مجلۀ پژوهش فیزیک ایران
مجلۀ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۲۳، شمارۀ ۲، تابستان ۱۴۰۲
DOI: 10.47176/ijpr.23.2.31665

رهیافت نظریۀ گروه برای محاسبۀ ξ-شبه عملگر دیراک و طیف آن در فضای AdS^2

محمد محمودی ، مهدی لطفی‌زاده و بهنام محمدی

گروه فیزیک، دانشکدۀ علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

پست الکترونیکی: m.lotfizadeh@urmia.ac.ir

(دریافت مقاله: ۰۵/ ۰۱ /۱۴۰۲ ؛ دریافت نسخۀ نهایی: ۱۴۰۲/۰۱/۱۹)

چکیده:
ξ-شبه عملگر دیراک اخیراً به کمک ساخت ξ-شبه مدول‌ها و تصویرگرهای مناسب روی فضای AdS^2 ساخته شده است. در این مقاله، این عملگر با کمک نظریۀ گروه ساخته خواهد شد. برای این منظور، در ابتدا ساختار اسپینی فضای AdS^2 ساخته می‌شود و سپس به کمک روابط مربوط به کنش‌های راست و چپ و شکل‌های مورر-کارتان، ξ-شبه عملگر دیراک و سپس شکل پیمانه‌ای آن در حالت اینستنتونی و بدون اینستنتون معرفی خواهد شد و در انتها طیف آن نیز در حالت‌های مختلف ارائه شده از این ξ-شبه عملگر، محاسبه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ξ-شبه عملگر دیراک، ξ-شبه عملگر تک دستی، کلاف اسپینوری، میدان‌های پیمانه‌ای، طیف

۱. مقدمه

در چارچوب هندسۀ ناجابه‌جایی کُن-لات[1] [۱ و ۲]، به منظور تعریف حساب دیفرانسیل جهت نوشتن نظریۀ میدان لاگرانژی مورد استفاده در نظریۀ میدان‌های کوانتومی، نیاز به محاسبۀ سه تایی طیفی $(\mathsf{A},\mathcal{H},D)$ است که در آن عملگر خود الحاقی (برای فضاهای فشرده) یا شبه الحاقی (برای فضاهای غیرفشرده) دیراک D روی اسپینورهای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با جبر A کنش می‌کند. از لحاظ ریاضیاتی، عملگر دیراک D نگاشتی است از مقاطع $\Gamma(S)$ کلاف تاری S به مقاطع $\Gamma(S)$ همان کلاف اسپینوری S:

$$D:\Gamma(S)\to\Gamma(S)$$

عملگر دیراک را نمی‌توان برای هر فضایی تعریف کرد، بلکه این عملگر فقط برای فضاهایی تعریف می‌شود که آن فضا، ساختار اسپینی داشته باشد؛ از طرفی ساختار اسپینی را هم برای خمینه[2]هایی می‌توان تعریف کرد که کلاف تاری کنجی[3] (Fr) آن ساختار گروهی $\mathrm{O}(s,t)$ یا $\mathrm{SO}(s,t)$ داشته باشد. s بیان کنندۀ تعداد ۱ و t بیان کنندۀ تعداد ۱- است که برای خمینه‌های اقلیدسی و ریمانی $t=0$ است.

در رهیافت کن- لات، عملگر خود الحاقی مهم دیگری به اسم تک دستی[4] γ نیز وجود دارد که فقط برای فضاهایی با بعد زوج $m=s+t=2k$ قابل تعریف است. این عملگر به همراه عملگر دیراک، فضای تفکیک پذیر هیلبرت $\mathcal{H}$ و $*$-جبر مختلط یکدار A تشکیل یک سه تایی طیفی $(\mathsf{A},\mathcal{H},D)$ می‌دهند که در آن $(\mathcal{H},D)$ یک K- چرخه روی جبر A است [۱ و ۳].

---

[1] Connes-Lott
[2] Manifold
[3] Frame Bundle
[4] Chirality

فضای مدل جهت انجام محاسبات جبری و ساختاری، برای خمینه‌های دو بعدی فشرده با انحنای ثابت و مثبت، کرهٔ $\mathrm{S}^۲$ و برای خمینه‌های غیرفشرده با انحنای ثابت و منفی، $\mathrm{AdS}^۲$ است که در مقالهٔ حاضر، فضای $\mathrm{AdS}^۲$ جهت محاسبهٔ عملگر دیراک و طیف آن، انتخاب شده است. سه نوع از عملگرهای دیراک و تک دستی روی $\mathrm{S}_\mathrm{F}^۲$ فازی وجود دارد که عبارتند از: عملگر دیراک گینسپارگ – ویلسون[1] D_{GW} [۴-۸]، عملگر دیراک واتامورا- واتامورا[2] D_{WW} [۳، ۹ و ۱۰] و عملگر دیراک گروسه- کلمیک – پرس ناجر[3] D_{GKP} [۱۱ و ۱۲]. با این حال، مطالعات بسیار کمی روی فضاهای با انحنای منفی انجام شده است. در رهیافت واتامورا، از شبه الحاقی بودن عملگرهای دیراک و تک دستی به منظور مطالعهٔ طیف D_{WW} روی $\mathrm{AdS}_\mathrm{F}^۲$ فازی استفاده شده است [۳]. در رهیافت بالاچاندران[4] از نسخهٔ شبه جبر گینسپارگ – ویلسون برای مطالعهٔ D_{GW} روی $\mathrm{AdS}_\mathrm{F}^۲$ فازی برای اسپین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ استفاده شده است [۵ و ۸]. به جای خود الحاقی بودن در روی یک خمینهٔ فشرده، نشان داده شده است که عملگرهای دیراک و تک دستی روی $\mathrm{AdS}^۲$ که خمینه‌ای غیرفشرده است، شبه الحاقی هستند. به کمک عملگر متریکی که از ضرب داخلی ناشی می شود، اخیراً ساختار الحاقی بودن به ساختاری شبه الحاقی تعمیم داده شده است [۱۳ و ۱۴]. در این مقاله، ابتدا ساختار اسپینی فضای $\mathrm{AdS}^۲$ ساخته می‌شود و سپس به کمک روابط مربوط به کنش‌های راست و چپ و شکل‌های مورر–کارتان[5]، ξ–شبه عملگر دیراک محاسبه خواهد شد و سپس بعد از پیمانه‌ای سازی کلاف اسپینوری، شکل پیمانه‌ای آن در حالت اینستنتونی و بدون اینستنتون معرفی خواهد شد و در انتها طیف آن نیز در حالت‌های مختلف ارائه شده از این ξ–شبه عملگر، محاسبه می‌شود.

۲. ساختار کلی

فرمیون‌ها توسط میدان‌های اسپینوری (یا به طور اختصار، اسپینورها) توصیف می‌شوند. همچون میدان‌های برداری یا میدان‌های تانسوری، اسپینورها نیز تحت تبدیلات خاصی دوران می‌کنند. اسپینورها به طور مستقیم تحت گروه متعامد تبدیل نمی‌شوند، بلکه تحت گروه دو بار پوشش دهندهٔ مشخصی به اسم گروه اسپینی $\mathrm{Spin}(s,t)$ (یا گروه ارتوکرونوس[6] $\mathrm{Spin}^+(s,t)$) تبدیل می‌شوند. در حالت فضا- زمان مینکوفسکی، دوران‌ها متناظر با تبدیلات لورنتس $\mathrm{SO}(n-۱,۱)$ هستند و گروه اسپینی متناظر، گروه اسپینی لورنتس $\mathrm{Spin}(n-۱,۱)$ نام خواهد داشت. چنین گروه‌های غیر فشرده اغلب برای توصیف مسائل پراکندگی در مکانیک کوانتومی به کار می‌روند. در ادامه، ساختار کلی فضاهای اسپینی که این گروه‌های اسپینی در آن قرار دارند، معرفی می‌شود.

کلاف کنجی وابسته به $\mathrm{T}M$ را در نظر می‌گیریم، که در آن $\mathrm{T}M \xrightarrow{\pi} M$ و $\mathrm{T}M$ ساختار گروهی $\mathrm{O}(s,t)$ دارد و همچنین t_{ij} تابع گذار $\mathrm{T}M$ است که در شرط سازگاری زیر صدق می‌کند:

$$t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \mathrm{I},\ \ t_{ii} = \mathrm{I}\,, \tag{۱}$$

یک ساختار اسپینی روی M (M یک خمینهٔ شبه ریمانی با متریک $\eta = \mathrm{diag}(s,t)$ و (s,t) –جهت پذیر است)، توسط توابع گذار $\tilde{t}_{ij} \in \mathrm{Spin}(s,t)$ تعریف می‌شود به طوری که:

$$\lambda(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij},\ \ \tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \mathrm{I},\ \ \tilde{t}_{ii} = \mathrm{I}\,, \tag{۲}$$

که در آن λ دو بار پوشش دهندهٔ $\mathrm{Spin}(s,t) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{SO}(s,t)$ است. در صورتی که بخواهیم زمان نیز یکی از متغیرها باشد، به ویژگی‌های M شرط جهت‌پذیری زمان نیز اضافه می‌شود و در این حالت گروه اسپینی $\mathrm{Spin}(s,t)$ با گروه $\mathrm{Spin}^+(s,t)$ جایگزین می‌شود. مجموعهٔ $\tilde{t}_{ij}$ تعریف کنندهٔ یک کلاف اسپینی $S(M)$ روی M

[1] Ginsparg-Wilson
[2] Watamura-Watamura
[3] Grosse-Klimcik-Presnajder
[4] Balachandran
[5] Maurer-Cartan
[6] Orthochronous

است و در این حالت گفته می‌شود M یک ساختار اسپینی را قبول می‌کند؛ البته بسته به نوع انتخاب $\tilde{t}_{ij}$، ممکن است چندین ساختار اسپینی روی M داشته باشیم. در [۱۵] تعدادی از این ساختارهای اسپینی غیر معادل که توسط اعضای گروه کوهمولوژی $\mathrm{H}^1(M;\mathbb{Z}_2)$ دسته بندی می‌شوند، معرفی شده اند. در نظریهٔ کلاف‌های تاری، به کمک کلاس‌های مشخصه که اغلب زیر مجموعه‌هایی از کلاس‌های کوهمولوژی دورام هستند، کلاف‌های تاری و ویژگی‌های آنها دسته‌بندی می‌شوند. از کلاس‌های مشخصهٔ مهم می‌توان به کلاس چرن[1]، کلاس اویلر[2]، کلاس تاد[3]، کلاس پانترجاگین[4] و کلاس استیفل–ویتنی[5] اشاره کرد. هر کدام از این کلاس‌ها، ویژگی‌های خاصی از کلاف‌های تاری را دسته بندی می‌کنند که ویژگی پذیرش و عدم پذیرش یک ساختار اسپینی روی یک کلاف تاری، به کمک کلاس‌های اول W_1 و دوم W_2 استیفل– ویتنی مشخص می‌شود. کلاس‌های فوق مقادیر خود را به ترتیب در گروه کوهمولوژی $\mathrm{H}^1(M;\mathbb{Z}_2)$ و $\mathrm{H}^2(M;\mathbb{Z}_2)$ می‌پذیرند؛ به طوری که بدیهی بودن کلاس اول $W_1=0$ استیفل– ویتنی به معنای جهت‌پذیری خمینه و بدیهی بودن کلاس دوم $W_2=0$ به معنای پذیرش یک ساختار اسپینی مشخص روی یک خمینهٔ جهت پذیر است [۱۸–۱۶]. در اینجا بنا بر [۸، ۹ و ۱۸]، نشان داده شده است که برای فضای AdS^2 می‌توان یک ساختار اسپینی تعریف کرد و این به معنای بدیهی بودن کلاس دوم استیفل– ویتنی برای این فضا است، بنابراین خواهیم داشت:

$$W_2|_{\mathrm{AdS}^2}=0, \qquad (۳)$$

در نتیجه طبق رابطهٔ (۳) می‌توان مجموعهٔ $\tilde{t}_{ij}$ را برای فضای AdS^2 تعریف کرد که مشخص کنندهٔ یک ساختار اسپینی مشخص برای AdS^2 است.

مقاطع $\Gamma(S)$ چنین کلاف تاری با شرط (۳)، میدان‌های اسپینوری یا اسپینورها روی خمینهٔ AdS^2 نامیده می‌شوند. در نتیجه تحت یک فرایند فروکاهشی، کلاف مماسی $\mathrm{T}M$ را می‌توان به گروه زیر تقلیل داد:

$$\mathrm{O}(s)\times\mathrm{O}(t)\subset\mathrm{GL}(m)\ , \qquad (۴)$$

λ را دو بار پوشش دهنده و π_{Spin} را به عنوان ساختار اسپین روی M در نظر می‌گیریم. یک $\mathrm{Spin}(s,t)$–کلاف تاری اصلی به گونه‌ای تعریف می‌شود که نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(M)\times\mathrm{Spin}(s,t) \arrow[r] \arrow[d, "\Lambda\times\lambda"] & \mathrm{Spin}(M) \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Spin}}"] \arrow[d, "\Lambda"] & M \\
\mathrm{SO}(M)\times\mathrm{SO}(s,t) \arrow[r] & \mathrm{SO}(M) \arrow[r, "\pi_{\mathrm{SO}}"] & M,
\end{tikzcd}$$

شکل ۱. ساختار اسپینی M به عنوان فضای شبه ریمانی (s,t).

که در آن $\pi_{\mathrm{SO}}:\mathrm{SO}(M)\to M$ ، یک $\mathrm{Spin}(s,t)$–کلاف تاری کنجی است و Λ دو بار پوشش دهنده است. در واقع، گروه تقارنی برای خمینهٔ شبه ریمانی (M,g) با علامت (s,t)، گروه $\mathrm{SO}(M)$ است که گروه اسپینی $\mathrm{Spin}(M)$، دو بار پوشش دهندهٔ $\mathrm{SO}(M)$ است که در آن Λ، هم‌ریختی[6] پوششی میان این دو گروه است. از طرفی فضای مماس در هر نقطه از این خمینهٔ شبه ریمانی، فضای شبه اقلیدسی $\mathbb{R}^{s+t}$ است که گروه تقارنی این فضا $\mathrm{SO}(s,t)$ است. گروه اسپینی $\mathrm{Spin}(s,t)$، دو بار پوشش دهندهٔ $\mathrm{SO}(s,t)$ است که در آن λ هم ریختی پوششی میان این دو گروه است. در اینجا کنش‌های راست گروه‌های ساختاری روی کلاف‌های تاری اصلی را در نظر می‌گیریم.

نگاشت زیر یک نمایش اسپینوری را تعریف می‌کند:

$$\kappa:\mathrm{Spin}(s,t)\to\mathrm{GL}(\Delta)\ , \qquad (۵)$$

که در آن، Δ فضای نمایش اسپینورها است. بدین ترتیب، کلاف اسپینوری (کلاف دیراک) S، یک کلاف برداری مختلط وابسته است به طوری که:

$$S=\mathrm{Spin}(M)\times_{\kappa}\Delta\ , \qquad (۶)$$

[1] Chern Class
[2] Euler Class
[3] Todd Class
[4] Pontrjagin Class
[5] Stiefel-Whitney Class
[6] Homomorphism

اگر بعد خمینهٔ M زوج باشد، S به جمع مستقیم کلاف‌های اسپینوری مختلط وایل $S=S_+\oplus S_-$ تجزیه می‌شود:

$$S_{\pm}=\mathrm{Spin}(M)\times_{\kappa}\Delta^{\pm}\ , \tag{۷}$$

در این حالت، ضرب کلیفورد به همراه یک بردار $S_{\pm}$ را به $S_{\mp}$ می‌نگارد و نمایش القا شده روی جبر کلیفورد زوج به اسپینورهای وایل چپ- دست (مثبت) و راست- دست (منفی) تجزیه می‌شود:

$$\mathbb{C}\mathrm{l}^{0}(m)\xrightarrow{\cong}\mathrm{End}(\Delta_m^{+})\oplus\mathrm{End}(\Delta_m^{-})\ ,\ \Delta_m^{+}\cong\Delta_m^{-}\cong\mathbb{C}^{2^{\frac{m}{2}-1}}\ , \tag{۸}$$

با این حال، اگر بعد خمینهٔ M فرد باشد، نمایش القا شده روی جبر کلیفورد زوج، کاهش ناپذیر می‌شود:

$$\mathbb{C}\mathrm{l}^{0}(m)\xrightarrow{\cong}\mathrm{End}(\Delta_m)\ ,\ \Delta_m\cong\mathbb{C}^{2^{\frac{m-1}{2}}}\ , \tag{۹}$$

حال با توجه به روابط ساختاری گفته شده، می‌توان ξ-شبه عملگر دیراک $D:\Gamma(S)\to\Gamma(S)$ روی کلاف اسپینوری S را به صورت زیر تعریف کرد:

$$D\Psi=\eta^{ab}\hat{e}_a.\vec{\nabla}_{\hat{e}_b}\Psi\ , \tag{۱۰}$$

که در آن، Ψ عضوی از مقاطع $\Gamma(S)$ کلاف اسپینوری S است که اصطلاحاً آنها را میدان‌های اسپینوری می‌گویند و $\hat{e}_i$ معرف لنگه[1] (یا چند لنگه‌ای[2]) است. طبق رابطهٔ (۱۰) مشاهده می‌شود که عملگر دیراک بستگی به متریکی دارد که در آن فضا تعریف می‌شود. در نظریهٔ طیفی عملگرها که در این مقاله استفاده شده است، هدف حل معادلهٔ دیفرانسیل حاصل از عملگر مورد نظر (در اینجا دیراک) به منظور یافتن توابع موج نیست و لذا از این منظر، اثرات مرزی فضای AdS^2 آن چنان که باید خود را نشان نخواهند داد.

در بعدهای زوج، m، $\vec{\nabla}$ حافظ تجزیهٔ $S=S_+\oplus S_-$ است در حالی که ضرب کلیفورد زیر فضاهای $S_{\pm}$ را تغییر می‌دهد:

$$D:\Gamma(S_{\pm})\to\Gamma(S_{\mp})\ , \tag{۱۱}$$

در هر بعدی از m، متریک کلاف دیراک را به صورت $\langle .,.\rangle_S$ در نظر می‌گیریم:

$$\langle X.\Phi,\Psi\rangle_S=-\langle\Phi,X.\Psi\rangle_S\ ,\forall X\in TM,\ \forall\Phi,\Psi\in S. \tag{۱۲}$$

ضرب L^2-نرده‌ای اسپینورها روی فضای برداری مختلط مقاطع $\Gamma_0(S)$ از S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle .,.\rangle_{S,L^2}:\Gamma_0(S)\times\Gamma_0(S)\to C^{\infty}(M)\ , \tag{۱۳}$$

که

$$\langle\Phi,\Psi\rangle_{S,L^2}=\int_M\langle\Phi,\Psi\rangle_S\,\mathrm{dvol}_{\eta}\ , \tag{۱۴}$$

تحت این ضرب، عملگر دیراک ξ-شبه الحاقی بوده (در قسمت بعد، ξ معرفی خواهد شد) و ویژه مقادیر حقیقی با طیف گسسته و زوج‌های همیوغ- مختلط با طیف پیوسته دارد:

$$\langle D\Phi,\Psi\rangle_{S,L^2}=\left\langle\Phi,\xi D\xi^{\dagger}\Psi\right\rangle_{S,L^2}\ . \tag{۱۵}$$

برای نسخهٔ AdS^3 این ساختار، اگر زمان را در نظر نگیریم زوج (s,t) به صورت (۲,۱) ولی اگر زمان را در نظر بگیریم (۳,۱)است. در این مقاله، چون هدف مطالعهٔ دینامیک نبوده است، زمان در نظر گرفته نشده است ولی می‌توان با احتساب ساختار کلی که ذکر شد، زمان را نیز در نظر گرفت که احتساب زمان برای این ساختار، در حوزهٔ میدان‌های گرانشی [۱۷ و ۱۹] کاربرد دارد. در انتها، ذکر مطلبی در مورد عملگر تک دستی γ که جهت بررسی شرایط کن- لات، مورد نیاز خواهد شد، ضروری به نظر می‌رسد.

سه تایی طیفی $(\mathsf{A},\mathcal{H},D)$ زوج نامیده می‌شود هرگاه یک $\mathbb{Z}_2$-مدرج شده‌ای از $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد؛ یعنی یک عملگری $\gamma:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ با چنین ویژگی‌هایی که: $\gamma^*=\gamma$ و $\gamma^2=1$ به طوری که: $\gamma D+D\gamma=0$ و $\gamma a=a\gamma$ که $\forall a\in$ '؛ در غیراین صورت به این سه تایی طیفی، فرد گفته می‌شود. برای خمینه‌های با بعد فرد، عملگرهای تک دستی وجود ندارد و در این حالت عملگر دیراک فقط با ساختارهای دیفرانسیلی توصیف می‌شود.

۳. ξ-شبه عملگر دیراک در فضای AdS^2

نسخهٔ غیر فشردهٔ اولین نگاشت هوپف، به صورت زیر است:

[1] Bein
[2] Vielbein

$$\mathrm{AdS}^{۳} \xrightarrow{\mathrm{U}(۱)} \mathrm{AdS}^{۳}\big/_{\mathrm{S}^{۱}} \cong \mathrm{AdS}^{۲} \cong \mathrm{SO}(۲,۱)\big/_{\mathrm{SO}(۲)} \ , \quad \mathrm{SU}(۱,۱)\big/_{\mathbb{Z}_{۲}} \cong \mathrm{SO}(۲,۱) \ , \tag{۱۶}$$

از رابطهٔ (۱۶) ملاحظه می‌شود که $\mathrm{AdS}^{۲}$ را می‌توان به عنوان یک هم‌مجموعهٔ راست در نظر گرفت. فضاهای هم‌مجموعهٔ $G/_H$ اهمیت زیادی در فیزیک دارند که معروف‌ترین آنها S^N و $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ها هستند [۲۰]. از آنها درD–برین‌ها در نظریهٔ ریسمان‌ها، در نظریهٔ میدان‌های همدیس مرزی و همچنین برای توصیف مدهای گلدستون که در آن G در اثر شکست خود به خودی به H می‌شکنند، استفاده می‌شوند. اهمیت استفاده از این فضاها برای محاسبهٔ ξ–شبه عملگر دیراک و مسئلهٔ ویژه مقداری آن در این است که، این ξ–شبه عملگر و طیف آن، شکل ساده و منحصر به فردی را بر حسب جملاتی از نظریهٔ نمایش به خود می‌گیرند. برای این منظور انتخاب و استفاده از فضاهای هم مجموعهٔ راست $G/_H$ و یا چپ $G\setminus H$ به دلیل معادل بودن آنها، اختیاری است ولی هنگامی که یکی از این دو را انتخاب کنیم، کنش‌های چپ و راست آنها از هم متمایز می‌شوند.

اعضای $g \in \mathrm{SU}(۱,۱)$ گروه غیر فشردهٔ $\mathrm{SU}(۱,۱)$ به گونه‌ای تعریف می‌شوند که در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$g^{\dagger}\sigma_{۳}g = \sigma_{۳} \ , \ \det(g) = ۱ \ , \tag{۱۷}$$

در نتیجه نمایش ماتریسی اعضای گروه $\mathrm{SU}(۱,۱)$ به صورت زیر در خواهد آمد:

$$g = \begin{pmatrix} u & v^{*} \\ v & u^{*} \end{pmatrix} \ , \ uu^{*} - vv^{*} = ۱ \ , \tag{۱۸}$$

از آنجایی که گروه $\mathrm{SU}(۱,۱)$ غیر فشرده است، نمایش یکانی آن نامتناهی بعد است که برای متناهی بعد کردن نمایش، مجبوریم نمایش غیر یکانی از آن را توسط مولدهایی κ_i که از جنس ماتریس‌های ξ–شبه الحاقی هستند و در جبر لی $\mathrm{su}(۱,۱)$ صدق می‌کنند، در نظر بگیریم:

$$\left[\kappa_i,\kappa_j\right] = ۲\mathrm{i}C_{ij}^{k}\kappa_k \ , \tag{۱۹}$$

که در آن C_{ij}^{k} ثابت‌های ساختار بوده و تماما پادمتقارن است $C_{ij}^{k} = \eta^{kl}C_{ijl}$ و در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$C_{im}^{k}\eta^{ij}C_{jl}^{n} = \eta_m^n\eta_l^k - \eta_{ml}\eta^{kn} \ , \ C_{۱۲۳} = +۱ \ , \tag{۲۰}$$

مولدهای جبر لی $\mathrm{su}(۱,۱)$ نسبت به ξ شبه الحاقی هستند:

$$\kappa_i^{\dagger} = \xi\kappa_i\xi^{-۱} \ , \ \xi^{\dagger} = \xi \ , \ \xi^{۲} = \mathrm{I} \ , \ \xi^{\dagger} = \xi^{-۱} \ , \tag{۲۱}$$

در نتیجه، رابطهٔ جابه‌جاگری (۱۹) برای مولدهای $\kappa_i^{\dagger}$ نیز صادق است که باعث می‌شود ساختار ξ–شبه الحاقی جبر لی $\mathrm{su}(۱,۱)$، با همین جبر روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ کنش کند. برای هر نمایش کاهش ناپذیر یکانی متناهی بعد از یک گروه لی نیم سادهٔ فشردهٔ $\mathrm{SU}(۲)$ ناگزیر می توان نمایش را به طور تحلیلی به یک نمایش غیریکانی متناهی بعد از یک گروه لی نیم سادهٔ غیرفشردهٔ $\mathrm{SU}(۱,۱)$ ادامه داد. هر دو گروه $\mathrm{SU}(۲)$ و $\mathrm{SU}(۱,۱)$ به طور مشترک زیر گروه بیشینهٔ[۱] فشردهٔ $\mathrm{U}(۱)$ و یک گروه لی مختلط سازی شدهٔ $\mathrm{SL}(۲,\mathbb{C})$ دارند. نمایش کاهش ناپذیر با کمترین بعد جبرلی $\mathrm{su}(۲)$ را که توسط ماتریس‌های پاولی نمایش داده می‌شود، در نظر می‌گیریم؛ لذا می‌توان یک نمایش غیریکانی دو بعدی از جبرلی $\mathrm{su}(۱,۱)$ را به همراه جبر کلیفورد میان این مولدها، به صورت زیر از روی آنها ساخت:

$$\kappa_{۱} = \mathrm{i}\sigma_{۱} \ , \ \kappa_{۲} = \mathrm{i}\sigma_{۲} \ , \quad \kappa_{۳} = \sigma_{۳} \ , \ \left\{\kappa_i,\kappa_j\right\} = -۲\eta^{ij}\mathrm{I} \ , \tag{۲۲}$$

در اینجا برای سامانهٔ اسپین $\frac{۱}{۲}$ ، $\xi = \kappa_{۳}$ خواهد بود. در نتیجه به کمک این ساختار ξ–شبه الحاقی، برای هر Ψ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ خواهیم داشت: $\bar{\Psi} = \Psi^{\dagger}\xi$ و همچنین می‌توان ضرب داخلی نامعین $*$ را برای هر دو عضو دلخواه Ψ و Φ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ معرفی کرد که در آن $\Psi * \Phi = \bar{\Psi}\Phi$ خواهد بود (رابطهٔ (۱۴)). فضای هیلبرتی که مجهز به چنین ضرب داخلی باشد، فضای کرین[۲] نام دارد [۲۱ و ۲۲].

فضای کل $\mathrm{AdS}^{۳}$ غوطه ور در فضای $\mathbb{C}^{۲}$ و فضای پایهٔ $\mathrm{AdS}^{۲}$ غوطه‌ور در فضای $\mathbb{R}^{۲+۱}$ با مختصات $\vec{x} = (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳})$ است، لذا می‌توان آن را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mathrm{AdS}^{۳} = \left\{(z_{۱},z_{۲}) \in \mathbb{C}^{۲} \ , \ |z_{۱}|^{۲} - |z_{۲}|^{۲} = -۱\right\} \ , \tag{۲۳}$$

[۱] Maximal
[۲] Krein

تحت نگاشت هوپف (۱۶)، ارتباط میان مختصات فضای کل AdS^3 با فضای پایهٔ AdS^2 به صورت زیر است:

$$x_i=\phi^{\dagger}\kappa_3\kappa_i\phi \ , \ \phi=\begin{pmatrix}\overline{z}_2\\ -i\overline{z}_1\end{pmatrix} \ , \ \overline{\phi}\phi=\phi^{\dagger}\kappa_3\phi=1 \ , \ \vec{x}.\vec{x}=-1 \ , \tag{۲۴}$$

که شکل صریح این مختصات به صورت زیر خواهد بود:

$$x_1=z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1 \ , \ x_2=i(z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1) \ , \ x_3=|z_1|^2+|z_2|^2 \ , \tag{۲۵}$$

بنابراین با توجه به روابط گفته شده، شکل ماتریسی (۱۸) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$g=\begin{pmatrix}\overline{z}_2 & iz_1\\ -i\overline{z}_1 & z_2\end{pmatrix} \ , \ |z_2|^2-|z_1|^2=1 \ , \tag{۲۶}$$

کنش‌های راست و چپ $L,R:G\times G\to G, \ (\alpha,g)\mapsto L_{\alpha}g,R_{\alpha}g$ سازگار یعنی: ، $L_g\circ L_{\alpha}=L_{g\alpha}, \ R_g\circ R_{\alpha}=R_{g\alpha}$، با $\mathrm{SU}(1,1)$ را نیز می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$L_{\alpha}g:=\alpha g \ \ ,R_{\alpha}g:=g\alpha^{-1} \ , \tag{۲۷}$$

بارگمان در مقالهٔ [۲۳] نشان داده است که فضای هیلبرت توابع انتگرال پذیر مجذوری روی $\mathrm{SU}(1,1)$ توسط سری‌های پیوستهٔ اساسی و گسستهٔ مثبت تولید می‌شود. طبق یک قضیهٔ اثبات شده در مراجع [۲۳ و ۲۴] و با توجه به روابط (۲۷) می‌توان برای یک تابع دیفرانسیل پذیر مانند $f:SU(1,1)\to\mathbb{C}$ ، عملگرهای دیفرانسیلی کنش راست و چپ را با رابطه‌های (۳۱) تعریف کرد که بسط فوریهٔ آنها به صورت زیر است:

$$f(g)=\sum_{\sigma}\left\{\begin{matrix}\left[\sum_{2l=0}^{\infty}(2l+1)+\int_0^{\infty}\mathrm{d}\rho\, 2\rho\, tanh\,\pi(\rho+i\sigma)\right]\times\\ \sum_{mn}\hat{f}_{mn}(l)d^{l,\sigma}_{nm}(g)\end{matrix}\right\} \ , \tag{۲۸}$$

که در آن

$$\hat{f}_{mn}(l)=\int_{\mathrm{SU}(1,1)}\mathrm{d}g \ f(g)\, d^{l,\sigma *}_{nm}(g) \ , \tag{۲۹}$$

به همراه شرط تعامد

$$\int_{\mathrm{SU}(1,1)}d^{l',\sigma}_{m'n'}(g)\, d^{l,\sigma *}_{mn}(g)\,\mathrm{d}g=\begin{cases}\dfrac{\delta_{ll'}}{2l+1}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \ ; \ \sigma=(+,-)\\ \dfrac{\delta(\rho-\rho')}{2\rho\, tanh\,\pi(\rho+i\sigma)}\delta_{mm'}\delta_{nn'} \ ; \ \sigma=(0,\frac{1}{2})\end{cases}, \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}&i\mathsf{L}_i f(g):=\frac{\mathrm{d}f(exp(-is\kappa_i)g)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \ ,\\ &i\mathsf{R}_i f(g):=\frac{\mathrm{d}f(g\, exp(+is\kappa_i))}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} \ ,\end{aligned} \tag{۳۱}$$

این عملگرهای دیفرانسیلی نیز در جبر لی $\mathrm{su}(1,1)$ صدق می‌کنند:

$$\left[\mathsf{L}_i,\mathsf{L}_j\right]=2iC^k_{ij}\mathsf{L}_k \ ,\left[\mathsf{R}_i,\mathsf{R}_j\right]=2iC^k_{ij}\mathsf{R}_k \ , \tag{۳۲}$$

همچنین آنها را می‌توان توسط اعضای گروه $\mathrm{SU}(1,1)$ و مولدهای جبر $\mathrm{su}(1,1)$، با روابط زیر بیان کرد:

$$\mathsf{L}_i=-\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\kappa_i g\frac{\partial}{\partial g^{\mathrm{T}}}) \ , \ \mathsf{R}_i=\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(g\kappa_i\frac{\partial}{\partial g^{\mathrm{T}}}) \ , \tag{۳۳}$$

این عملگرها با شکل‌های راست و چپ مورر–کارتان $\theta_R,\theta_L\in\Omega^1(\mathrm{SU}(1,1))\otimes\mathrm{su}(1,1)$ به صورت زیر، دوگان هستند:

$$\begin{aligned}&\theta_L=-(\mathrm{d}g)g^{-1} \ ,\theta_R=g^{-1}(\mathrm{d}g) \ ,\\ &\left\langle\theta_L,\mathsf{L}_i\right\rangle=\left\langle\theta_R,\mathsf{R}_i\right\rangle=\tfrac{1}{2}c\kappa_i \ ,\end{aligned} \tag{۳۴}$$

که در آن مقدار c برای $i=1,2$ برابر -1 و برای $i=3$ برابر $+1$ است. با توجه به روابط ذکر شده، به وضوح می‌توان دید:

$$\begin{aligned}&\theta_L=-\begin{pmatrix}z_2\mathrm{d}\overline{z}_2-\overline{z}_1\mathrm{d}z_1 & -iz_1\mathrm{d}\overline{z}_2+i\overline{z}_2\mathrm{d}z_1\\ -iz_2\mathrm{d}\overline{z}_1+i\overline{z}_1\mathrm{d}z_2 & -z_1\mathrm{d}\overline{z}_1+\overline{z}_2\mathrm{d}z_2\end{pmatrix} \ ,\\ &\theta_R=\begin{pmatrix}z_2\mathrm{d}\overline{z}_2-z_1\mathrm{d}\overline{z}_1 & -iz_1\mathrm{d}z_2+iz_2\mathrm{d}z_1\\ -i\overline{z}_2\mathrm{d}\overline{z}_1+i\overline{z}_1\mathrm{d}\overline{z}_2 & -\overline{z}_1\mathrm{d}z_1+\overline{z}_2\mathrm{d}z_2\end{pmatrix} \ ,\end{aligned} \tag{۳۵}$$

شکل متریک فضا نیز به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\theta_L)^2]\\ &=-\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\theta_R)^2]=\mathrm{d}z_2\mathrm{d}\overline{z}_2-\mathrm{d}z_1\mathrm{d}\overline{z}_1 \ ,\end{aligned} \tag{۳۶}$$

با تعریف $\mathsf{R}_{\pm}=\mathsf{R}_1\pm i\mathsf{R}_2$ ، $\mathsf{L}_{\pm}=\mathsf{L}_1\pm i\mathsf{L}_2$، $\kappa_{\pm}=\frac{1}{2}(\kappa_1\pm i\kappa_2)$، $\mathsf{R}_3=\mathsf{R}_0$، $\mathsf{L}_3=\mathsf{L}_0$ و $\kappa_3=\kappa_0$ ، عملگرهای دیفرانسیلی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\mathsf{L}_+=-\overline{z}_1\overline{\partial}_2-z_2\partial_1 \ ,\mathsf{L}_-=\overline{z}_2\overline{\partial}_1+z_1\partial_2 \ ,\\ &\mathsf{L}_0=-\tfrac{1}{2}[\overline{z}_2\overline{\partial}_2+z_1\partial_1-\overline{z}_1\overline{\partial}_1-z_2\partial_2] \ ,\end{aligned} \tag{۳۷}$$

و

$$\begin{aligned}&\mathsf{R}_+=\overline{z}_2\partial_1+\overline{z}_1\partial_2 \ ,\mathsf{R}_-=-z_1\overline{\partial}_2-z_2\overline{\partial}_1 \ ,\\ &\mathsf{R}_0=-\tfrac{1}{2}[-\overline{z}_2\overline{\partial}_2+z_1\partial_1-\overline{z}_1\overline{\partial}_1+z_2\partial_2] \ ,\end{aligned} \tag{۳۸}$$

که می‌توان نشان داد، مؤلفه‌های $\vec{\mathsf{L}}=(\mathsf{L}_1,\mathsf{L}_2,\mathsf{L}_3)$ منطبق بر تکانهٔ زاویه‌ای $\mathsf{L}_i\to -iC^k_{ij}x^j\partial_k$ در فضای AdS^2 است. [۴]

-شبه عملگر دیراک به کمک این عملگرهای دیفرانسیلی راست و چپ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D_L = \kappa_i{}'_i - 1 \ , \quad D_R = \kappa_+{}'_- + \kappa_-{}'_+ \ , \quad i = 1,2,3 \ , \tag{۳۹}$$

ξ-شبه عملگر D_L جملهٔ جفت شدگی اسپین- مدار دارد در حالی که این جمله در ξ-شبه عملگر D_R در تعریف R مستتر شده است. ξ-شبه عملگر D_L روی اسپینورهای $C^\infty(\mathrm{AdS}^2,\mathbb{C})$ مقداره کنش می‌کند در حالی که ξ-شبه عملگر D_R روی حلقهٔ شکل‌های آنتی هولومورفیک اسپینور مقداره کنش می‌کند. هر دوی این ξ-شبه عملگرهای D_L و D_R از نظر کن-لات، با هم معادل هستند، ولی در فیزیک اغلب ξ-شبه عملگر D_L به دلیل داشتن جملهٔ صریحی از جفت شدگی اسپین- مدار و همچنین به خاطر کنش روی اسپینورهای هولومورفیک $C^\infty(\mathrm{AdS}^2,\mathbb{C})$ اهمیت دارد و اکثر روش‌ها جهت ساخت این ξ-شبه عملگر معرفی شده‌اند. پس خواهیم داشت:

$$\{D_L,\gamma\} = 0 \ , \ \{D_R,\gamma\} = 0 \ , \tag{۴۰}$$

که در آن ξ-شبه عملگر تک دستی γ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma = \kappa_i x_i \ , \quad i = 1,2,3 \ , \tag{۴۱}$$

البته شایان توجه است که ξ-شبه عملگرهای راست و چپ دیراک متناظر با زیر فضاهای $S_\pm$ به صورت $D_L^\pm := \pm D_L$ و $D_R^\pm := \pm D_R$ قابل بیان می‌شوند و ξ-شبه عملگر تک دستی نیز به صورت $\gamma^\pm := \pm\gamma$ ظاهر می‌شود. بنابراین همهٔ این عملگرها در ساختار ξ-شبه الحاقی زیر صدق خواهند کرد:

$$D_{L,R}^{\pm\,\dagger} = \kappa_3 D_{L,R}^{\pm} \kappa_3^{-1} \ , \quad \gamma^{\pm\dagger} = \kappa_3 \gamma^{\pm} \kappa_3^{-1} \ , \tag{۴۲}$$

و

$$D|_L = D_L^+ \oplus D_L^- \ , \ D|_R = D_R^+ \oplus D_R^- \ . \tag{۴۳}$$

بنابراین شکل کلی ξ-شبه عملگر دیراک در فضای کل اسپینوری مختلط وایل $S = S_+ \oplus S_-$ به یکی از دو صورت معادل (۴۳) خواهد بود.

۴. طیف

همچنان که اشاره شد، مقالهٔ حاضر بر پایهٔ نظریهٔ طیفی عملگرها نوشته شده است که در آن هدف حل معادلهٔ ویژهٔ مقداری نیست، لذا طیف محاسبه شده، طیف انرژی ذره یا سیستم نیست، چرا که اساساً ذره‌ای وجود ندارد و عملگر دیراک و طیف آن برای فضای AdS^2 محاسبه شده است. لازم به ذکر است که طیف هندسی محاسبه شده کاربردهایی هندسی از جمله در محاسبهٔ شاخص[1] عملگر دیراک دارد.

نمایش‌های کاهش ناپذیر جبر لی $\mathrm{su}(1,1)$ در چهار دسته، طبقه بندی شده اند. دو مورد اول از این دسته بندی، مربوط به نمایش سری‌های گسستهٔ اصلی مثبت و منفی و دو مورد دوم، مربوط به نمایش سری‌های پیوستهٔ اصلی و مکمل است. طبق قضیهٔ اشاره شدهٔ بارگمان، فضای هیلبرت توابع انتگرال پذیر مجذوری روی $\mathrm{SU}(1,1)$ توسط این سری‌های گسسته و پیوستهٔ اصلی به ازای $j \geq 0$ پوشش داده می‌شوند. بحث کامل در این مورد در مراجع [۹، ۲۲-۲۵] براورده شده است. در اینجا ما طیف از نوع گسسته و مثبت را با ویژه مقادیر حقیقی محاسبه خواهیم کرد. برای محاسبهٔ طیف گسستهٔ ξ-شبه عملگر دیراک (۳۹)، نیاز به محاسبهٔ ویژه مقادیر عملگر کازیمیر جبر $\mathrm{su}(1,1)$ داریم. عملگر کازیمیر جبر $\mathrm{su}(1,1)$ به صورت زیر است:

$$C_{\mathrm{su}(1,1)} = \eta^{ij}\kappa_i\kappa_j = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \kappa_3^2 \ , \tag{۴۴}$$

ویژه مقادیر این عملگر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\zeta_{C_{\mathrm{su}(1,1)}} = j(1-j) \ , \tag{۴۵}$$

که در آن شروع این ویژه مقادیر از ۱ است، یعنی: $j = 1, \frac{3}{2}, \ldots$

از طرفی تکانهٔ زاویه‌ای کل در این فضا به صورت زیر است:

$$\vec{J} = \vec{\mathrm{L}} \oplus \vec{\Sigma} \ , \quad \Sigma_i = \tfrac{1}{2}\kappa_i \ , \tag{۴۶}$$

در نتیجه طیف گسستهٔ ξ-شبه عملگر دیراک به کمک روابط (۳۹) و (۴۴) تا (۴۶) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathrm{Spec}\left(D_L^\pm := D^\pm\right) = \left\{\pm\left(j(1-j) + l(l-1) - \tfrac{5}{4}\right) \mid l = 1,\tfrac{3}{2},\ldots \ ; \ j = \tfrac{3}{2},2,\ldots\right\} \ , \tag{۴۷}$$

[1] Index

و یا

$$\mathrm{Spec}\left(D_L^{\pm} := D^{\pm}\right) = \pm\begin{cases} j-\frac{۳}{۲} & ;\ l=j+\frac{۱}{۲} \\ -(j+\frac{۱}{۲}) & ;\ l=j-\frac{۱}{۲} \end{cases} , \quad (۴۸)$$

لذا مشاهده می‌شود که طیف ξ–شبه عملگر دیراک روی $\mathrm{AdS}^۲$ فقط به مقدار j بستگی دارد و این طیف، تبهگن است. همچنین خواهیم داشت:

$$\eta_{ab} J^a J^b \left| j,m_j \right\rangle = j(۱-j)\left| j,m_j \right\rangle , \quad J_۳\left| j,m_j \right\rangle = m_j \left| j,m_j \right\rangle , \quad (۴۹)$$

و

$$\mathcal{H}^{\pm}(j) = \left\{ \left| j,m_j \right\rangle \ \middle| \ j>۰ \ ,\ m_j = \pm j, \pm(j+۱),\ldots \right\} , \quad (۵۰)$$

که در آن رابطهٔ (۵۰) فضای هیلبرت متناظر با ویژه حالت‌های رابطهٔ (۴۹) است. با به‌دست آمدن رابطهٔ (۵۰) می‌توان تجزیهٔ حاصل ضرب تانسوری نمایش‌های گسستهٔ مثبت و منفی جبر لی $\mathrm{su}(۱,۱)$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathcal{H}^{\pm}(j)\otimes\mathcal{H}^{\pm}(s) \cong \bigoplus_{l\geq j+s} \mathcal{H}^{\pm}(l) . \quad (۵۱)$$

۵. ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای

از لحاظ ریاضیاتی جهت پیمانه‌ای‌سازی کلاف اسپینوری S نیاز است تا آن را با کلاف برداری وابستهٔ[1] E بپیچانیم[2]. کلاف حاصل $S\otimes E$، کلاف اسپینوری پیچانده شده یا کلاف اسپینوری چندگانهٔ پیمانه‌ای[3] نامیده می‌شود. در این صورت روابط (۱۰) تا (۱۵) برای این کلاف پیمانه‌ای نیز برقرار است و کافی است تا جایگزینی‌های $S\to S\otimes E$، $\vec{\nabla}\to\vec{\nabla}^A$ و $D\to D^A$ را در این روابط، اعمال کنیم (A، ۱– فرم التصاق روی کلاف تاری اصلی است). بنابراین، می‌توان ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای را به صورت زیر نوشت:

$$D^{A,\pm} : \Gamma(S_{\pm}\otimes E_{\pm}) \to \Gamma(S_{\mp}\otimes E_{\pm}) , \quad (۵۲)$$

که در آن کلاف برداری وابستهٔ E به صورت زیر و بر حسب برچسب صحیحی از n است که نمایانگر نمایش‌های کاهش ناپذیر گروه $\mathrm{U}(۱)$ روی اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است،

$$E^{(n)} = \mathrm{AdS}^۳ \times_{\mathrm{U}(۱)} \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathrm{AdS}^۲ , \quad (۵۳)$$

دلیل این برچسب گذاری نیز ناشی از این واقعیت است که می‌توان اعضای $C_n^{\infty}(\mathrm{AdS}^۳,\mathbb{C})$ را به صورت زیر، به مدول‌های راست دسته‌بندی کرد:

$$C_n^{\infty}(\mathrm{AdS}^۳,\mathbb{C}) = \left\{ \mathrm{AdS}^۳ \xrightarrow{\tau} \mathbb{C} \ \middle| \ \tau(p.\delta) = \delta^{-n}.\tau(p) , \forall p\in\mathrm{AdS}^۳ , \forall\delta\in\mathrm{U}(۱) \right\} , \quad (۵۴)$$

کلاف اسپینوری زیر

$$(S\otimes E)_+ : \Gamma(S_+\otimes E_+) \to \Gamma(S_-\otimes E_-) , \quad (۵۵)$$

کلاف اسپینوری پیچانده شدهٔ تک دست نام دارد. همچنین کلاف زیر را نیز خواهیم داشت:

$$(S\otimes E)_- : \Gamma(S_-\otimes E_+) \to \Gamma(S_+\otimes E_-) , \quad (۵۶)$$

مقطع این کلاف اسپینوری پیچانده شدهٔ تک دست نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi = \psi_+ + \psi_- , \quad (۵۷)$$

که در آن

$$\psi_{\pm} : \mathrm{AdS}^۲ \to (S_{\pm}\otimes E_{\pm}) . \quad (۵۸)$$

نتیجهٔ چنین ساختار پیمانه‌ای ذکر شده، منجر به اضافه شدن میدان پیمانه‌ای $\vec{A}$ (بدون جفت شدگی اینستنتون) به قسمت اوربیتالیه ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{\nabla} \to \vec{\nabla}^A := \vec{\nabla}(\vec{A}) = \vec{\mathrm{L}} + \vec{A} , \quad (۵۹)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$D^{A,\pm} := D^{\pm}(\vec{A}) = \pm\left(\vec{\kappa}.(\vec{\mathrm{L}}+\vec{A}) - ۱\right) , \quad (۶۰)$$

که در آن ξ–شبه عملگر تک دستی پیمانه‌ای $\gamma(\vec{A})$، همچنان از رابطهٔ (۴۱) به‌دست می‌آید.

[1] Associated Vector Bundle
[2] Twisted
[3] Gauge Multiplet Spinor Bundle

رابطهٔ (۶۰) یک رابطهٔ کلی است ولی برای سهولت در محاسبهٔ طیف آن، پیمانهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{x}.\vec{A} = x_i\eta^{ij}A_j = 0 \ , \tag{۶۱}$$

میدان $\vec{A}$، یک میدان آبلی است که مؤلفه‌های آن A_i، مماس بر فضای AdS^2 هستند. به شرطی روی مشتق هموردای (۵۹) نیاز داریم تا تحت آن، پیمانهٔ (۶۱) برقرار شود. یکی از شروط به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{\mathsf{L}}+\vec{A}\right).\left(\vec{\mathsf{L}}+\vec{A}\right)=\left(\mathsf{L}_i+A_i\right)\eta^{ij}\left(\mathsf{L}_j+A_j\right)=\\&\vec{\mathsf{L}}.\vec{\mathsf{L}}=\mathsf{L}_i\eta^{ij}\mathsf{L}_j=l(1-l) \ ,\end{aligned} \tag{۶۲}$$

که در آن، برای برقراری رابطهٔ (۶۲) باید رابطهٔ زیر صفر شود:

$$\mathsf{L}_i\eta^{ij}A_j + A_i\eta^{ij}\mathsf{L}_j + A_i\eta^{ij}A_j = 0 \ , \tag{۶۳}$$

نتیجهٔ انتخاب چنین پیمانه‌ای باعث می‌شود که اضافه شدن میدان پیمانه‌ای $\vec{A}$ تاثیری روی طیف ξ–شبه عملگر دیراک نداشته باشد و در نتیجه، طیف ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای (۶۰) نیز همچنان از روابط (۴۷) یا (۴۸) به‌دست خواهد آمد. همچنین می‌توان گفت، تبهگنی در حضور میدان پیمانه‌ای $\vec{A}$ همچنان حفظ شده است.

برای تغییر در طیف رابطهٔ (۶۰) باید جفت شدگی اینستنتون را نیز در نظر بگیریم، نتیجهٔ چنین جفت شدگی باعث تغییر در طیف ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای (و همچنان با حفظ تبهگنی) خواهد شد. برای این منظور ابتدا باید مشتق هموردای مناسب اختیار شود:

$$\vec{\nabla} \to \vec{\nabla}^{A,K} := \vec{\nabla}(\vec{A},\vec{K}) = \vec{\mathsf{L}} + \vec{K} + \vec{A} \ , \tag{۶۴}$$

در مشتق هموردای (۶۴)، از منظر فیزیکی اضافه شدن $\vec{K}$ به $\vec{\mathsf{L}}$، حالت جبری اختلاط اسپین با ایزواسپین یا همان جمع تکانه‌های زاویه‌ای است، و از منظر هندسی، این مشتق شامل تغییرات فضای پایه و فضای داخلی تارها است. به عبارتی دیگر، $\vec{\mathsf{L}}$ عملگر تغییرات روی فضای پایه و $\vec{K}$ و $\vec{A}$ معرف تغییرات در تارهای کلاف اسپینوری S است [۲۸–۲۶]. در نتیجه خواهیم داشت:

$$D^{\pm}(\vec{A},\vec{K}) = \pm\left(\vec{\kappa}.(\vec{\mathsf{L}}+\vec{K}+\vec{A})-1\right) \ , \tag{۶۵}$$

دوباره برای محاسبهٔ طیف، پیمانهٔ (۶۱) را در نظر می‌گیریم که این بار، شرط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{\mathsf{L}}+\vec{K}+\vec{A}\right).\left(\vec{\mathsf{L}}+\vec{K}+\vec{A}\right)=\left(\mathsf{L}_i+K_i\right)\eta^{ij}\left(\mathsf{L}_j+K_j\right)=\\&\left(\vec{\mathsf{L}}+\vec{K}\right).\left(\vec{\mathsf{L}}+\vec{K}\right)=(l\pm k)(1-l\mp k) \ ,\end{aligned} \tag{۶۶}$$

که در آن، برای برقراری رابطهٔ (۶۶) باید رابطهٔ زیر صفر شود:

$$\left(\mathsf{L}_i+K_i\right)\eta^{ij}A_j + A_i\eta^{ij}\left(\mathsf{L}_j+K_j\right) + A_i\eta^{ij}A_j = 0 \ , \tag{۶۷}$$

ξ–شبه الحاقی بودن عملگر دیراک، منجر به ξ–شبه الحاقی شدن میدان‌های پیمانه‌ای، اینستنتونی و مشتق هموردا می‌شود:

$$\begin{aligned}&A_i^{\dagger}=\kappa_3A_i\kappa_3^{-1} \ , \ K_i^{\dagger}=\kappa_3K_i\kappa_3^{-1} \ ,\\&\left(\nabla_i(\vec{A},\vec{K})\right)^{\dagger}=\kappa_3\nabla_i(\vec{A},\vec{K})\kappa_3^{-1} \ ,\\&\left(\nabla_i(\vec{A})\right)^{\dagger}=\kappa_3\nabla_i(\vec{A})\kappa_3^{-1} \ ,\end{aligned} \tag{۶۷}$$

در نتیجه به کمک این روابط، طیف ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای (۶۵) خواهد شد:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Spec}\left(D^{\pm}(\vec{A},\vec{K})\right)=\\&\left\{\pm\left(j(1-j)+(l\pm k)(l\pm k-1)-\tfrac{5}{4}\right)\middle| l=1,\tfrac{3}{2},\dots \ ; \ j=k+\tfrac{3}{2},\dots\right\} \ ,\end{aligned} \tag{۶۸}$$

و یا

$$\mathrm{Spec}\left(D^{\pm}(\vec{A},\vec{K})\right)=\pm\begin{cases}j-\tfrac{3}{2} & ; \ l=j-k+\tfrac{1}{2}\\-(j+\tfrac{1}{2}) & ; \ l=j+k-\tfrac{1}{2}\end{cases} \ , \tag{۶۹}$$

که در آن ξ–شبه عملگر تک دستی پیمانه‌ای در حضور اینستنتون $\gamma(\vec{A},\vec{K})$ نیز، همچنان از رابطهٔ (۴۱) به‌دست می‌آید. طیف رابطهٔ (۷۰)، طیف ξ–شبه عملگر دیراک پیمانه‌ای در حضور اینستنتون برای فضای AdS^2 است و نه طیف انرژی برای ذره‌ای که در این فضا حرکت می‌کند. طیف هندسی محاسبه شده کاربردهایی هندسی از جمله در محاسبهٔ شاخص عملگر دیراک دارد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، نشان دادیم که فقط برای فضاهای دارای ساختار اسپینی می‌توان عملگر دیراک تعریف کرد و از آن جمله فضاها، فضای AdS^2 است. سپس به کمک نظریهٔ گروه و شکل‌های مورر–کارتان، ξ–شبه عملگر دیراک در فضای AdS^2 محاسبه

شد. این ξ-شبه عملگر دقیقاً منطبق بر ξ-شبه عملگر دیراکی است که قبلاً به کمک ξ-شبه جبر گینسپارک- ویلسون و به کمک ξ-شبه مدول‌های تصویری، به‌دست آمده در مقالات بود، است. همچنین نشان داده شد که دو ξ-شبه عملگر دیراک معادل، در این فضای AdS^2 موجود بودند که در شرایط کن-لات صدق می‌کردند. در انتها نیز مشاهده شد که بعد از پیمانه‌ای سازی کلاف اسپینوری و محاسبهٔ طیف ξ-شبه عملگر دیراک در حالت اینستنتونی و بدون اینستنتون، تبهگنی ξ-شبه عملگر دیراک همچنان در این شرایط نیز حفظ می‌شود.

مراجع

1. A Connes, “*Noncommutative geometry*”, Academeic Press, New York (1994).
2. A Connes, “*Non-commutative Geometry and Physics in Gravitation and Quantization*”, Les Houches, Session LVII, Elsevier, Amsterdam (1995).
3. U Carow-Watamura and S Watamura, *Commun. Math. Phys.* **183** (1997) 365.
4. A P Balachandran, G Immirzi, *Phys. Rev.* D **68** (2003) 065023.
5. A P Balachandran and Pramod Padmanabhan, *JHEP* **09** (2009) 120.
6. A P Balachandran, T R Govindarajan and B Ydri, *Mod. Phys. Lett.* A **15** (2000) 1279.
7. H Aoki, S Iso and K Nagao, *Phys. Rev.* D **67** (2003) 085005.
8. H Fakhri and M Lotfizadeh, *JMP* **52** (2011) 103508.
9. Hossein Fakhri and Ali Imaanpur, *J. High Energy Phys.* **03** (2003) 003.
10. U Carow-Watamura and S Watamura, *Int. J. Mod. Phys.* A **13** (1998) 3235.
11. H Grosse, C Klimcik and P Presnajder, *Commun. Math. Phys.* **178** (1996) 507.
12. H Grosse and P Presnajder, *Lett. Math. Phys.* **33** (1995) 171.
13. A Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 205 ; e-print [math-ph/0107001].
14. A Mostafazadeh, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 3944; e-print [math-ph/0203005].
15. J Milnor, *L’Ens. Math.* **9** (1963) 198.
16. C J Isham and C N Pope, *Physics Letters.* B **114** (1982) 137.
17. S J Avis and C J Isham, *Commun. Math. Phys.* **72** (1980) 103.
18. H R Alagia and C U Sanchez, *Union Mathematica Argentina.* **32** (1985) 64.
19. L Fatibene and M Francaviglia, *Acta Physica Polonica* B **29** (1998) 915.
20. A P Balachandran, Giorgio Immirzi, Joohan Lee and Peter Presnajder, *Journal of Mathematical Physics* **44** (2003) 4713.
21. T Ya Azizov and I S Iokhvidov, “*Linear Operators in Spaces with an Indefinite metric*”, Wiley-Interscience, New York (1989); A Dijksma and H. Langer, “*Operator Theory and Ordinary Differential Operators*”, in A Bottcher (ed.) et. al., *RI, Am. Math. Soc. Fields Institute Monographs,* **3** (1996) 75.
22. Mohammad Enayati, Jean-Pierre Gazeau, Hamed Pejhan and Anzhong Wang, “*The de Sitter group and its representations: a window on the notion of de Sitterian elementary systems*”, Springer (2022).
23. V Bargmann, *Ann. Math*. **48** (1947) 568.
24. Manfred Bohm and Georg Junker, *Journal of Mathematical Physics* **28** (1987) 1978.
25. K Hasebe, *Phys. Rev.* D **78** (2008) 125024.
26. A P Balachandran, S Kürkçüoglu, and S Vaidya, “*LECTURES ON FUZZY AND FUZZY SUSY PHYSICS*”, World Scientific, Singapore (2007).
27. R Jackiw and C Rebbi, *Phys. Rev. Lett*. **36** (1976) 1116.
28. P Hasenfratz and G ’t Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1119.