

## یک مدل منتهای برای الکترودینامیک با معرفی یک عامل شکل به صورت

$$f_{HD_2}(\ell^2 \square) = 1 + (-\ell^2 \square)^2$$

مصطفی هاشمی و سید کامران مؤیدی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه اراک، اراک، کد پستی ۳۸۱۵۶-۸-۸۳۴۹

پست الکترونیکی: s-moayedi@araku.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۲۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۶/۰۱)

### چکیده:

در این مقاله، یک مدل با مشتقات مراتب بالا برای الکترودینامیک در یک فضا-زمان مینکوفسکی  $D+1$  بعدی از راه معرفی یک عامل شکل به درون جمله جنبشی نظریه ماکسول به صورت  $-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} f_{HD_2}(\ell^2 \square) F^{\mu\nu} \rightarrow -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  ارائه می‌شود که  $\ell > 0$  یک مقیاس طول مشخصه است. محاسبات ما نشان می‌دهند که در این تعمیم با مشتقات مراتب بالاتر نظریه ماکسول به ازای  $D \in \{3, 4, 5\}$  پتانسیل الکتروستاتیکی مربوط به یک بار نقطه‌ای در مکان بار، مقداری منتهای است. به ازای  $D=3$  شکل صریح پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای در این الکترودینامیک با مشتقات مراتب بالاتر به صورت تحلیلی به دست آورده می‌شوند. بنا به برآوردهای عددی انجام شده، مقیاس طول مشخصه  $\ell$  کران بالایی برابر با  $\ell_{\max} \sim \frac{1}{10^0} \ell_{\text{electroweak}}$  دارد که  $\ell_{\text{electroweak}} = 10^{-18} m$  مقیاس طول مربوط به برهم‌کنش‌های الکتروضعیف است. در خاتمه متذکر می‌شویم که به ازای  $\ell \ll 1$ ، نتایج به دست آمده در این مقاله با نتایج حاصل از نظریه ماکسول متعارف سازگار است.

**واژه‌های کلیدی:** الکترودینامیک ماکسول، روش‌های منظم‌سازی، عامل شکل، مقیاس طول مشخصه، نظریه‌های میدان با مشتقات مراتب بالاتر

### ۱. مقدمه

مانند انتشار نور در محیط‌های ناهمگن و یا انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل موجرها است [۳ و ۴] اما این نظریه از ایراداتی نظیر واگرایی خود-انرژی الکترومغناطیسی مربوط به بارهای نقطه‌گون نظیر الکترون رنج می‌برد [۱ و ۲]. امروزه می‌دانیم که نظریه ماکسول را می‌توان به عنوان حد کلاسیک الکترودینامیک کوانتومی به شمار آورد. اگر چه الکترودینامیک کوانتومی را شاید بتوان یکی از موفق‌ترین نظریه‌های در دسترس علم فیزیک به لحاظ سازگاری با داده‌های تجربی

نظریه الکترودینامیک ماکسول را می‌توان یکی از پایه‌ای‌ترین نظریه‌ها در علم فیزیک به شمار آورد که موضوع آن بررسی پدیده‌های ماکروسکوپی در حوزه الکتریسته و مغناطیس در سطح کلاسیک است [۱ و ۲]. از منظر ریاضی، نظریه الکترودینامیک ماکسول را می‌توان متعلق به دسته‌ای خاص از نظریه میدان‌های کلاسیک موسوم به نظریه میدان‌های پیمانه‌ای آبلی با گروه پیمانه‌ای  $U(1)$  دانست [۲]. هر چند نظریه الکترودینامیک ماکسول به خوبی قادر به توصیف پدیده‌هایی

اندازه‌گیری بازه‌های فضایی پرداخته و نشان داده‌ایم که وجود پارامتر کمینه طول در ساختار نظریه مانند یک تنظیم کننده عمل کرده و سبب به دست آمدن یک مقدار متناهی برای خود-انرژی بارهای نقطه‌گون می‌شود. در تلاشی دیگر نویسندگان مراجع [۱۶ و ۱۷] نشان داده‌اند که بازفرمول‌بندی نظریه الکترودینامیک ماکسول در حضور یک برش تکانه می‌تواند باعث حذف تکینگی مربوط به پتانسیل یک بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به بار شود. در مرجع [۱۸] مارکوس لازار فیزیک‌دان آلمانی یک نظریه میدان پیمانه‌ای اَبلی تعمیم یافته را معرفی کرده که در مدل معرفی شده توسط وی مشتق مرتبه ششم میدان پیمانه‌ای  $A_\mu$  در معادلات حرکت ظاهر می‌شود. در مدل لازار دو مقیاس طول مشخصه  $l_1$  و  $l_2$  وجود دارند که این دو مقیاس طولی می‌توانند به ازای مقادیر حدی خاصی مدل ماکسول را بازتولید کنند. در مدل لازار مقدار خود-انرژی وابسته به یک بار نقطه‌گون بر خلاف نظریه ماکسول مقداری متناهی به دست می‌آید. نظریه الکترودینامیک ماکسول در یک فضا-زمان مینکوفسکی  $D+1$  بعدی که توسط متریک

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

توصیف می‌شود به وسیله چگالی لاگرانژی زیر مشخص می‌شود:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (3)$$

که  $A^\mu = (\frac{1}{c}\phi, A^1, \dots, A^D)$  میدان ماکسول،  $J^\mu = (c\rho, J^1, \dots, J^D)$  جریان خارجی و  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی است [۲۰]. به سهولت می‌توان نشان داد که تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی، یعنی  $F_{\mu\nu}$  رابطه زیر موسوم به اتحاد بیانکی<sup>۱</sup> را برآورده می‌سازد:

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0. \quad (4)$$

دانست اما متأسفانه معضل نامتناهی شدن خود-انرژی وابسته به بارهای نقطه‌ای در الکترودینامیک کوانتومی کماکان به قوت خود باقی است [۵-۷]. در هنگام مطالعه یک نظریه موضعی برای میدان‌های کوانتومی، حداقل با سه دسته از واگرایی‌ها به شرح زیر مواجه می‌شویم [۷]

۱. واگرایی‌های فرابنفش

۲. واگرایی‌های فروسرخ

۳. تکینگی‌های مخروط نوری

از میان این سه دسته واگرایی، واگرایی‌های فرابنفش و فروسرخ را می‌توان با استفاده از روش بازهنجارش از میان برداشت در حالی که تکینگی‌های مخروط نوری که مربوط به تکینگی در مبدأ فضای اقلیدسی‌اند حتی بعد از اعمال روش بازهنجارش به صورت کامل از میان نمی‌روند [۷]. امروزه یکی از مهم‌ترین چالش‌های پیش رو در نظریه میدان‌های کوانتومی، مسئله وحدت بخشی میان نظریه نسبیت عام آلبرت اینشتین و مدل استاندارد فیزیک ذرات بنیادی در قالب یک نظریه میدان وحدت یافته تحت عنوان گرانش کوانتومی است [۸-۱۲]. اگر چه تاکنون فیزیک‌دانان موفق به دستیابی به یک نظریه کامل برای گرانش کوانتومی نشده‌اند اما در اغلب مدل‌های پیشنهادی برای گرانش کوانتومی همانند نظریه ریسمان، وجود یک مقیاس طول بنیادین از مرتبه بزرگی طول پلانک در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی پیش‌بینی شده است [۸ و ۹]. وجود چنین مقیاس طول اساسی در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی منجر به تعمیم اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت زیر می‌شود [۸ و ۹]:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \alpha' \frac{\Delta p}{\hbar}, \quad (1)$$

که  $\alpha' \approx (10^{-32} \text{ cm})^2$  ثابتی بنیادی است که تنش ریسمان را کنترل می‌کند. معادله (۱) بر این واقعیت دلالت دارد که عدم قطعیت در اندازه‌گیری مکان، یعنی  $\Delta x$  کران پایینی برابر با  $\sqrt{2\alpha'}$  دارد که به این کران پایین کمینه طول گفته می‌شود [۸-۱۲]. در مراجع [۱۳-۱۵] ما به بازفرمول‌بندی نظریه الکترودینامیک ماکسول با فرض وجود یک کمینه طول در

<sup>۱</sup>Bianchi identity

در رابطه (۸)،  $\mathbb{N}$  معرف مجموعه اعداد صحیح مثبت است. همان گونه که دیده می شود عامل شکل (۸) شرط (۷) را برآورده می سازد. نظریه ماکسول تعمیم یافته (۹) به نظریه ماکسول کلاس  $HD_N^1$  معروف است [۲۱]. در نظریه های ماکسول از کلاس  $HD_N$  با توجه به عدم تغییر تعریف  $F_{\mu\nu}$  کماکان اتحاد بیانکی، یعنی رابطه (۴) برقرار است. در حالی که در نظریه الکترودینامیک ماکسول (رابطه (۳)) تنها عبارتهای در برگیرنده مشتق مرتبه اول میدان پیمانه ای  $A_\mu$  ظاهر می شوند در نظریه های ماکسول از کلاس  $HD_N$  (رابطه (۹)) ما با جملاتی مواجه می شویم که شامل مشتق مرتبه  $2N+1$  میدان پیمانه ای  $A_\mu$  هستند. یک انتخاب دیگر برای عامل شکل  $f\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right)$  در رابطه (۵) به صورت زیر است [۲۱ و ۲۴]:

$$f_{GF_N}\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right) = \exp\left[\left(-\frac{\square}{M^\gamma}\right)^N\right], \quad N \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

برای عامل شکل معرفی شده در رابطه (۱۰) که شرط (۷) را برآورده می سازد خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}_{GF_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \exp\left[\left(-\frac{\square}{M^\gamma}\right)^N\right] F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (11)$$

مدل (۱۱) به نظریه ماکسول از کلاس  $GF_N^2$  معروف است [۲۱ و ۲۴]. به لحاظ تکنیکی مدل (۱۱) که از آن تحت عنوان الکترودینامیک فاقد شیخ نیز یاد می شود یک نظریه میدان پیمانه ای آبی با مشتق از مرتبه بی نهایت میدان  $A_\mu$  است [۷ و ۲۴]. در مدل های  $GF_N$  نیز همانند مدل های  $HD_N$ ، حد  $M \rightarrow \infty$  به بازتولید نظریه استاندارد ماکسول (رابطه (۳)) می انجامد. با توجه به عدم تغییر تعریف تانسور شدت میدان الکترومغناطیسی  $F_{\mu\nu}$  در نظریه های ماکسول کلاس  $GF_N$ ، اتحاد بیانکی، یعنی رابطه (۴) همچنان برقرار است. در مراجع [۲۳ و ۲۴] به جای پارامتر ثابت  $M$  یک مقیاس طول مشخصه  $\ell$  تعریف شده است که ارتباط آن با  $M$  چنین است:

$$\ell = \frac{1}{M}, \quad \ell > 0. \quad (12)$$

یک تعمیم ممکن از نظریه الکترودینامیک ماکسول، یعنی نظریه توصیف شده توسط رابطه (۳) به صورت زیر است [۱۹]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} f\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right) F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (5)$$

که

$$\square = \sum_{\alpha=0}^D \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{1}{c^\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} - \sum_{i=1}^D \partial_i \partial_i \\ = \frac{1}{c^\gamma} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} - \nabla_D^\gamma, \quad (6)$$

عملگر دالامبری در فضا-زمان تخت  $D+1$  بعدی توصیف شده توسط متریک (۲) بوده و  $M$  یک پارامتر ثابت با دیمانسیون عکس طول، یعنی  $(length)^{-1}$  است [۱۹]. به تابع  $f\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right)$  در رابطه (۵) عامل شکل گفته می شود [۱۹]. لازم به تذکر است که پارامتر ثابت  $M$  در رابطه (۵) میزان غیرموضعی بودن نظریه را تعیین می کند. برای مقادیر بسیار بزرگ پارامتر  $M$ ، یعنی  $M \rightarrow \infty$  یا  $M \gg 1$  عامل شکل  $f\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right)$  باید رفتاری حدی به صورت زیر داشته باشد [۲۰-۲۴]:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right) = f(0) = 1. \quad (7)$$

برای حالت حدی  $M \rightarrow \infty$  رابطه (۵) به رابطه (۳)، یعنی نظریه الکترودینامیک ماکسول تبدیل می شود. بنا به آنچه گفته شد در مدل (۵) برای مقادیر بسیار بزرگ پارامتر  $M$ ، مدل رفتاری کاملاً موضعی از خود نشان می دهد در حالی که برای مقادیر بسیار کوچک پارامتر  $M$ ، مدل (۵) رفتاری به شدت غیرموضعی و متفاوت با نظریه استاندارد ماکسول خواهد داشت. در حالت خاصی که عامل شکل  $f\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right)$  به صورت زیر باشد

$$f_{HD_N}\left(\frac{\square}{M^\gamma}\right) = 1 + \left(-\frac{\square}{M^\gamma}\right)^N, \quad N \in \mathbb{N} \quad (8)$$

رابطه (۵) به شکل زیر در می آید:

$$\mathcal{L}_{HD_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \left[1 + \left(-\frac{\square}{M^\gamma}\right)^N\right] F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (9)$$

<sup>1</sup>Higher-derivative  
<sup>2</sup>Ghost-free

و انتگرال گیری پربندی در نظریه متغیرهای مختلط، شکل دقیق پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ فضای دکارتی سه بعدی ( $D=3$ ) در مدل  $HD_p$  به دست می‌آید. نشان می‌دهیم که مقدار پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به مکان بار بر خلاف نظریه ماکسول مقادیری متناهی هستند و پارامتر  $l$  در ساختار مدل  $HD_p$  نقش یک تنظیم کننده را ایفاء می‌کند که باعث جلوگیری از تکینگی پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود. در بخش ۶ که به بحث و نتیجه گیری اختصاص دارد نخست دلایل و انگیزه نویسندگان این مقاله در استفاده از مدل  $HD_p$  را به تفصیل مورد بررسی و واکاوی قرار می‌دهیم. در ادامه در بخش ۶.۱ نتیجه گیری، به مقایسه اختلاف میان روش‌های به کار برده شده در این مقاله با روش‌های به کار رفته در مراجع [۱۳-۱۷] در تحلیل رفتار یک بار نقطه‌ای ساکن می‌پردازیم. در بخش ۶.۲ می‌کوشیم تا یک برآورد عددی از مقدار طول مشخصه  $l$  در رابطه (۱۲) ارائه کنیم. سرانجام در بخش ۶.۳ شکل صریح پتانسیل و میدان الکتروستاتیکی برای یک توزیع دلخواه از بارهای الکتریکی ساکن در الکتروستاتیک  $HD_p$  در فضای دکارتی سه بعدی به دست آورده شده و حد ماکسولی این عبارات مورد بررسی قرار می‌گیرند.

## ۲. معادلات حرکت کلاسیک برای مدل $HD_p$

بنا به رابطه (۱۳) چگالی لاگرانژی وابسته به مدل  $HD_p$  به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}_{HD_p} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \left[ 1 + (-\ell^2 \square)^2 \right] F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (15)$$

همان گونه که مشاهده می‌شود در رابطه (۱۵)، مشتق مرتبه پنجم میدان پیمانه‌ای  $A_\mu$  ظاهر می‌شود. برای یک میدان پیمانه‌ای  $A_\lambda$  که توسط چگالی لاگرانژی زیر توصیف می‌شود

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\lambda, \partial_{\nu_1} A_\lambda, \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} A_\lambda, \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \partial_{\nu_3} A_\lambda, \dots), \quad (16)$$

معادله اویلر-لاگرانژ به صورت زیر است [۲۵-۲۸]:

بنا به رابطه (۱۲)، مقیاس طول مشخصه  $l$  دیمانسیون  $(length)$  داشته و حد  $M \rightarrow \infty$  متناظر با حد  $l \rightarrow 0$  است. لاگرانژی‌های توصیف کننده نظریه‌های ماکسول کلاس  $HD_N$  و  $GF_N$  در روابط (۹) و (۱۱) بر حسب مقیاس طول مشخصه  $l$  معرفی شده در رابطه (۱۲) چنین‌اند:

$$\mathcal{L}_{HD_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \left[ 1 + (-\ell^2 \square)^N \right] F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_{GF_N} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} \exp \left[ (-\ell^2 \square)^N \right] F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (14)$$

هدف ما در این مقاله بررسی تحلیلی ویژگی‌های عام نظریه‌های ماکسول از کلاس  $HD_p$  برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی در یک فضا-زمان مینکوفسکی با متریک دارای

نشانیان  $\left( \underbrace{+, -, \dots, -}_{D \text{ times}} \right)$  است. در بخش ۲ این مقاله، معادلات

حرکت کلاسیک وابسته به مدل  $HD_p$  در حضور یک چشمه خارجی در فضا-زمان مینکوفسکی  $D+1$  بعدی توصیف شده توسط متریک (۲) به دست آورده شده و در ادامه شکل صریح معادله پواسون برای یک توزیع ایستا از بارهای الکتریکی در مدل  $HD_p$  به دست می‌آید. در بخش ۳ این مقاله ثابت می‌کنیم که در مدل  $HD_p$  برای آن که پتانسیل وابسته به یک بار نقطه‌ای برای نقاط بسیار نزدیک به بار مقداری متناهی به دست آید لازم است تا  $D$ ، یعنی تعداد ابعاد فضایی یکی از مقادیر  $\{3, 4, 5\}$  را اختیار کند. در بخش ۴ بعد از تعیین شکل روابط ساختمندی<sup>۱</sup> متناظر با الکترودینامیک  $HD_p$  در یک فضا-زمان مینکوفسکی چهار بعدی ( $D=3$ )، شکل دیفرانسیلی معادلات  $HD_p$  را که تعمیمی از معادلات ماکسول هستند به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که شکل ریاضی معادله پیوستگی بار و جریان در الکترودینامیک  $HD_p$  مشابه با شکل این معادله در الکترودینامیک ماکسول، یعنی  $\nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0$  است. در حد  $l \rightarrow 0$  معادلات میدان و روابط ساختمندی الکترودینامیک  $HD_p$  به معادلات میدان و روابط ساختمندی الکترودینامیک ماکسول تبدیل می‌شوند. در بخش ۵ با استفاده از روش‌های تبدیل فوریه

<sup>۱</sup>Constitutive relations

$$(1 + \ell^* \nabla_D^* \nabla_D^*) \nabla_D^* \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_s}, \quad (24)$$

که  $\nabla_D^* = \sum_{i=1}^D \partial_i \partial_i$  عملگر لاپلاس در فضای دکارتی  $D$  بعدی است. معادله مرتبه ششم (۲۴) معادله پواسون در الکتروستاتیک  $HD_\ell$  در یک فضای دکارتی  $D$  بعدی است. در حد  $\ell \rightarrow 0$  ( $\ell \ll 1$ ) معادله (۲۴) به شکل زیر در می آید:

$$\nabla_D^* \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_s}. \quad (25)$$

معادله (۲۵) همان معادله آشنای پواسون در الکتروستاتیک ماکسول است.

۳. شرط منتهای شدن پتانسیل وابسته به یک بار نقطه‌ای برای نقاط بسیار نزدیک به بار در

### الکتروستاتیک $HD_\ell$

برای یک بار نقطه‌ای ایستای  $q$  در مبدأ فضای دکارتی  $D$  بعدی  $\rho(\vec{x})$  به شکل زیر است:

$$\rho(\vec{x}) = q \delta(x^1) \delta(x^2) \dots \delta(x^D) = q \delta^{(D)}(\vec{x}). \quad (26)$$

معادله پواسون (۲۴) برای چگالی بار (۲۶) به صورت زیر است:

$$(1 + \ell^* \nabla_D^* \nabla_D^*) \nabla_D^* \phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_s} \delta^{(D)}(\vec{x}). \quad (27)$$

اگر نمایش انتگرالی تابع دلتای دیراک  $\delta^{(D)}(\vec{x})$  و پتانسیل الکتروستاتیکی  $\phi(\vec{x})$  یعنی روابط

$$\delta^{(D)}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^D k, \quad (28)$$

و

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int G(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^D k, \quad (29)$$

را در معادله پواسون مرتبه ششم (۲۷) جایگزین کنیم شکل تابع گرین  $G(\vec{k})$  در فضای موج  $D$  بعدی به شکل زیر تعیین می شود:

$$G(\vec{k}) = \frac{q}{\varepsilon_s} \frac{1}{k^\nu [1 + \ell^* (k^\nu)^\nu]}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda, \nu_1}} \right)_{\nu_1} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda, \nu_1 \nu_2}} \right)_{\nu_1 \nu_2} - \dots \quad (17)$$

$$+ (-1)^k \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\lambda, \nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}} \right)_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} + \dots = 0,$$

که  $A_{\lambda, \nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}$  تعریفی به شکل زیر دارد:

$$A_{\lambda, \nu_1 \nu_2 \dots \nu_k} := \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_k} A_\lambda \quad (18)$$

و

$$\frac{\partial A_{\lambda, \nu_1 \nu_2 \dots \nu_k}}{\partial A_{\lambda, \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}} = \delta_{\nu_1}^{\mu_1} \delta_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \delta_{\nu_k}^{\mu_k}, \quad (19)$$

اگر چگالی لاگرانژی مدل  $HD_\ell$ ، یعنی رابطه (۱۵) را در معادله اوایلر-لاگرانژ تعمیم یافته (۱۷) قرار دهیم بعد از بازآرایی مجدد شاخص‌ها، معادله حرکت زیر برای میدان پیمانه‌ای  $A_\mu$  به دست می آید:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \ell^* \square \square \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_\nu J^\nu. \quad (20)$$

معادله (۲۰)، معادله حرکت کلاسیک برای مدل  $HD_\ell$  در حضور چشمه خارجی  $J^\nu$  در یک فضا-زمان مینکوفسکی  $D+1$  بعدی با متریک (۲) است. معادله فوق یک معادله موج ناهمگن مرتبه ششم است که در حد  $\ell \rightarrow 0$  به معادله موج  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_\nu J^\nu$ ، یعنی صورت تانسوری معادلات ناهمگن ماکسول تبدیل می شود. اگر از طرفین این معادله و اگرایی بگیریم خواهیم داشت:

$$\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}} + \ell^* \square \square \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}} = \mu_\nu \partial_\nu J^\nu \Rightarrow \partial_\nu J^\nu = 0. \quad (21)$$

رابطه (۲۱) نشان می دهد که شکل هموردای معادله پیوستگی بار و جریان در الکترودینامیک  $HD_\ell$  مشابه با شکل هموردای معادله پیوستگی بار و جریان در نظریه الکترودینامیک ماکسول است [۱ و ۲]. برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی (الکتروستاتیک) یعنی،

$$A^\mu = \left( \frac{1}{c} \phi(\vec{x}), \underbrace{0, \dots, 0}_{D \text{ times}} \right), \quad (22)$$

$$J^\mu = \left( c \rho(\vec{x}), \underbrace{0, \dots, 0}_{D \text{ times}} \right), \quad (23)$$

معادله (۲۰) به صورت زیر در می آید:

در رابطه (۳۷)،  $\Omega_{D-1} = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$  مساحت گوی واحد در

فضای دکارتی  $D$  بعدی است [۲۹]. در صفحه ۱۰۹ مرجع [۳۱] انتگرال زیر محاسبه شده است:

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n + a^n} dx = \frac{\pi a^{m-n+1}}{n \sin\left[\frac{(m+1)\pi}{n}\right]}, \quad (38)$$

$$0 < m+1 < n.$$

با مقایسه میان انتگرال داده شده در رابطه (۳۷) و رابطه (۳۸)

می توان نوشت

$$\int_0^\infty \frac{k^{D-\tau}}{k^\tau + \left(\frac{1}{\ell}\right)^\tau} dk = \frac{\pi \ell^{\tau-D}}{\tau \sin\left[\frac{(D-\tau)\pi}{\tau}\right]}, \quad (39)$$

$$2 < D < \tau.$$

اگر رابطه (۳۹) را در رابطه (۳۷) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi\left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{D \text{ times}}\right) = \frac{q}{\tau^{D+1} \pi^{\frac{D-1}{\tau}} \varepsilon \Gamma\left(\frac{D}{\tau}\right) \sin\left[\frac{(D-\tau)\pi}{\tau}\right] \ell^{D-\tau}}, \quad (40)$$

$$2 < D < \tau.$$

همان گونه که رابطه (۴۰) نشان می دهد به ازای

$$D \in \{3, 4, 5\}, \quad (41)$$

پتانسیل وابسته به بار نقطه ای  $q$  در محل بار مقداری منتهای به دست می آید. بنا به روابط (۴۰) و (۴۱) در ابعاد فضایی برابر با  $D=3, D=4, D=5$  و یا متناظر با آن در فضا-زمان هایی با ابعاد  $D+1=4, D+1=5, D+1=6$  الکتروستاتیک  $HD_\tau$  یک مدل منتهای برای پتانسیل بار نقطه ای را ارائه می دهد.

۴. شکل دیفرانسیلی معادلات الکتروستاتیک  $HD_\tau$

در یک فضا-زمان چهار بعدی

در یک فضا-زمان مینکوفسکی چهار بعدی با متریک  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$  تانسورهای شدت میدان الکترومغناطیسی هموردای  $F_{\mu\nu}$  و پادوردای  $F^{\mu\nu}$  به شکل زیرند [۳۲]:

که  $k = \left(\sum_{i=1}^D (k^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$  اندازه بردار موج  $D$  بعدی  $\vec{k} = (k^1, \dots, k^D)$  است. اگر رابطه (۳۰) را در رابطه (۲۹) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^D} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^\tau [1 + \ell^\tau (k^\tau)^\tau]} d^D k. \quad (31)$$

برای بررسی رفتار پتانسیل وابسته به یک بار نقطه ای  $q$  در نقاط بسیار نزدیک به محل بار در الکتروستاتیک  $HD_\tau$  باید در رابطه

$$x^1 = x^2 = \dots = x^D = 0, \quad (31)$$

داشت:

$$\phi\left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{D \text{ times}}\right) = \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{k^\tau [1 + \ell^\tau (k^\tau)^\tau]}. \quad (32)$$

با توجه به این که تابع زیر علامت انتگرال در رابطه (۳۲)، یعنی

$$\frac{1}{k^\tau [1 + \ell^\tau (k^\tau)^\tau]}$$

تابع تقارن فوق کروی دارد بنابراین مناسب خواهد بود که برای محاسبه انتگرال (۳۲) از مختصات فوق کروی استفاده کنیم. عنصر حجم  $d^D k$  در مختصات فوق کروی به صورت زیر است [۱۶ و ۲۹ و ۳۰]:

$$d^D k = k^{D-1} dk \prod_{i=1}^{D-1} \sin^{D-1-i} \theta_i d\theta_i, \quad (33)$$

که

$$0 \leq k < \infty, \quad (34)$$

$$0 \leq \theta_{D-1} \leq 2\pi, \quad (35)$$

$$0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq D-2. \quad (36)$$

اگر رابطه (۳۳) را در رابطه (۳۲) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi\left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{D \text{ times}}\right) = \frac{q}{\varepsilon} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{k^{D-\tau}}{1 + \ell^\tau k^\tau} dk \prod_{i=1}^{D-1} \int \sin^{D-1-i} \theta_i d\theta_i \quad (37)$$

$$= \frac{q}{\varepsilon} \frac{\Omega_{D-1}}{(2\pi)^D \ell^\tau} \int_0^\infty \frac{k^{D-\tau}}{k^\tau + \ell^{-\tau}} dk.$$

یکسانی دارند [۲۱]. روابط (۴۵) تا (۴۸) معادلات بنیادی حاکم بر الکترودینامیک  $HD_4$  در یک فضا-زمان مینکوفسکی چهار بعدی هستند. در الکترودینامیک به روابطی که نحوه وابستگی  $\vec{D}$  (بردار جابه‌جایی الکتریکی) و  $\vec{H}$  (بردار شدت مغناطیسی) را به  $\vec{E}$  و  $\vec{B}$  نشان می‌دهند، یعنی روابط

$$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}], \quad (49)$$

$$\vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}], \quad (50)$$

روابط ساختمندی گفته می‌شود [۱ و ۳۳]. اگر چه روابط ساختمندی وابسته به الکترودینامیک ماکسول شکل ریاضی ساده‌ای دارند اما در تعمیم‌های ممکنه نظریه ماکسول همانند نظریه بورن-اینفلد<sup>۱</sup> که یک تعمیم غیرخطی نظریه الکترودینامیک ماکسول به شمار می‌آید روابط ساختمندی شکل ریاضی نسبتاً پیچیده‌ای دارند [۳۳]. بر این اساس، معادلات (۴۵) و (۴۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t), \quad (51)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t}, \quad (52)$$

که

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 (1 + \ell^* \square \square) \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (53)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} (1 + \ell^* \square \square) \vec{B}(\vec{x}, t), \quad (54)$$

روابط (۵۳) و (۵۴) روابط ساختمندی وابسته به الکترودینامیک  $HD_4$  هستند. اگر از طرفین معادله (۵۲) واگرایی گرفته و از معادله (۵۱) استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (55)$$

همان‌گونه که معادله (۵۵) نشان می‌دهد شکل دیفرانسیلی معادله پیوستگی بار و جریان در الکترودینامیک  $HD_4$  همانند شکل این معادله در الکترودینامیک ماکسول است. در حد  $\ell \rightarrow 0$  قوانین گوس و آمپر تعمیم یافته، یعنی معادلات (۴۵) و (۴۶) به صورت زیر در می‌آیند:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

به ازای  $v=0$ ، معادله (۲۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$(1 + \ell^* \square \square) \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (44)$$

به کمک رابطه (۴۳) و نیز رابطه  $J^\nu = c\rho$  معادله (۴۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$(1 + \ell^* \square \square) \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0}. \quad (45)$$

رابطه (۴۵) شکل دیفرانسیلی قانون گوس در الکترودینامیک  $HD_4$  است. انتخاب  $v=1$ ،  $v=2$  و  $v=3$  و نیز استفاده از روابط (۲۰)، (۴۳) و  $J^z = J_z$ ،  $J^y = J_y$ ،  $J^x = J_x$  معادله زیر را نتیجه می‌دهد:

$$(1 + \ell^* \square \square) \left[ \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right] = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}, t). \quad (46)$$

معادله (۴۶) شکل دیفرانسیلی قانون آمپر در الکترودینامیک  $HD_4$  است. همچنین استفاده از رابطه‌های (۴) و (۴۲) معادلات زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0, \quad (47)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (48)$$

همان‌گونه که دیده می‌شود معادلات (۴۷) و (۴۸) در الکترودینامیک  $HD_4$  و الکترودینامیک ماکسول شکل ریاضی

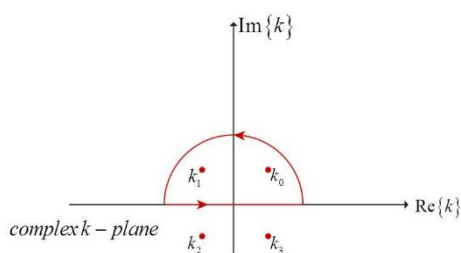
$HD_{\rho}$  در فضای دکارتی سه بعدی کافی است تا در رابطه (۳۱)  $D=3$  قرار دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 [1 + \ell^2 (k^2)^2]} d^3k \\ &= \underbrace{\frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2} d^3k}_{\text{Coulomb term}} \\ &\quad - \underbrace{\frac{q}{\epsilon_0} \frac{\ell^2}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{1 + \ell^2 (k^2)^2} d^3k}_{HD, \text{ corrections}} \end{aligned} \quad (63)$$

اگر برای محاسبه انتگرال‌های رابطه (۶۳) از مختصات قطبی  $(k, \theta, \varphi)$  استفاده کرده و بردار مکان  $\vec{x}$  را در امتداد محور  $k_z$  در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \int_0^\infty dk \int_0^\pi e^{ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \ell^2 \int_0^\infty \frac{k^2}{1 + \ell^2 k^2} dk \int_0^\pi e^{ikr \cos\theta} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \quad (64) \\ &= \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 r} \left[ \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} dk - \ell^2 \int_0^\infty \frac{k^2 \sin kr}{1 + \ell^2 k^2} dk \right], \end{aligned}$$

که  $r = |\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$  اندازه بردار مکان در فضای دکارتی سه بعدی است.



شکل ۱. پربند مربوط به محاسبه انتگرال رابطه (۶۶)

در صفحه ۱۱۰ مرجع [۳۱] انتگرال زیر محاسبه شده است

$$\int_0^\infty \frac{\sin px}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & p > 0 \\ 0, & p = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & p < 0. \end{cases} \quad (65)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0}, \quad (56)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t}. \quad (57)$$

روابط (۵۶) و (۵۷) به ترتیب شکل دیفرانسیلی قانون گوس و قانون آمپر در الکترواستاتیک ماکسول هستند. از سوی دیگر در حد  $\ell \rightarrow 0$  روابط ساختمندی (۵۳) و (۵۴) به شکل زیر در می‌آیند:

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t), \quad (58)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{x}, t). \quad (59)$$

روابط (۵۸) و (۵۹) روابط ساختمندی وابسته به الکترواستاتیک ماکسول در غیاب دی‌الکتریک و مغناطش هستند [۱]. برای یک پیکربندی ایستا از بارهای الکتریکی (الکترواستاتیک) معادلات (۴۵) تا (۴۸) به صورت زیر در می‌آیند

$$(1 + \ell^2 \nabla^2 \nabla^2) \nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad (60)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}) = 0. \quad (61)$$

معادلات (۶۰) و (۶۱) معادلات بنیادی الکترواستاتیک  $HD_{\rho}$  در فضای دکارتی سه بعدی هستند. به لحاظ ریاضی دستگاه معادلات (۶۰) و (۶۱) هم‌ارز با معادله پواسون مرتبه ششم (۲۴) در حالت  $D=3$  یعنی معادله

$$(1 + \ell^2 \nabla^2 \nabla^2) \nabla^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (62)$$

هستند. بدیهی است که در حد  $\ell \rightarrow 0$  معادله پواسون تعمیم

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$$

یافته (۶۲) به معادله همان معادله

پواسون در الکترواستاتیک ماکسول است تبدیل می‌شود.

## ۵. تعیین شکل دقیق پتانسیل و میدان الکتریکی یک

### بار نقطه‌ای در الکترواستاتیک $HD_{\rho}$ در فضای

#### دکارتی سه بعدی

هدف ما در این بخش به دست آوردن عبارتهایی تحلیلی برای شکل پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای  $q$  با چگالی بار  $\rho(\vec{x}) = q\delta^{(3)}(\vec{x})$  در الکترواستاتیک  $HD_{\rho}$  است. برای تعیین شکل پتانسیل الکترواستاتیک یک بار نقطه‌ای در مدل



اگر انتگرال محاسبه شده در رابطه (۷۱) را در رابطه (۶۶) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (72)$$

رابطه (۷۲) شکل دقیق پتانسیل الکتروستاتیکی وابسته به یک بار نقطه‌ای  $q$  در مبدأ فضای دکارتی سه بعدی در الکتروستاتیک  $HD_p$  را نشان می‌دهد. بنا به رابطه (۷۲)، پتانسیل یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک  $HD_p$  در فضای دکارتی سه بعدی همچنان تقارن کروی دارد. در حد  $\ell \rightarrow 0$  ( $\ell \ll 1$ )، تابع  $\cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right)$  در رابطه (۷۲) تابعی کراندار در بازه  $[-1, +1]$  بوده و از این رو می‌توان نوشت:

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right) = 0. \quad (73)$$

با توجه به رابطه (۷۳) در حد  $\ell \rightarrow 0$  پتانسیل معرفی شده در رابطه (۷۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (74)$$

رابطه (۷۴) نشان دهنده این واقعیت است که در حالت حدی  $\ell \ll 1$ ، الکتروستاتیک  $HD_p$  رفتاری مشابه با الکتروستاتیک ماکسول را از خود نشان می‌دهد. اکنون به بررسی رفتار رابطه (۷۲) برای نقاط بسیار نزدیک به محل بار نقطه‌ای می‌پردازیم، داریم

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow r} \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{\ell\sqrt{2}} + \frac{r^2}{4\ell^2} + O(r^3) \right) \left( 1 - \frac{r^2}{4\ell^2} + O(r^3) \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow r} \frac{1}{r} \left[ \frac{r}{\ell\sqrt{2}} + O(r^2) \right] \\ &= \frac{q}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 \ell} + O(r^2), \quad r \ll 1 \quad (r \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (75)$$

رابطه (۷۵) آشکارا نشان می‌دهد که در الکتروستاتیک  $HD_p$  پتانسیل مربوط به بار نقطه‌ای در مکان بار بر خلاف الکتروستاتیک ماکسول مقداری متناهی دارد. همچنین در فواصل بسیار دور از بار نقطه‌ای  $q$ ، پتانسیل (۷۲) رفتاری مشابه با پتانسیل کولن در الکتروستاتیک ماکسول را از خود نشان

با مقایسه‌ای میان انتگرال اول در سمت راست رابطه (۶۴)، یعنی

$$\int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} dk$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kr}{k} dk = \frac{\pi}{2} \quad (r > 0)$$

را می‌توان بعد از ساده سازی به شکل نهایی زیر نوشت:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^r \sin kr}{k^2 + \frac{1}{\ell^2}} dk \right]. \quad (66)$$

برای محاسبه انتگرال موجود در رابطه (۶۶) از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم [۳۴]. برای این منظور لازم است تا انتگرال

$$\oint \frac{k^r e^{ikr}}{k^2 + \frac{1}{\ell^2}} dk \quad (67)$$

را مطابق شکل ۱ بر روی نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ در نیمه بالایی صفحه مختلط  $k$  محاسبه کنیم.

همان گونه که دیده می‌شود تابع

$$f(k) = \frac{k^r e^{ikr}}{k^2 + \frac{1}{\ell^2}} \quad (\ell > 0), \quad (68)$$

در صفحه مختلط  $k$  چهار قطب ساده  $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$  به صورت زیر دارد:

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{\ell\sqrt{2}} + i \frac{1}{\ell\sqrt{2}}, \quad k_{3,4} = \pm \frac{1}{\ell\sqrt{2}} - i \frac{1}{\ell\sqrt{2}}. \quad (69)$$

مطابق شکل ۱ تنها دو قطب  $k_1$  و  $k_2$  در داخل نیم‌دایره قرار می‌گیرند. با استفاده از قضیه مانده‌ها، انتگرال رابطه (۶۷) را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \oint \frac{k^r e^{ikr}}{k^2 + \frac{1}{\ell^2}} dk &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^r e^{ikr}}{k^2 + \frac{1}{\ell^2}} dk \\ &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f; k_1) + \operatorname{Res}(f; k_2)] \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{4} e^{ik_1 r} + \frac{1}{4} e^{ik_2 r} \right] \\ &= \pi i e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (70)$$

از رابطه (۷۰) انتگرال زیر نتیجه می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^r \sin kr}{k^2 + \frac{1}{\ell^2}} dk = \pi e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right). \quad (71)$$

## ۶. بحث و نتیجه‌گیری

اغلب نظریه‌های بنیادی فیزیک نظری همانند نظریهٔ گرانش خطی شده و الکترودینامیک ماکسول نظریه‌هایی موضعی به شمار می‌آیند که این نظریه‌ها را می‌توان از یک کنش  $S$  به شکل

$$S([\phi]) = \frac{1}{c} \int_{M^{1,D}} d^{D+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (۸۰)$$

نتیجه گرفت که  $\mathcal{L}$  تابعی از میدان  $\phi$  و مشتق مرتبهٔ اول آن، یعنی  $\partial_\mu \phi$  است. همچنین  $M^{1,D}$  فضا-زمان مینکوفسکی توصیف شده توسط متریک (۲) است. در نظریهٔ ماکسول و گرانش خطی شده که توسط یک میدان تانسوری مرتبهٔ دوم متقارن  $h_{\mu\nu}(x)$  توصیف می‌شود میدان ایستای وابسته به یک شیء نقطه‌گون در مبدأ واگرا است [۳۵]. به همین علت خود-انرژی وابسته به اشیاء نقطه‌گون در نظریهٔ الکترودینامیک ماکسول و گرانش خطی شده بی‌نهایت است که چنین تکینگی‌های کلاسیکی را می‌توان نمودی از تکینگی‌های مشابه در نسخهٔ کوانتومی این نظریه‌ها دانست [۳۵]. ایدهٔ مطالعهٔ مدل‌هایی که در آنها لاگرانژی توصیف کنندهٔ مدل دربرگیرندهٔ مشتقات مراتب بالاتر میدان هستند ایدهٔ تازه‌ای نبوده و سابقهٔ بررسی چنین مدل‌هایی لااقل به دههٔ ۵۰ قرن میلادی گذشته باز می‌گردد [۵]. در آن زمان فیزیک‌دانان نظری امید داشتند که شاید نظریه‌های میدان در برگیرندهٔ مشتقات مراتب بالاتر میدان بتوانند راهکاری برای حذف واگرایی‌های ظاهر شده در بسط اختلالی انتگرال‌های فاینمن در نظریهٔ میدان‌های کوانتومی ارائه کنند [۵]. در سالیان اخیر علاقه به مطالعهٔ نظریهٔ میدان‌های کوانتومی با مشتقات از مراتب بالاتر و حتی نظریهٔ میدان‌های کوانتومی با مشتق از مرتبهٔ بی‌نهایت به شکل فزاینده‌ای افزایش یافته است که شاید بتوان مهم‌ترین دلیل چنین علاقهٔ فزاینده‌ای را ناشی از پیشرفت‌های صورت گرفتهٔ اخیر در نظریهٔ ریسمان و گرانش کوانتومی دانست [۷ و ۲۶]. اکنون ضروری است تا اشاره‌ای به انگیزه استفاده از مدل  $HD_N$  در این مقاله داشته باشیم. همان گونه که در مقدمه این مقاله بیان شد مدل  $HD_N$  توسط چگالی لاگرانژی (۱۳) توصیف می‌شود که در آن  $N$  باید یک عدد صحیح مثبت، یعنی  $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$  باشد.

می‌دهد. برای محاسبهٔ میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای در الکتروستاتیک  $HD_N$  در فضای دکارتی سه بعدی لازم است تا از روابط (۶۱) و (۷۲) استفاده کنیم. بنا به رابطهٔ (۶۱) می‌توان نوشت

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \phi(\vec{x}). \quad (۷۶)$$

اگر پتانسیل مربوط به بار نقطه‌ای، یعنی رابطهٔ (۷۲) را در رابطهٔ (۷۶) قرار دهیم خواهیم داشت

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left\{ 1 + \frac{r^2}{2\ell^2} e^{-\frac{r}{\ell\sqrt{2}}} \left[ n_0\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right) + n_1\left(\frac{r}{\ell\sqrt{2}}\right) \right] \right\}. \quad (۷۷)$$

در رابطهٔ (۷۷) بردار واحد شعاعی در دستگاه مختصات

$$\text{قطبی کروی بوده و } n_1(x) = -\frac{\cos x}{x} \text{ و}$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

مرتبهٔ صفر و یک هستند [۲]. با استدلالی مشابه با آنچه در رابطهٔ (۷۳) انجام شد می‌توان نشان داد که در حد  $\ell \rightarrow 0$  رابطهٔ (۷۷) به شکل زیر در می‌آید:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (۷۸)$$

رابطهٔ (۷۸) تأییدی مجدد بر این واقعیت است که الکتروستاتیک  $HD_N$  در فضای دکارتی سه بعدی در حد  $\ell \rightarrow 0$  رفتاری مشابه با الکتروستاتیک ماکسول را از خود به نمایش می‌گذارد. حال اجازه دهید تا به بررسی رفتار رابطهٔ (۷۷) برای نقاط بی‌نهایت نزدیک به محل بار ( $r \rightarrow 0$ ) بپردازیم. داریم

$$\vec{E}(\vec{x}) = \hat{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{r^2}{3\sqrt{2}\ell^2} + O(r^4) \right] \\ = \hat{e}_r \frac{q}{12\sqrt{2}\pi\epsilon_0 \ell^2} r + O(r^3), \quad r \ll \ell \quad (r \rightarrow 0).$$

رابطهٔ (۷۹) نشان می‌دهد که وجود مقیاس طول مشخصهٔ  $\ell$  مانع از واگرایی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به بار می‌شود. به بیان دیگر پارامتر  $\ell$  نقش یک تنظیم کننده را ایفا کرده و بر طبق روابط (۷۵) و (۷۹) باعث جلوگیری از واگرایی پتانسیل و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود.

۶. ۱. مقایسه بین روش‌های به کار برده شده در این مقاله با روش‌های به کار رفته در مراجع [۱۳-۱۷] در تحلیل رفتار یک بار نقطه‌ای ساکن

در مراجع [۱۳-۱۵] نویسندگان نشان داده‌اند که وارد کردن ایده وجود یک کمینه طول در اندازه‌گیری بازه‌های فضایی به درون ساختار نظریه الکترودینامیک ماکسول به یک نظریه الکترودینامیک خطی با مشتقات مراتب بالاتر منجر می‌شود که در آن اندازه خود-انرژی وابسته به یک بار نقطه‌ای مقداری متناهی به دست می‌آید. در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که نظریه الکترودینامیک ماکسول در حضور یک کمینه طول به لحاظ ریاضی هم‌ارز با نظریه الکترودینامیک خطی با مشتقات مراتب بالاتر با پودولسکی-لی-ویک<sup>۱</sup> است [۳۶-۳۸] و پارامتر کمینه طول نقش یک تنظیم کننده را بازی می‌کند که مانع از تکینگی پتانسیل مربوط به یک بار نقطه‌ای در مکان بار می‌شود. در سال ۲۰۱۶ میلادی فیزیک‌دان اوکراینی تکاچوک<sup>۲</sup> گسترده‌تری تک پارامتری از جبر هایزنبرگ در یک فضای دکارتی  $D$  بعدی و یا متناظر با آن یک فضای فاز  $2D$  بعدی ارائه کرد که در ساختار این جبر وجود برش تکانه‌ای برابر با  $P_{\max}$  پیش‌بینی شده بود [۳۹]. بر این اساس، نویسندگان مراجع [۱۷ و ۱۶] به ارائه یک باز فرمول‌بندی از نظریه الکترودینامیک ماکسول در حضور برش تکانه  $P_{\max}$  بر مبنای مرجع [۳۹] پرداخته‌اند که در مدل معرفی شده توسط آنها برش تکانه همانند یک تنظیم کننده عمل کرده و باعث جلوگیری از تکینگی پتانسیل بار نقطه‌ای در محل بار می‌شود. ایده‌های مطرح شده در مراجع [۱۳-۱۷] برای دستیابی به یک نظریه متناهی الکترودینامیک، بر پایه مفهوم دگرگونش فضای فاز و بازفرمول‌بندی الکترودینامیک ماکسول در این فضای فاز دگرگون شده استوار است. در این مقاله، ما با در پیش گرفتن رهیافتی کاملاً متفاوت بدون تغییر دادن ساختار فضای فاز از طریق وارد کردن یک عامل شکل به صورت

$$f_{HD}(\ell^2 \square) = 1 + (-\ell^2 \square)^2 \quad (82)$$

$$= 1 + \ell^4 \square \square,$$

در بخش جنبشی لاگرانژی ماکسول، یعنی

ساده‌ترین انتخاب برای عدد صحیح  $N$ ، یعنی  $N = 1$  به مدل  $HD_1$  منجر می‌شود که بنا به رابطه (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\mathcal{L}_{HD_1} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} [1 - \ell^2 \square] F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu. \quad (81)$$

مدل (۸۱) به معادلات میدان با مشتقات مرتبه چهارم منجر می‌شود که چنین معادلاتی در مبحث مربوط به حذف تکینگی پتانسیل بار نقطه‌ای در مکان بار در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در اینجا به بررسی مجدد این مباحث نخواهیم پرداخت. دومین عضو از نظریه‌های ماکسول از کلاس  $HD_N$  با انتخاب  $N = 2$  به دست می‌آید. مدل  $HD_2$  ویژگی‌های منحصر به فرد زیر را دارد:

الف) در این مدل امکان تعیین شکل تابع گرین برای یک چشمه نقطه‌ای بار ساکن به صورت تحلیلی امکان پذیر است (رابطه (۷۲)).

ب) در حد  $\ell \rightarrow 0$  ( $\ell \ll 1$ )، این مدل قادر به بازتولید تمام نتایج نظریه الکتروستاتیک ماکسول است و از این رو مدل  $HD_2$  را می‌توان تعمیمی سازگار از نظریه ماکسول در نظر گرفت.

پ) در فواصل  $\ell \gg r$  پتانسیل و میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه‌ای در این مدل به پتانسیل و میدان یک بار نقطه‌ای در نظریه ماکسول تبدیل می‌شوند.

ت) بر خلاف نظریه ماکسول که مقدار پتانسیل و میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در نقاط بسیار نزدیک به محل بار بی‌نهایت هستند، در این مدل وجود مقیاس طول مشخصه  $\ell$  باعث متناهی شدن این کمیت‌ها در محل بار می‌شود.

ث) بدیهی است که انتخاب مقادیر  $N \geq 3$  به مدل‌های پیچیده‌تری از نظریه‌های ماکسول از کلاس  $HD_N$  می‌انجامد که این امر تحلیل ریاضی این مدل‌ها و امکان تعیین شکل دقیق تابع گرین بار نقطه‌ای برای این مدل‌ها را به مراتب دشوارتر از مدل  $HD_2$  خواهد کرد.

با توجه به موضوعات مطرح شده در بندهای الف تا ث منطقی خواهد بود که به بررسی ساده‌ترین مدل از نظریه‌های ماکسول از کلاس  $HD_N$ ، یعنی مدل  $HD_2$  بپردازیم و ادامه کار بر روی مدل‌های پیچیده‌تر را به پژوهش‌های آتی موکول کنیم.

<sup>2</sup>Tkachuk<sup>1</sup>Bopp-Podolsky-Lee-Wick

که  $f_{HD_N}(\ell^x \square)$  همان عامل شکل معرفی شده برای نظریه‌های ماکسول از کلاس  $HD_N$  در رابطه (۸) است. بر طبق رابطه (۸۷)، برای مقادیر بالنسبه کوچک  $\ell$ ، کران بالای گزارش شده برای  $\ell$  در رابطه (۸۵) را می‌توان با اندکی اغماض برابر با کران بالای مقیاس طول مشخصه  $\ell$  در مدل‌های  $HD_N$  و به صورت مشخص مدل  $HD_4$  در این مقاله در نظر گرفت.

۳.۶ شکل صریح پتانسیل و میدان الکتریکی برای یک توزیع دلخواه از بارهای الکتریکی ساکن در الکتروستاتیک  $HD_4$  در فضای دکارتی سه بعدی

در ابتدا قبل از انجام هر محاسبه‌ای ضروری است تا یادآور شویم که نظریه الکتروستاتیک  $HD_4$  در فضای دکارتی سه بعدی یک نظریه با مشتقات مراتب بالای خطی است که توسط معادله پواسون مرتبه ششم (۶۲) توصیف می‌شود. از این رو در نظریه  $HD_4$  نیز همانند نظریه الکتروستاتیک ماکسول اصل بسیار مهم و اساسی برهم‌نهی خطی معتبر است. با توجه به روابط (۷۲) و (۷۷)، پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از بار نقطه‌ای  $q$  که در مکان  $\vec{x}'$  قرار گرفته است در مکان  $\vec{x}$  چنین است:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad (88)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \left\{ 1 + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}{2\ell^2} e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}} \left[ n_0 \left( \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}} \right) + n_1 \left( \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}} \right) \right] \right\}. \quad (89)$$

بنا به روابط (۸۸) و (۸۹)، بار نقطه‌ای  $dq = \rho(\vec{x}') d^3x'$  در مکان  $\vec{x}$  پتانسیل و میدان الکتریکی به ترتیب برابر با  $d\phi(\vec{x})$  و  $d\vec{E}(\vec{x})$  را به وجود می‌آورد که مقدار آنها برابر

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \rho(\vec{x}') d^3x', \quad (90)$$

$$-\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} (1 + \ell^x \square \square) F^{\mu\nu}, \quad (83)$$

به یک نظریه متناهی برای الکترودینامیک در ابعاد فضایی  $D \in \{3, 4, 5\}$  دست یافته‌ایم (رابطه (۴۰)). در حالت خاص  $D = 3$  (فضا-زمان چهار بعدی) پتانسیل و میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای ساکن به صورت تحلیلی محاسبه شده‌اند (روابط (۷۲) و (۷۷)) و نشان داده شده است که مقدار این عبارات بر خلاف نظریه ماکسول در محل بار مقادیری متناهی هستند (روابط (۷۵) و (۷۹)).

۲.۶ برآورد عددی برای مقیاس طول مشخصه  $\ell$  در رابطه (۱۲)

در صفحات ۱۸ و ۱۹ مرجع [۳۵] نشان داده شده است که در نظریه‌های ماکسول از کلاس  $GF_N$  که بنا به روابط (۱۰) و (۱۲) عامل شکلی به صورت

$$f_{GF_N}(\ell^x \square) = \exp\left[(-\ell^x \square)^N\right], \quad \ell > 0, N \in \{1, 2, \dots\} \quad (84)$$

دارند مقیاس طول مشخصه  $\ell$  در رابطه (۱۲) کران بالایی برابر با  $m \cdot 10^{-20}$  دارد. یعنی

$$\ell < 10^{-20} m. \quad (85)$$

با اندکی دقت درمی‌یابیم که مقدار عددی مربوط به کران بالای مقیاس طول مشخصه  $\ell$  در رابطه (۸۵) به لحاظ اندازه ۱۰۰ مرتبه کوچک‌تر از مقیاس طول مربوط به برهم‌کنش‌های الکتروضعیف است که در حدود  $10^{-18} m$  است یعنی  $(\ell_{electroweak} = 10^{-18} m)$  [۲۸].

$$\ell_{\max} \sim \frac{1}{100} \ell_{electroweak}. \quad (86)$$

لازم به ذکر است که در سایر مدل‌های غیرموضعی برای الکترودینامیک ماکسول نظیر مدل معرفی شده در مرجع [۴۰]، مقدار عددی تخمین زده شده برای  $\ell$  مقداری بسیار نزدیک به مقدار  $\ell$  در رابطه (۸۵) است. بنا به روابط (۸) ، (۱۰) و (۱۲)، عامل شکل وابسته به مدل‌های  $GF_N$  در رابطه (۸۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$f_{GF_N}(\ell^x \square) = 1 + (-\ell^x \square)^N + O(\ell^{2N}) \\ = f_{HD_N}(\ell^x \square) + O(\ell^{2N}), \quad (87)$$

(۹۳)

$$\vec{E}(\vec{x}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \left\{ 1 + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{2\ell^2} e^{-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}} \left[ n_1 \left( \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}} \right) + n_2 \left( \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}} \right) \right] \right\} \rho(\vec{x}') d^3x'$$

در حد  $\ell \rightarrow 0$  روابط (۹۲) و (۹۳) به شکل زیر در می‌آیند:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x', \quad (94)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (95)$$

روابط (۹۴) و (۹۵) همان روابط آشنای مربوط به پتانسیل و میدان الکتریکی یک توزیع پیوسته از بار الکتریکی در الکتروستاتیک ماکسول در فضای دکارتی سه بعدی هستند [۱ و ۲].

و

(۹۱)

$$d\vec{E}(\vec{x}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \left\{ 1 + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{2\ell^2} e^{-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}} \left[ n_1 \left( \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}} \right) + n_2 \left( \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}} \right) \right] \right\} \rho(\vec{x}') d^3x',$$

است. با توجه به روابط (۹۰) و (۹۱)، شکل پتانسیل و میدان الکتریکی مربوط به یک توزیع پیوسته از بار الکتریکی با چگالی بار حجمی  $\rho$  در الکتروستاتیک  $HD_3$  در فضای دکارتی سه بعدی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\phi(\vec{x}) =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1 - e^{-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{\ell\sqrt{2}}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}') d^3x', \quad (92)$$

## مراجع

1. J D Jackson, "Classical Electrodynamics", John Wiley & Sons, Inc. Third Edition, New York (1999).
2. A Zangwill, "Modern electrodynamics", Cambridge University Press, Cambridge, UK (2013).
3. A Rostami and S K Moayed, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5** (2003) 380.
4. A Rostami and S K Moayed, *Laser Phys.* **14** (2004) 1492.
5. A Pais and G Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **79** (1950) 145.
6. L D Faddeev and A A Slavnov, "Gauge fields: an introduction to quantum theory", CRC Press, Second Edition, Boca Raton, Florida (2018).
7. L Buoninfante, G Lambiase, and A Mazumdar, *Nucl. Phys. B* **944** (2019) 114646.
8. E Witten, *Physics Today* **49** (1996) 24.
9. L N Chang, Z Lewis, D Minic, and T Takeuchi, *Advances in High Energy Physics* **2011** (2011) 493514.
10. K Nozari, M Gorji, V Hosseinzadeh, and B Vakili, *Class. Quantum Grav.* **33** (2016) 025009.
11. W S Chung and H Hassanabadi, *Phys. Lett. B* **785** (2018) 127.
12. F Wagner, *Eur. Phys. J. C* **83** (2023) 154.
13. S K Moayed, M R Setare, and B Khosropour, *Advances in High Energy Physics* **2013** (2013) 657870.
14. S K Moayed, M R Setare, and H Moayeri, *Europhysics Letters* **98** (2012) 50001.
15. S K Moayed, M R Setare, and B Khosropour, *International Journal of Modern Physics A* **28** (2013) 1350142.
16. S Nabipour and S K Moayed, *Iranian Journal of Physics Research* **22** (2022) 269(in Persian).
17. S Nabipour and S K Moayed, *Journal of Research on Many-body Systems* **12** (2023) 51.
18. M Lazar and J Leck, *Symmetry* **12** (2020) 1104.
19. IL Shapiro, "Primer in Tensor Analysis and Relativity", Springer, New York (2019).
20. V P Frolov and A Zelnikov, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 064048.
21. J Boos, *International Journal of Modern Physics D* **27** (2018) 1847022.
22. J Boos, V P Frolov, and A Zelnikov, *Phys. Rev. D* **97** (2018) 084021.
23. J Boos, "Effects of non-locality in gravity and quantum theory", Springer Nature, Cham, Switzerland (2021).
24. J Boos, V P Frolov, and J P Soto, *Phys. Rev. D* **103** (2021) 045013.
25. C M Reyes, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 105008.

26. N Moeller and B Zwiebach, *Journal of High Energy Physics* **10** (2002) 034.
27. A Izadi and S K Moayedi, *Annals of Physics* **411** (2019) 167956.
28. M Ranaiy and S K Moayedi, *Modern Physics Letters A* **35** (2020) 2050038.
29. C. Efthimiou and C. Frye, “*Spherical harmonics in  $p$  dimensions*”, World Scientific, Singapore (2014).
30. A Accioly, J H Neto, G Correia, G Brito, J de Almeida, and W Herdy, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 105042.
31. M R Spiegel, S Lipschutz, and J Liu, “*Schaum’s Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*”, McGraw-Hill, Fifth Edition (2018).
32. M Dalarsson and N Dalarsson, “*Tensors, relativity, and cosmology*”, Academic Press, Second Edition, New York (2015).
33. F Fathi and S K Moayedi, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **15** (2018) 1850118.
34. E Freitag and R Busam, “*Complex Analysis*”, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Second Edition, Berlin (2005).
35. J A P Soto, “*Gravitational and electromagnetic field of static and ultrarelativistic objects in nonlocal theory*”, MSc thesis, Alberta University, Canada (2022).
36. F Bopp, *Annalen der Physik* **430** (1940) 345.
37. B Podolsky, *Phys. Rev.* **62** (1942) 68.
38. T D Lee and G C Wick, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1033.
39. V M Tkachuk, *Foundations of Physics* **46** (2016) 1666.
40. A V Silva, E M C Abreu, and M J Neves, *International Journal of Modern Physics A* **31** (2016) 1650096.