و

$$(40)$$

$$\rho_\infty^R = G^{(N-1)} \otimes \left( \frac{\alpha_r^R}{\alpha_r^R + \alpha_r^R} E^{(N)} + \frac{\alpha_r^R}{\alpha_r^R + \alpha_r^R} G^{(N)} \right).$$

نکته جالب توجه این است که با توجه به ساختار رابطه (۳۰)، تحول زمانی سامانه نشان می‌دهد که برانگیختگی در ذره  $N$  ام همان برانگیختگی‌ای نیست که از ابتدا در ذره اول وجود داشته است و در واقع انتقال برانگیختگی از ذره ۱ به ذره  $N$  صورت نگرفته است و برانگیختگی ذره  $N$  ام به خاطر برهمکنش خودش با حمام گرمایی سمت راست به وجود آمده است.

برای به دست آوردن تحول زمانی، لازم به ذکر است که ماتریس‌های  $M_L$  و  $M_R$  در رابطه (۳۰) ساختار ساده‌ای دارند و به راحتی می‌توان آنها را قطری کرد و لذا تحول زمانی به صورت تحلیلی، با انجام محاسبات سر راستی، قابل محاسبه است. برای حالت اولیه‌ای مشابه آن چه در روابط (۳۸) تا (۴۰) استفاده شده است، داریم:

$$\rho(t) = \rho^L(t) \otimes G^{(2)} \otimes \dots \otimes G^{(N-2)} \otimes \rho^R(t), \quad (41)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \langle\langle I_1^L | &= \langle\langle e_1 e_1; e_1 e_1 | + \langle\langle g_1 e_1; g_1 e_1 |, \\ \langle\langle I_1^R | &= \langle\langle g_1 g_1; g_1 g_1 | + \langle\langle e_1 g_1; e_1 g_1 |, \end{aligned} \quad (33)$$

به نحوی که:

$$\begin{aligned} \alpha_1^L &= \eta_L(\omega_1) \bar{n}_L(\omega_1), \\ \alpha_r^L &= \eta_L(\omega_r) (1 + \bar{n}_L(\omega_r)), \\ \alpha_1^R &= \eta_L(\omega_r) \bar{n}_L(\omega_r), \\ \alpha_r^R &= \eta_L(\omega_r) (1 + \bar{n}_L(\omega_r)), \end{aligned} \quad (34)$$

$\langle\langle I_n^R |$  و  $|r_n^R\rangle\rangle$  نیز با جایگذاری کردن پانویس‌های  $(L, 1, 2)$  به ترتیب با  $(R, N, N-1)$ ، از روابط بالا به دست خواهند آمد.

رابطه (۳۱) نشان می‌دهد که عملگر لیندبلاد تعداد  $2^{2N-6}$  ویژه ماتریس مستقل مربوط به ویژه مقدار صفر دارد و به خاطر وجود تبهگنی، حالت نهایی سامانه، هم توسط تحول و هم توسط حالت اولیه سامانه تعیین می‌شود. برای یافتن حالت نهایی کافی است که یک مجموعه بردار پایه‌های متعامد راست و چپ  $\{|k\rangle\rangle$  و  $\langle\langle k|\}$  در نظر بگیریم که فضای بردارهای  $|\Psi_T\rangle\rangle$  و  $\langle\langle \Psi_T|$  را جاروب می‌کنند، در این صورت حالت پایا به صورت

$$(35)$$

$$|\rho_\infty\rangle\rangle = \sum_{m,n,k} |r_m^L\rangle\rangle |k\rangle\rangle |r_n^R\rangle\rangle \langle\langle I_m^L | \langle\langle k | \langle\langle I_n^R | \rho(0)\rangle\rangle,$$

خواهد بود. اگر حالت اولیه سامانه به صورت ضربی

$$\rho_0 = \rho_0^L \otimes \rho_0^T \otimes \rho_0^R, \quad (36)$$

آماده شده باشد، حالت پایا ساختار ضربی خود را حفظ خواهد کرد و حالت ذرات میانی تغییر نخواهد کرد، یعنی

$$\rho_\infty = \rho_\infty^L \otimes \rho_\infty^T \otimes \rho_\infty^R.$$

که

$$\begin{aligned} \rho_\infty^L &= \frac{P_{e_r}}{\alpha_r^L + \alpha_r^L} (\alpha_r^L E^{(1)} + \alpha_r^L G^{(1)}) \otimes E^{(2)} \\ &+ \frac{1 - P_{e_r}}{\alpha_r^L + \alpha_r^L} (\alpha_r^L E^{(1)} + \alpha_r^L G^{(1)}) \otimes G^{(2)}, \end{aligned} \quad (37)$$

و در آن  $p_{e_2}$  احتمال اولیه برانگیخته بودن ذره ۲ است و نیز از رابطه فوق با جایگزینی پانویس‌های به ترتیب با

و لذا

$$\frac{d}{dt} |O(t)\rangle\rangle = M^\dagger e^{M^\dagger t} |O(0)\rangle\rangle. \quad (46)$$

از آنجایی که برای همه  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ ، عملگرهای اسپینی  $\sigma_z^{(n)}$ ، با هر دوی  $H_s$  و  $H_{LS}$  جابه‌جا می‌شوند، تحول زمانی‌شان تنها با عملگرهای لیندبلاد داده می‌شود. عملگرهای لیندبلاد تنها روی ذرات (۱، ۲) و  $(N-1, N)$  به طور غیربدیهی اثر می‌کنند و لذا داریم:

$$\frac{d\sigma_z^{(n)}(t)}{dt} = 0 \quad n = 3, \dots, N-2, \quad (47)$$

انجام محاسبات سر راست نشان می‌دهد که برای همه زمان‌ها  $\frac{d\sigma_z^{(N-1)}}{dt} = 0$  و  $\frac{d\sigma_z^{(2)}}{dt} = 0$ ، و همچنین

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_z^{(1)}(t)}{dt} = & 2e^{-(\alpha_\uparrow^L + \alpha_\uparrow^L)t} \left( -\alpha_\uparrow^L E^{(1)} + \alpha_\uparrow^L G^{(1)} \right) E^{(2)} \\ & + 2e^{-(\alpha_\uparrow^L + \alpha_\uparrow^L)t} \left( -\alpha_\uparrow^L E^{(1)} + \alpha_\uparrow^L G^{(1)} \right) G^{(2)}, \end{aligned} \quad (48)$$

که در آن پارامترهای  $\alpha_i^L$ ، همان‌هایی هستند که در روابط (۳۴) تعریف شده‌اند. دقت کنید که مجدداً عبارت مربوط به  $\frac{d\sigma_z^{(N)}(t)}{dt}$  را می‌توان با تغییر پانویس‌ها، از رابطه فوق به

دست آورد. از رابطه (۴۸) واضح است که نمی‌توان تابع جریان اسپینی  $C$  را چنان تعریف کرد که

$$\frac{d\sigma_z^{(1)}(t)}{dt} = J_\uparrow - J_\downarrow \quad (48)$$

باشد. در سمت راست معادله (۴۸)، قسمت مثبت را می‌توان به عنوان چشمه و قسمت منفی را به عنوان چاه تلقی کرد. به لحاظ فیزیکی، معادله (۴۸) بدین معناست که اگر اسپین اول برانگیخته باشد، این برانگیختگی یا به محیط نشت می‌کند یا به اسپین دوم منتقل می‌شود. اگر ذره اول در حالت پایه باشد، آنگاه محیط و ذره دوم، در جریان اسپینی ذره اول، نقش چشمه دارند. دقت کنید همان طور که برای حالت پایا انتظار می‌رود، در حد  $t \rightarrow \infty$ ،  $\frac{d\sigma_z^{(1)}(t)}{dt} = 0$  است.

می‌توان مقدار چشمداشتی دو طرف رابطه (۴۸) را به ازای هر حالت اولیه دلخواهی محاسبه کرد. اگر مشابه روابط (۳۸) تا

$$\rho^L(t) = \left( p_{e_1}(t) E^{(1)} + (1 - p_{e_1}(t)) G^{(1)} \right) \otimes G^{(2)},$$

$$\rho^R(t) = G^{(N-1)} \otimes \left( p_{e_N}(t) E^{(N)} + (1 - p_{e_N}(t)) G^{(N)} \right), \quad (42)$$

و

$$p_{e_1}(t) = \frac{1}{\alpha_\uparrow^L + \alpha_\uparrow^L} \left( \alpha_\uparrow^L + \alpha_\uparrow^L e^{-(\alpha_\uparrow^L + \alpha_\uparrow^L)t} \right), \quad (43)$$

$$p_{e_N}(t) = \frac{\alpha_\uparrow^R}{\alpha_\uparrow^R + \alpha_\uparrow^R} \left( 1 - e^{-(\alpha_\uparrow^R + \alpha_\uparrow^R)t} \right),$$

و رابطه (۴۱) به سادگی نشان می‌دهد که ذرات میانی هرگز برانگیخته نشده‌اند و همواره در حالت پایه بوده‌اند. به طور خلاصه، نتایجی که به دست آمده است نشان می‌دهد که زنجیره آیزینگ با هامیلتونی (۱۴)، اگر از دو طرف به دو حمام گرمایی مستقل متصل شود و اندرکنشی مطابق رابطه (۱۶) داشته باشد، مانند یک زنجیره عایق عمل می‌کند و نمی‌تواند برانگیختگی را از چپ به راست یا از راست به چپ، انتقال بدهد.

در این بخش دیدیم که اگر سامانه از حالت اولیه  $\rho = E^{(1)} \otimes G^{(2)} \otimes \dots \otimes G^{(N)}$  شروع به تحول کند، هیچ انتقال برانگیختگی در زنجیره صورت نمی‌گیرد. در بخش بعدی سعی داریم ویژگی‌های هدایت این سامانه را به طور کلی‌تر مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم.

## ۲.۴. جریان‌های انرژی و اسپینی

ویژگی‌های هدایت یک سامانه با استفاده از بررسی جریان‌های انرژی و اسپینی در آن سامانه، مطالعه می‌شوند. در حقیقت هر قانون بقا در فیزیک، منجر به یک رابطه پیوستگی می‌شود که در آن یک جریان تعریف می‌شود. برای یک کمیت دلخواه  $\mathcal{O}$ ، رابطه پیوستگی  $\frac{d\mathcal{O}}{dt} = -\nabla \cdot c + \Sigma$ ، جریان  $c$  را تعریف می‌کند و  $\Sigma$  بیانگر چشمه یا چاه آن است. بنابراین برای مطالعه جریان‌های اسپینی یا انرژی، لازم است که مشتق زمانی عملگرهای متناظر را محاسبه کنیم. مشتق زمانی کمیت دلخواه  $\mathcal{O}$  با الحاقی عملگر لیندبلاد داده می‌شود:

$$\dot{\mathcal{O}} = \mathcal{L}^\dagger [\mathcal{O}], \quad (44)$$

یا با نمایش برداری

$$|\dot{\mathcal{O}}(t)\rangle\rangle = M^\dagger |O(t)\rangle\rangle, \quad (45)$$



### ۵. معادله مادر در رویکرد موضعی

در رویکرد پدیده شناختی موضعی، اثر محیط‌های گرمایی به صورت عملگرهای لیندبلادی که روی ذره‌های ۱ و  $N$  اثر می‌کنند، به دست می‌آیند. برای به دست آوردن عملگرهای لیندبلاد، مانند روشی که در پیوست الف برای رویکرد جمعی استفاده کردیم، بهره می‌بریم، با این تفاوت که فرض می‌کنیم اثر محیط محلی است و بنابراین برای به دست آوردن عملگرهای لیندبلاد، طیف هامیلتونی محلی سامانه کافی است. به عبارت دیگر، در هامیلتونی سامانه، جملات اندرکنشی نادیده گرفته می‌شوند. به عبارت دیگر علاوه بر فرض بورن-مارکوف که در رویکرد جمعی لحاظ کردیم، در رابطه (۱۴) فرض  $j \ll h$  نیز اعمال می‌شود و هامیلتونی سامانه فقط به صورت  $h \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}$  در نظر گرفته می‌شود.

با انجام محاسبات سر راستی، معادله مادر به صورت:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i[H_{LS}^{(lo)} + H_s, \rho] + \\ & \sum_{\xi} [\eta_{\xi}(\omega^*) (1 + \bar{n}_{\xi}(\omega^*)) \\ & \left( \pi \tilde{A}_{\xi}(\omega^*) \rho \tilde{A}_{\xi}^{\dagger}(\omega^*) - \frac{1}{\gamma} \{ \tilde{A}_{\xi}^{\dagger}(\omega^*) \tilde{A}_{\xi}(\omega^*), \rho \} \right) \\ & + \eta_{\xi}(\omega^*) \bar{n}_{\xi}(\omega^*) \\ & \left( \tilde{A}_{\xi}^{\dagger}(\omega^*) \rho \tilde{A}_{\xi}(\omega^*) - \frac{1}{\gamma} \{ \tilde{A}_{\xi}(\omega^*) \tilde{A}_{\xi}^{\dagger}(\omega^*), \rho \} \right) , \end{aligned} \quad (51)$$

به دست می‌آید، که در آن  $\eta_{\xi}(\omega^*) := \pi J_{\xi}(\omega^*)$  و  $H_{LS}^{(lo)}$  بیانگر هامیلتونی جابه‌جایی لمب در رویکرد موضعی است و مجدداً پانویس  $\xi$  برابر مقادیر  $L$  و  $R$  است و

$$\begin{aligned} \tilde{A}_L(\omega^*) &= \sigma_-^{(1)}, \\ \tilde{A}_R(\omega^*) &= \sigma_-^{(N)}. \end{aligned} \quad (52)$$

از آنجا که مشابه با رویکرد جمعی، هامیلتونی جابه‌جایی لمب با هامیلتونی سامانه جابه‌جا می‌شود و تأثیری در حالات پایا و جریان انرژی ندارد، از نوشتن جزئیات آن پرهیز کرده‌ایم. با استفاده از شکل برداری شده معادله مادر و انجام عملیات مشابه

(۴۳)، حالت اولیه را به صورت ضربی و به شکل

$$\rho_0 = E^{(1)} \otimes G^{(2:N)}$$

در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{Tr} \left( \frac{d\sigma_z^{(i)}(t)}{dt} \rho_0 \right) = -2\alpha_{\nu} e^{-(\alpha_{\nu} + \alpha_{\nu'})t} \quad (49)$$

یعنی با گذر زمان، مغناطش ذره اول به مرور به صورت نمایی از بین می‌رود. مشابه همین رابطه را می‌توان برای ذره  $N$ -ام نیز به دست آورد که برای پرهیز از طولانی شدن متن، از آن اجتناب می‌کنیم.

حال هامیلتونی دو بخشی  $h_{i,i+1} := j\sigma_z^{(i)}\sigma_z^{(i+1)}$  را در نظر بگیرید، مشتق زمانی این هامیلتونی، کمیتی است که جریان انرژی «به» و «از» ذره  $i$ -ام را تعیین می‌کند. به سادگی می‌توان بررسی کرد که به ازای  $2 \leq i \leq N-2$ ،  $\frac{dh_{i,i+1}}{dt} = 0$  است و  $\frac{dh_{1,2}(t)}{dt} = 2e^{-(\alpha_L^L + \alpha_L^L)t} (-\alpha_L^L E^{(1)} + \alpha_L^L G^{(1)}) E^{(2)} + 2e^{-(\alpha_L^L + \alpha_L^L)t} (\alpha_L^L E^{(1)} - \alpha_L^L G^{(1)}) G^{(2)}$ ،

مجدداً نمی‌توان تابعی به عنوان جریان انرژی  $F$  پیدا کرد به نحوی که  $\frac{dh_{1,2}}{dt} = F_1 - F_2$  و بنابراین برای این سامانه جریان انرژی نیز نمی‌توان تعریف کرد. از طرف دیگر به خاطر محیط‌های گرمایی خارجی، یک رفتار چشمه/چاه مانند در دو سر زنجیره وجود دارد. رابطه (۵۰) نشان می‌دهد که وقتی اسپین‌های ۱ و ۲ هر دو در حالت پایه هستند یا هر دو برانگیخته هستند، رفتار کلی محیط مانند یک چاه انرژی است، و وقتی یکی از این دو اسپین در حالت پایه و دیگری برانگیخته باشد، محیط به مثابه یک چشمه انرژی اثر می‌کند.

نتایجی که تا کنون گزارش شده‌اند با استفاده از به دست آوردن عبارات صریح عملگرهای لیندبلاد و با حل معادله مادر در رویکرد جمعی بوده است. برای این که نشان دهیم که رویکرد موضعی پدیده‌شناختی منجر به تحلیل‌های متفاوت می‌شود، در ادامه سعی داریم برای همین مدل مورد مطالعه، رویکرد موضعی را در پیش بگیریم و تفاوت‌های این دو رویکرد را صراحتاً مطالعه کنیم.

استفاده می‌کنیم. از آنجایی که عملگرهای لیندبلاد در رویکرد موضعی، فقط بر روی اسپین‌های 1 و  $N$  اثر می‌کنند، هر عملگری بجز عملگرهای مربوط به این ذرات، در طول زمان بدون تغییر باقی می‌ماند. با انجام محاسبات سر راستی، برای ذره اول داریم:

$$\frac{d\sigma_z^{(1)}(t)}{dt} = \gamma e^{-(\beta_r^L + \beta_r^L)t} (-\beta_r^L E^{(1)} + \beta_r^L G^{(1)}) \quad (58)$$

و برای جریان انرژی داریم:

$$(59)$$

$$\frac{dh_{1,r}(t)}{dt} = \gamma e^{-(\beta_r^L + \beta_r^L)t} (-\beta_r^L E^{(1)} + \beta_r^L G^{(1)})(E^{(1)} - G^{(1)}).$$

از مقایسه رابطه (48) با رابطه (58)، واضح است که در رویکرد موضعی، برخلاف رویکرد جمعی، جریان اسپینی در جایگاه اول فقط به حالت خود جایگاه وابسته است و مستقل از حالت سایر ذرات، حتی همسایه نزدیکش است. همچنین جریان انرژی از جایگاه اول به دوم نیز فقط به صورت وابستگی به انرژی ذره دوم ( $E^{(2)} - G^{(2)}$ ) به جایگاه دوم وابسته است و به جزئیات دیگر حالت جایگاه دوم وابسته نیست. این در حالی است که برای رویکرد جمعی، رابطه (50) چنین رفتاری را گزارش نمی‌کند.

به سادگی می‌توان مقدار چشمداشتی روابط (58) و (59) را برای هر حالت اولیه دلخواهی محاسبه کرد. به عنوان مثال اگر سامانه از حالتی شروع کند که تنها یک برانگیختگی در جایگاه اول داشته باشد، یعنی  $\rho_0 = E^{(1)} \otimes G^{(2:N)}$ ، آنگاه داریم:

$$\left\langle \frac{d\sigma_z^{(1)}(t)}{dt} \right\rangle = -\gamma \beta_r^L e^{-(\beta_r^L + \beta_r^L)t}, \quad (60)$$

$$\left\langle \frac{dh_{1,r}(t)}{dt} \right\rangle = \gamma \beta_r^L e^{-(\beta_r^L + \beta_r^L)t}.$$

این رابطه نشان می‌دهد اگر سامانه با یک برانگیختگی در جایگاه اول، شروع به تحول کند، این برانگیختگی به صورت نمایی به محیط منتقل می‌شود. این اتفاق سبب می‌شود که متوسط انرژی جایگاه اول کم شده و نهایتاً جریان انرژی بین جایگاه‌های اول و دوم ثابت می‌شود.

بخش قبل، ویژه بردارهای چپ و راست  $M_D^{lo}$  (که مشابه با روابط (26) تا (30) تعریف می‌شود) که مربوط به ویژه مقدار صفر هستند، به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$|r\rangle = |r^{(1)}\rangle |\psi\rangle |r^{(N)}\rangle, \quad (53)$$

$$\langle\langle l| = \langle\langle l^{(1)}| \langle\langle \phi| \langle\langle l^{(N)}|,$$

که در آن  $|\psi\rangle$  و  $\langle\langle \phi|$  هر بردار راست یا چپ دلخواهی در فضای بردارهای  $2^{(N-2)}$  بعدی اسپین‌های  $\{2, 3, \dots, N-1\}$  است و

$$|r^{(i)}\rangle = \frac{1}{\beta_r^\xi + \beta_r^\xi} (\beta_r^\xi |e_i; e_i\rangle + \beta_r^\xi |g_i; g_i\rangle),$$

$$\langle\langle l^{(i)}| = \langle\langle e_i; e_i| + \langle\langle g_i; g_i| \quad (54)$$

که در آن برای  $i=1, N$  به ترتیب  $\xi = L, R$  است و ضرایب به صورت

$$\beta_r^\xi = \eta_\xi(\omega^*) \bar{n}_\xi(\omega^*), \quad (55)$$

$$\beta_r^\xi = \eta_\xi(\omega^*) (1 + \bar{n}_\xi(\omega^*)),$$

هستند.

مجدداً چون معادله مادر بیش از یک ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار صفر دارد، حالت پایای سامانه یکتا نیست و به حالت اولیه سامانه مرتبط است. برای این که بتوانیم نتایج رویکرد موضعی و جمعی را با هم مقایسه کنیم، باز هم حالت اولیه را به صورت  $\rho_0 = \rho_0^L \otimes \rho_0^I \otimes \rho_0^R$  در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که حالت پایا ساختار ضربی‌اش را نسبت به بخش‌های  $L$  و  $I$  و  $R$  حفظ می‌کند و به علاوه، برخلاف رویکرد جمعی، همبستگی‌های بین جایگاه‌های (1,2) یا  $(N-1, N)$  نیز کاملاً از بین می‌رود و حتی همبستگی کلاسیکی بین این ذرات باقی نمی‌ماند.

$$\rho_\infty = \rho_\infty^{(1)} \otimes \rho_\infty^{(2)} \otimes \rho_\infty^I \otimes \rho_\infty^{(N-1)} \otimes \rho_\infty^{(N)}, \quad (56)$$

که در آن

$$\rho_\infty^{(i)} = \frac{1}{\beta_r^\xi + \beta_r^\xi} (\beta_r^\xi E^{(i)} + \beta_r^\xi G^{(i)}), \quad (57)$$

و باز برای  $i=1, N$  به ترتیب  $\xi = L, R$  است.

#### ۵. ۱. جریان اسپینی و انرژی در رویکرد موضعی

برای پیدا کردن جریان اسپینی و جریان انرژی در رویکرد موضعی، از همان روشی که در بخش (4-2) به کار گرفتیم،

## ۶. جمع بندی و نتیجه گیری

رویکرد جمعی دارای اصالت بیشتری باشد چرا که همان طور که در این مقاله دیده شد، در به دست آوردن آن هیچ فرض اضافی لحاظ نشده است و عملگرهای لیندبلاد با تحلیل های دقیق ریاضی به دست آمده اند. اما متأسفانه هنوز اجماع واحدی در مورد به کارگیری یک رویکرد واحد در جامعه علمی وجود ندارد و گاهی گزارش هایی مبنی بر نقض اصول دانسته شده، ارائه می شوند و این گزارش ها عموماً با اعمال رویکرد موضعی به دست آمده اند.

**پیوست الف: به دست آوردن عملگرهای لیندبلاد در رویکرد جمعی**

برای به دست آوردن عملگرهای لیندبلاد در رویکرد جمعی، ابتدا سعی می کنیم هامیلتونی (۱۶) را به صورت رابطه (۳)، با عملگرهای هرمیتی بنویسیم. این کار با کمی عملیات جبری انجام می شود و داریم:

$$H_I = \sum_{\xi=R,L} \sum_{k=1}^{\gamma} A_{\xi,k} \otimes B_{\xi,k}, \quad (الف.۱)$$

که در آن:

$$A_{L,1} = \sigma_x^{(1)}, \quad A_{L,\gamma} = \sigma_y^{(1)}, \quad (الف.۲)$$

$$A_{R,1} = \sigma_x^{(N)}, \quad A_{R,\gamma} = \sigma_y^{(N)}, \quad (الف.۳)$$

$$B_{L,1} = \int d\omega h_L(\omega) \frac{\hat{b}_{L,\omega} + \hat{b}_{L,\omega}^\dagger}{2}, \quad (الف.۴)$$

$$B_{L,\gamma} = \int d\omega h_L(\omega) \frac{\hat{b}_{L,\omega}^\dagger - \hat{b}_{L,\omega}}{2i}, \quad (الف.۵)$$

$$B_{R,1} = \int d\omega h_R(\omega) \frac{\hat{b}_{R,\omega} + \hat{b}_{R,\omega}^\dagger}{2}, \quad (الف.۶)$$

$$B_{R,\gamma} = \int d\omega h_R(\omega) \frac{\hat{b}_{R,\omega}^\dagger - \hat{b}_{R,\omega}}{2i}, \quad (الف.۷)$$

در این مسئله برای قابل فهم تر بودن روابط، از پانویس های دوتایی استفاده کرده ایم و پانویس یا بالانویس های  $\xi$  و  $\zeta$  برابر با مقدار  $L$  یا  $R$  بوده و بیانگر حمام های گرمایی سمت چپ یا راست هستند. در این صورت معادله مادر به شکل (الف.۸)

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho] = -i[H_{LS} + H_s, \rho] + \sum_{\xi, \zeta} \sum_{k, l=1}^{\gamma} \sum_{\omega} \gamma_{k,l}^{(\xi, \zeta)}(\omega) \left( \begin{array}{l} A_{\xi,l}(\omega) \rho A_{\zeta,k}^\dagger(\omega) \\ - \frac{1}{2} \{ A_{\zeta,k}^\dagger(\omega) A_{\xi,l}(\omega), \rho \} \end{array} \right)$$

هر گاه یک سامانه در حال برهمکنش با محیط اطرافش باشد، دینامیک آن دیگر به سادگی با معادله شرودینگر داده نمی شود و برای به دست آوردن رفتار دینامیکی آن، باید تحول سامانه به همراه محیط اطراف را در نظر گرفته و سپس بر روی درجات آزادی محیط رد بگیریم. در این صورت اگر برهمکنش محیط و سامانه ضعیف بوده و شرایط تقریب برون مارکوف و موج چرخان برقرار باشد، تحول سامانه با یک نگاشت کاملاً مثبت ردنگهدار مارکوف، موسوم به معادله مادر، توصیف می شود. عملگرهای لیندبلاد معادله مادر، با در نظر گرفتن تقریب های بیان شده، به طور صریح قابل محاسبه هستند. چون عملگرهای لیندبلاد به ویژه بردارهای هامیلتونی سامانه وابسته هستند، اگر ویژه بردارها ناموضعی باشند یا طیف هامیلتونی سامانه تبهگن باشد، ممکن است عملگرهای لیندبلاد نیز غیر موضعی به دست بیایند. رویکرد دیگری نیز وجود دارد که رویکرد موضعی و پدیده شناختی دانسته می شود. در این رویکرد علاوه بر تقریب های قبل، فرض می شود اثر محیط موضعی است و این فرض بیشتر نیز در به دست آوردن معادله مادر اعمال می شود. در این صورت، عملگرهای لیندبلاد نیز به صورت عملگرهای موضعی به دست می آیند که فقط بر روی ذراتی اثر می کنند که مستقیماً با محیط در تماس هستند. در این مقاله به منظور مقایسه رویکردهای جمعی و موضعی، یک زنجیره آیزینگ را در نظر گرفتیم که دو انتهایش به دو حمام گرمایی مستقل از هم در دماهای متفاوت، متصل است. دیده می شود که در نظر گرفتن رویکردهای موضعی و جمعی منجر به نتایج متفاوتی در توصیف جریان های انرژی و اسپینی و همچنین حالت پایای سامانه می شود. یکی از بارزترین تفاوت ها این است که اگر سامانه با یک حالت اولیه به صورت  $\rho = \rho_1^{1,2} \otimes \rho_2^{3:N-2} \otimes \rho_3^{N-1,N}$  شروع به تحول کند، رویکرد موضعی پیش بینی می کند که تمام همبستگی بین ذرات ۱ و ۲ یا ذرات  $N-1$  و  $N$  از بین می رود، اما رویکرد جمعی پیش بینی می کند که همبستگی های کلاسیک بین این ذرات باقی می ماند و فقط در هم تنیدگی آنها از بین می رود. همچنین، تحول های زمانی کمیت های مختلف نیز، در این دو رویکرد، متفاوت به دست می آید. به نظر می رسد که

مرحله بعد، محاسبه ماتریس ضرایب با استفاده از جایگذاری روابط (الف.۴) تا (الف.۷) در رابطه (۸) است. در این مسئله، محیط گرمایی به صورت دو محیط گرمایی جدای از هم در سمت چپ و سمت راست در نظر گرفته شده است، یعنی  $\rho_{th} = \rho_{B_L} \otimes \rho_{B_R}$  با استفاده از پانویس‌های دوتایی روابط (الف.۴) تا (الف.۷) و با توجه به این که  $B_{\xi,k}$  نیز عملگری است که تنها روی حمام  $\xi$  اثر می‌کند، رابطه (۸) به صورت

(الف.۱۱)

$$\begin{aligned} \gamma_{k,l}^{(\xi,\zeta)}(\omega) &= 2\pi \text{Tr} \left[ B_{\xi,k}(\omega) B_{\zeta,l} \rho_{th} \right] \\ &= 2\pi \text{Tr} \left[ B_{\xi,k}(\omega) \rho_{B_\xi} \right] \text{Tr} \left[ B_{\zeta,l}(\omega) \rho_{B_\zeta} \right], \end{aligned}$$

نوشته خواهد شد و به وضوح برای  $\xi \neq \zeta$ ، برابر با صفر است و بنابراین ماتریس  $\gamma$  به صورت جمع مستقیم دو ماتریس مربوط به حمام گرمایی سمت چپ و حمام گرمایی سمت راست، ساده می‌شود:

$$\gamma(\omega) = \gamma^{(L)}(\omega) \oplus \gamma^{(R)}(\omega), \quad (\text{الف.۱۲})$$

با به کار بردن رابطه (۸) به سادگی دیده می‌شود که ماتریس‌ها دو بعدی هستند و به ازای  $\omega > 0$

$$\gamma^{(\xi)}(\omega) = \frac{\pi}{2} J_\xi(\omega) (1 + \bar{n}_\xi(\omega)) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{الف.۱۳})$$

و برای  $\omega < 0$ 

$$\gamma^{(\xi)}(\omega) = \frac{\pi}{2} J_\xi(-\omega) \bar{n}_\xi(-\omega) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{الف.۱۴})$$

با قطری کردن ماتریس‌های  $\gamma^{(\xi)}$  نهایتاً معادله مادر در شکل قطری شده به صورت رابطه (۵۱) با عملگرهای لیندبلاد (۵۲) به دست می‌آید.

نوشته می‌شود. پانویس‌های  $k$  و  $l$ ، شمارنده عملگرهای کراوس مربوط به هر سر زنجیره هستند.

برای به دست آوردن عملگرهای لیندبلاد لازم است که از رابطه (۹) استفاده کنیم. ویژه بردارهای هامیلتونی (۱۴) به صورت ضربی  $|a_1 a_2 \dots a_N\rangle$  هستند که در آن  $a_i \in \{e, g\}$ ،  $N_e$ ،  $e$  و  $g$  بار و  $N_g$  بار تکرار شده باشد، همچنین اگر تعداد مرزهای بین بلوک‌های  $e$ -های پشت سر هم یا بلوک‌های  $g$ -های پشت سر هم،  $B$  باشد، ویژه انرژی مربوطه به این حالت  $(N - 2B - 1)j + (N_e - N_g)h$  خواهد بود. بنابراین تمام حالت‌هایی که تعداد بلوک‌های یکسان و  $N_e - N_g$  یکسان دارند، انرژی مشابهی خواهند داشت.

پیش از استفاده از رابطه (۹) دقت داریم که

$$A_{L,k} |a_1 a_2 \dots a_{N-1} a_N\rangle = v |\bar{a}_1 a_2 \dots a_{N-1} a_N\rangle, \quad (\text{الف.۹})$$

$$A_{R,k} |a_1 a_2 \dots a_{N-1} a_N\rangle = v |a_1 a_2 \dots a_{N-1} \bar{a}_N\rangle,$$

که  $v \in \{\pm 1, \pm i\}$ . یعنی اثر کردن  $A_{\xi,k}$ -ها بر روی ویژه بردار هامیلتونی موضعی منجر به ویژه برداری خواهد شد که انرژی آن به اندازه  $2(h \pm j)$  بیشتر یا کمتر است. بنابراین واضح است که با به کار بردن رابطه (۹)، عملگرهای لیندبلاد  $A_{\xi,k}(\omega)$  فقط به ازای  $\omega = \pm 2(h \pm j)$  مقدار ناصفر دارند. با استفاده از روابط (۹) برای  $\omega_{\nu,\nu} = 2(h \pm j) > 0$  داریم:

(الف.۱۰)

$$A'_{L,\nu}(\omega) = \sigma_- \otimes E \otimes \mathbb{1}_{\nu,N} = -iA'_{L,\nu}(\omega),$$

$$A'_{L,\nu}(\omega_\nu) = \sigma_- \otimes G \otimes \mathbb{1}_{\nu,N} = -iA'_{L,\nu}(\omega_\nu),$$

$$A'_{R,\nu}(\omega) = \mathbb{1}_{\nu,N-2} \otimes E \otimes \sigma_- = -iA'_{R,\nu}(\omega),$$

$$A'_{R,\nu}(\omega_\nu) = \mathbb{1}_{\nu,N-2} \otimes G \otimes \sigma_- = -iA'_{R,\nu}(\omega_\nu),$$

$$A_{\xi,\nu}(-\omega) = A_{\xi,\nu}^\dagger(\omega), \quad A_{\xi,\nu}(-\omega) = A_{\xi,\nu}^\dagger(\omega),$$

## مراجع

1. J T Obodo, A Murat, and U Schwingenschlögl, *Sci. Rep.* **7** (2017) 7324.
2. AL de Paula Jr, et al, *J. Phys: Condens Matter* **32** (2020) 175403.
3. A J Nozik, *Physica E* **14** (2002) 115-120.
4. J P Brantut, et al., *Science* **342** (2013) 713.
5. N Freitas, et al., *Physica Scripta* **91** (2016) 013007.
6. M Nielsen, and I Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", Cambridge University Press, Cambridge, England, (2010).
7. A Rivas and S F Huelga, "Open Quantum Systems, Springer Briefs in Physics", Springer, Berlin Heidelberg, Germany, (2012).
8. V Gorini, et al., *Journal of Mathematical Physics* **17** (1976) 821.
9. G Lindblad, *Communications in Mathematical Physics* **48** (1976) 119.

10. M Keck, D Rossini, and R Fazio, *Phys. Rev. A* **98** (2018) 053812.
11. L Schuab, E Pereira, and G T Landi, *Phys. Rev. E* **94** (2016) 042122.
12. A Dhar, *Adv. Phys.* **57** (2008) 457.
13. S Lepri, R Livi, and A Politi, *Phys. Rep.* **377** (2003) 1.
14. D Farina, et al., *Phys. Rev. A* **102** (2020) 052208.
15. P Rebentrost, et al., *New J. Phys.* **11** (2009) 033003.
16. F Benatti, R Floreanini, and L Memarzadeh, *Phys. Rev. X Quantum* **2**, 3 (2021) 030344.
17. E Pereira, *Phys. Rev. E* **97** (2018) 022115.
18. V Popkov and R Livi, *New J. Phys.* **15** (2013) 023030.