

## مطالعه افت خیزهای آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی هسته‌های کروی با استفاده از روش تخمین چگالی کرنلی

عسگر حسین نژاد<sup>۱\*</sup>، امیر جلیلی مجارشین<sup>۲</sup>، پان فنگ<sup>۲</sup>، مسعود صیدی<sup>۳</sup>، و هادی صبری<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

<sup>۲</sup> دانشکده فیزیک، دانشگاه لیائونینگ نرمال، دالیان، چین

<sup>۳</sup> گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه ایلام، ایلام

پست الکترونیکی: a.hosseinzhad@tabrizu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۷/۶؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۱/۱/۱۰)

### چکیده

در این مقاله، همبستگی آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی هسته‌های کروی ارزیابی شده است. برای این هدف، هسته‌های کروی زوج - زوج در محدوده جرمی  $100 < A < 126$  انتخاب و با استفاده از حد دینامیکی  $U(5)$  مدل برهمکنش بوزونی، احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی بین ترازهای مختلف باند پایه محاسبه شده است. برای بررسی میزان همبستگی آماری، احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی از روش غیر پارامتری تخمین چگالی کرنلی در قالب آمار نزدیک‌ترین فاصله بین ترازهای نظریه ماتریس‌های تصادفی استفاده شد. همچنین، رفتار منظم یا غیر منظم دنباله‌های انتخابی، بر اساس معیار واگرایی کولبک - لایبلر تعیین شد. نتایج حاصل، وجود همبستگی آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی مختلف بین ترازهای باند پایه را نشان می‌دهد. همچنین با افزایش اسپین تراز اولیه در گذار چهار قطبی الکتریکی، رفتار همبسته در دنباله انتخابی افزایش می‌یابد.

**واژه‌های کلیدی:** همبستگی آماری، احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی، مدل برهمکنش بوزونی، روش تخمین چگالی کرنلی، واگرایی کولبک - لایبلر.

### ۱. مقدمه

ماتریس‌های تصادفی تعلق دارد که وابسته به تقارن‌های بنیادی سامانه تعریف می‌شود [۱ و ۲]. با توجه به تقارن وارونی زمان برهمکنش‌های هسته‌ای، آنسامبل متعامد گوسی<sup>۱</sup> برای توصیف همبستگی کمیات در هسته‌ها استفاده می‌شود. نتایج مطالعات گسترده پیرامون سامانه‌های فیزیکی نشان می‌دهد که نظریه

نظریه ماتریس‌های تصادفی برای اولین بار جهت توضیح افت و خیزهای آماری حاصل از تشدیدهای جذب نوترون‌های سریع در واکنش هسته‌های مرکب سنگین معرفی شد. بر اساس این نظریه، ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه‌های هسته‌ای به آنسامبلی از

۱. Gaussian orthogonal ensemble (GOE)

ماتریس‌های تصادفی، افت و خیزهای آماری چنان سامانه کوانتومی را توصیف می‌کند که دینامیک کلاسیک مرتبط با آن غیرمنظم<sup>۱</sup> است [۳-۶]. ماهیت غیرمنظم دینامیک تک ذره‌ای نوکلئون‌ها در هسته با استفاده از تقریب میدان میانگین بررسی شده است. به این دلیل، پتانسیل میدان میانگین تغییر شکل یافته برای توصیف تعامل بین ساختار لایه‌ای و افت و خیزها در طیف تک ذره‌ای استفاده می‌شود [۷ و ۸]. با این حال، برهمکنش هسته‌ای باقی‌مانده، پیکربندی‌های مختلف میدان میانگین را ترکیب کرده و بر افت و خیزهای آماری طیف بس ذره‌ای و البته توابع موج اثر می‌گذارد. این افت و خیزها با استفاده از مدل‌های مختلف هسته‌ای قابل بررسی هستند که موفقیت مدل برهمکنش بوزونی در مقایسه با سایر مدل‌ها برای بررسی طیف ترازهای کم انرژی هسته و همچنین احتمال گذارهای الکترومغناطیسی در مقالات مختلف گزارش شده است [۹ و ۱۰]. توصیف عملگر گذار چهار قطبی الکتریکی بر اساس عملگرهای خلق (و فنا) بوزونی و همچنین توصیف ترازهای مختلف هسته با استفاده از اعداد کوانتومی هر زنجیره تقارنی، امکان محاسبه احتمال گذارهای چند قطبی الکترومغناطیسی را ممکن می‌سازد که وجود اطلاعات تجربی قابل توجه برای گذارهای چهار قطبی الکتریکی، سبب تمرکز بر این مد گذار می‌شود [۱۱ و ۱۲].

اولین بررسی افت و خیز آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی با استفاده از نظریه ماتریس‌های تصادفی، به مطالعه الحسید و همکارانش در منبع [۱۳] پیرامون احتمال‌های گذار دو قطبی مغناطیسی و چهار قطبی الکتریکی در هسته  $^{22}\text{Na}$  مربوط می‌شود. نتیجه حاصل، تبعیت رفتار آماری احتمال‌های گذار از توزیع پورتر-توماس [۱۴] را نشان داد که منطبق با توزیع گوسی در نظریه ماتریس‌های تصادفی است. مطالعات مختلفی پیرامون وابستگی احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی به ساختار مدل لایه‌ای، تغییر شکل هسته‌های انتخابی و غیره انجام شده است. نتایج این مطالعات، طبقه‌بندی تقارنی هسته‌ها و پیش‌بینی روند تکرار احتمال گذارهای چهار قطبی در

ناحیه انرژی‌های تشدید را ممکن می‌سازد [۱۵-۱۸]. در این مقاله، هدف ما بررسی افت و خیزهای آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی برای هسته‌های زوج-زوج کروی در محدوده جرمی  $100 < A < 126$  است. به این منظور احتمال‌های گذار چهار قطبی الکتریکی را با استفاده از مدل برهمکنش بوزونی در قالب حد دینامیکی  $U(5)$  محاسبه کردیم. با استفاده از یک روش غیر پارامتری به نام روش تخمین چگالی کرنلی و استفاده از معیار واگرایی کولبک-لیبلر<sup>۲</sup>، توزیع داده‌های موجود را با دو توزیع پواسونی و گوسی مقایسه کرده و وابستگی به پارامترهای مختلف را ارزیابی کردیم. با وجود این که کمیت چهار قطبی الکتریکی بیانگر میزان تغییر شکل هسته‌ها از حالت کروی است، دلیل استفاده از واژه کروی برای هسته‌های مورد بررسی نزدیک بودن این هسته‌ها به شکل کروی است. امروزه اثبات شده است که هیچ هسته‌ای به صورت کامل کروی نیست و در نتیجه هسته‌هایی با بیشترین میزان نزدیکی به شکل کره هم گذار الکترومغناطیسی دارند.

## ۲. روش‌ها

### ۲.۱. احتمال گذار چهارقطبی الکتریکی

اطلاعات قابل توجهی را می‌توان از بررسی شدت و مد تابش‌های گامای گسیلی از هسته‌های مختلف استخراج کرد. همچنین، می‌توان از احتمال گذارهای چند قطبی الکترومغناطیسی به عنوان کمیتی که هم وابسته به عملگر عامل گذار و هم وابسته به تابع موج مؤثر سامانه است، برای مطالعه ویژگی‌های ساختاری استفاده کرد. احتمال گذار مرتبه  $\lambda$  الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(E\lambda; J_i \rightarrow J_f) = \frac{\left| \langle J_f, \zeta \parallel T(E\lambda) \parallel J_i, \xi \rangle \right|^2}{2J_i + 1}$$

$T(E\lambda)$  معرف عملگر گذار در مدل انتخابی و کمیت‌های  $\xi$  و  $\zeta$  معرف مجموعه اعداد کوانتومی لازم برای برچسب‌زنی حالات هستند. ما در این مطالعه، از مدل برهمکنش بوزونی برای

۲. Kullback-Leibler divergence (KLD)

۱. Chaotic

محاسبه احتمال‌های گذار استفاده کردیم.

مدل برهمکنش بوزونی به عنوان یکی از مؤثرترین مدل‌های جبری، توسط آریما و یاکلو در سال ۱۹۷۵ برای توصیف برانگیختگی‌های جمعی هسته‌های اتمی، ارائه شد [۱۹]. در نسخه یک این مدل، IBM-1، صرفاً با استفاده از بوزون‌های  $s$  و  $d$  که به ترتیب اندازه حرکت‌های  $0$  و  $2$  حمل می‌کنند، سر و کار خواهیم داشت و هامیلتونی و عملگرها بر اساس کوانتس ثانویه این بوزون‌ها تعیین خواهد شد. هامیلتونی عمومی مدل برهمکنش بوزونی به صورت زیر است:

$$H = \varepsilon n_d + \eta (Q^\lambda \cdot Q^\lambda) + cL^2, \quad (1)$$

زیر جبرها برای IBM-1، را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\begin{aligned} U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) & \quad (I) \\ U(6) \supset SU(3) \supset O(3) & \quad (II) \\ U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) & \quad (III) \end{aligned}$$

زنجیره‌های اول (I)، دوم (II) و سوم (III) به ترتیب متناظر با تقارن دینامیکی  $U(5)$  برای توصیف هسته‌های کروی، تقارن  $SU(3)$  برای توصیف هسته‌های تغییر شکل یافته دورانی و تقارن  $SO(6)$  برای توصیف هسته‌های تغییر شکل یافته غیر محوری استفاده می‌شود.

هسته‌های مختلف شناخته شده در طبیعت با استفاده از مشخصه‌های متناظر با ساختار طیف انرژی، توزیع سطوح انرژی پتانسیل و غیره در قالب این زنجیره‌های تقارنی طبقه‌بندی می‌شوند [۲۰ و ۲۱]. هسته‌های انتخابی در این مطالعه با توجه به قرار گرفتن در نزدیکی لایه بسته پروتونی، در قالب حد دینامیکی  $U(5)$  قرار گرفته و از مجموعه اعداد کوانتومی متناظر با گروه‌های تقارنی این زنجیره برای برچسب‌زنی حالت‌ها استفاده می‌کنیم. اعداد کوانتومی این حد دینامیکی به صورت  $(nd, n_s, \tau, L)$  هستند. برای محاسبه اعداد کوانتومی از شمارش تعداد بوزون‌های بیرون لایه بسته شروع می‌کنیم که برابر با نصف تعداد پروتون‌ها و نوترون‌های بیرون لایه بسته (شمارش از نزدیک‌ترین عدد جادویی) بوده و با نماد  $N_B$  نشان می‌دهیم. اعداد کوانتومی  $nd$  و  $n_s$  به ترتیب معرف تعداد بوزون‌های  $d$  و  $s$  هستند که مجموع آنها برابر با تعداد کل بوزون‌ها است. عدد

کوانتومی  $\tau$  زوجیت (یا ارشدیت) نامیده می‌شود و برابر با تعداد جفت بوزونی است که با اندازه حرکت زاویه‌ای صفر جفت نشده‌اند. مقادیر مجاز برای این عدد کوانتومی به صورت  $0, 1, 2, \dots, nd - 2, nd - 4, \dots, \tau = 4, 7, 3$  است. همچنین  $L$  عدد کوانتومی زاویه‌ای مداری است که بر اساس رابطه  $n_d = 2n_\beta + 3n_\Delta + \lambda$  و  $n_\Delta = 2\lambda, 2\lambda - 2, \dots, \lambda + 2, \lambda + 1, \lambda$  بر اساس معیار اعداد کوانتومی این زنجیره تعریف می‌شود. اعداد کوانتومی مضاعف  $n_\Delta$  و  $n_\beta$  برای حذف تبهگنی موجود در فرایند تقلیل از گروه تقارنی  $O(5)$  به  $O(3)$  در این زنجیره تقارنی مورد استفاده قرار می‌گیرند که به ترتیب،  $n_\Delta$  تعداد ۳ بوزون ترکیب شده با اندازه حرکت صفر و  $n_\beta$  تعداد جفت بوزون‌هایی با تکانه صفر را توصیف می‌کنند.

مفهوم تغییر شکل ترازها از گذارهای الکترومغناطیسی مابین ترازها ناشی می‌شود. برای آشنایی هر چه بیشتر این ادعا می‌توان به منبع [۲۰] اشاره کرد. در این مطالعه، احتمال‌های گذار چهارقطبی الکتریکی برای گذارهای مختلف بلند پایه محاسبه شده است. گذار الکترومغناطیسی مرتبه دوم (چهارقطبی الکتریکی)، محتمل‌ترین نوع گذار در آن دسته از ترازها با پارته مثبت است. به این دلیل و همچنین وجود اطلاعات تجربی قابل توجه برای این گذار، در این مطالعه افت و خیزهای آماری احتمال‌های گذار الکتریکی مرتبه دوم را محاسبه می‌کنیم [۲۲] و [۲۳]. عملگر گذار چهارقطبی الکتریکی در مدل برهمکنش بوزونی از عملگرهای خلق و نابودی بوزون به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$\hat{T}_\mu^{(E2)} = \alpha_2 \left( \left[ \hat{d}^\dagger \times \tilde{s} + \tilde{s}^\dagger \times \tilde{d} \right]_\mu^{(2)} + \beta_2 \left[ \hat{d}^\dagger \times \tilde{d} \right]_\mu^{(2)} \right), \quad (2)$$

که در آن  $\alpha_2$  معرف بار مؤثر بوزون و  $\beta_2$  یک ضریب بدون بعد است. مقادیر  $\alpha_2$  و  $\beta_2$  از طریق برازش با مقدار تجربی احتمال گذار، با استفاده از الگوریتم ژنتیک در نرم افزار متلب محاسبه می‌کنیم. در رابطه فوق عملگر  $Q = \left[ \hat{d}^\dagger \times \tilde{s} + \tilde{s}^\dagger \times \tilde{d} \right]$  معرف عملگر گشتاور چهار قطبی الکتریکی است. بعد از به دست آمدن مقادیر نظری احتمال‌های گذار، با استفاده از روش تخمین چگالی کرنلی افت و خیزهای آماری داده‌ها را بررسی می‌کنیم.

## ۲.۲. بررسی همبستگی آماری

مطالعه رفتار آماری سامانه‌های مختلف فیزیکی از ابتدای دهه ۱۹۸۰ میلادی به عنوان یکی از مفاهیم مهم و اساسی برای طبقه‌بندی این سامانه‌ها و البته بررسی تأثیر عوامل مختلف روی تقارن‌های پنهان هر سامانه مورد توجه قرار گرفته است. این مطالعات از نظریه ماتریس‌های تصادفی برای توصیف رفتار عمومی ویژه مقادیر هامیلتونی سامانه‌های هسته‌ای، بسته به تقارن‌های سامانه، شروع شد. اما در حال حاضر در شاخه‌های دیگر علم فیزیک همانند حالت جامد و فیزیک نظری و همچنین زمینه‌های متعدد در علم شیمی، فناوری اطلاعات و اقتصاد بسیار توسعه یافته است [۵ و ۲۵]. نظریه ماتریس‌های تصادفی و آمارهای مختلف آن از جمله تابع توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین تراز، آمار  $\Delta_3(L)$  دایسون - مهتا و غیره بر پایه مقایسه افت و خیزهای آماری دنباله‌های مورد مطالعه با پیش‌بینی‌های این نظریه، سامانه‌های مختلف را در قالب منظم یا نامنظم طبقه‌بندی می‌کند. از طرفی با توجه به کم بودن نسبی تعداد ترازهای با تقارن‌های مشابه یعنی اسپین و پاریته یکسان در هسته‌های منفرد، گروه‌های مختلف مجبور به در نظر گرفتن مجموعه‌ای از هسته‌ها با ویژگی‌های مشترک از جمله محدوده‌های جرمی خاص، تقارن‌های دینامیکی و غیره شده‌اند [۲۶-۲۹]. آمار توزیع نزدیک‌ترین فاصله بین تراز<sup>۱</sup> به عنوان پرکاربردترین آمار برای مطالعه سامانه‌های فیزیکی شناخته می‌شود. شرط لازم و کافی برای استفاده از این مدل آماری وجود دنباله‌هایی با میانگین واحد است. توسعه کاربردهای نظریه ماتریس‌های تصادفی برای بررسی همبستگی آماری کمیاتی مثل احتمال گذار با بازه تغییرات بزرگ، برای اولین بار توسط الحسید صورت گرفت [۹]. مطالعات گسترده پیرامون وابستگی افت و خیز آماری این کمیات به ویژگی‌های ساختاری هسته‌ها، توسط حمودی [۳۰] انجام شده است. ما برای تولید دنباله‌های آماری از روش معرفی شده توسط این افراد استفاده می‌کنیم اما در بررسی میزان همبستگی، روش غیر پارامتری را معرفی خواهیم کرد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

برای مطالعه افت و خیزهای آماری احتمال‌های گذار چهارقطبی الکتریکی، ابتدا باید داده‌ها واپیچش<sup>۲</sup> شوند. مقدار میانگین احتمال‌های گذار برای گذار از حالت اولیه  $J_i$  با انرژی اولیه  $E_i$  به حالت نهایی  $J_f$  با انرژی  $E_f$  را طبق رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$B(E\gamma; J_i \rightarrow J_f) = \frac{\sum_{i,f} B(E\gamma; J_i \rightarrow J_f) e^{-\frac{(E-E_i)^2}{2\gamma^2}} e^{-\frac{(E-E_f)^2}{2\gamma^2}}}{\sum_{i,f} e^{-\frac{(E-E_i)^2}{2\gamma^2}} e^{-\frac{(E-E_f)^2}{2\gamma^2}}} \quad (3)$$

که در آن کمیت  $\gamma$  یک پارامتر انتخابی است و مقدار آن را به اندازه‌ای بزرگ انتخاب می‌کنیم که اثرات افت و خیزها در مقادیر احتمال‌های گذار را به حداقل برساند؛ تا جایی که تنوع ترازهای انرژی برای نرخ‌های گذار از بین نرود. در این مطالعه از مقدار مشابه با منبع [۳۰]،  $\gamma = 2/5$  استفاده می‌کنیم. سپس با استفاده از رابطه زیر، داده‌های واپیچش شده را برای جایگذاری در تابع توزیع، تغییر متغیر می‌دهیم:

$$y_{if} = \frac{B(E\gamma; J_i \rightarrow J_f)}{B(E\gamma; J_i \rightarrow J_f)} \quad (4)$$

با استفاده از رابطه (۴) داده‌های واپیچش شده را به دست می‌آوریم. برای داده‌های مذکور بازه‌های مختلفی را تعیین می‌کنیم. تعداد داده‌ها در هر بازه تقسیم بر تعداد کل داده‌ها معادل با احتمال وقوع داده‌ها در هر بازه است. مجموعه این احتمال‌ها، هیستوگرام هر دنباله از داده‌ها را نتیجه می‌دهد. این هیستوگرام با دو حد پواسونی (منظم) [۵]:

$$P(s) = e^{-s} \quad (5)$$

برای انطباق رفتار آماری غیر همبسته و در طرف مقابل، با توزیع آنسامبل متعامد گوسی (ویگنری - غیر منظم):

$$P(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4}\right) \quad (6)$$

برای بررسی همبستگی آماری نمونه‌های هر دنباله مقایسه شده و انطباق کیفی، روشی رایج برای اعلام همبستگی یا استقلال داده‌ها است. مطالعات متعدد صورت گرفته حول ویژگی‌های آماری سامانه‌های مختلف، رفتار بینابین دو حد منظم

حقیقی دارد. هدف ما پیشنهاد تخمین‌گرهای  $\hat{f}$  برای تابع توزیع کمیات تصادفی، یعنی  $f$  است. برای این هدف، ابتدا، کمیت  $I(=I_k)$  را به عنوان بازه طبقه‌بندی داده‌های واقعی در نظر می‌گیریم. اگر  $h_k$  طول  $I_k$  را نشان دهد، کمیت  $N_k = \#\{i: X_i \in I_k, 1 \leq i \leq n\}$  تعداد مشاهده‌ها در  $I_k$  و  $X_1, X_2, \dots, X_n$  را نمایان می‌کند. پس داریم:

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_I(x, X) = \frac{N_k}{nh_k}, \quad x \in I_k, \quad (7)$$

$\hat{f} = \hat{f}_I$  معرف هیستوگرام متناظر با بازه  $I_k$  و طول بازه  $h_k$  است [۳۷]. در این مقاله طول بازه‌ها را برای تمام داده‌های انتخابی مشلبه در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن این مفاهیم، تخمین‌گر چگالی  $\hat{f} = \hat{f}_a$  به صورت زیر تعریف می‌شود:  $(a = (K, h))$  [۳۵-۳۸]:

$$\hat{f}(x) = \hat{f}_a(x, X) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (8)$$

$K$  در رابطه بالا تابع کرنل است که یک تابع حقیقی غیر منفی بهنجارشده به یک است  $(\int K(x) dx = 1)$ . همچنین  $X_i$  در محاسبات ما، هر کدام از احتمال‌های گذار در دنباله انتخابی است. در این فرایند، تعیین طول بازه و انتخاب مناسب برای تابع چگالی کرنلی مهم‌ترین موارد است. با توجه به نتایج مطالعات قبلی ما [۴۳] در خصوص بررسی رفتار آماری با استفاده از روش تخمین چگالی کرنلی، از کرنل گوسی

$$K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x - X_i}{h}\right)^2}{2}}, \quad (9)$$

به دلیل خطای بسیار کم آن در مقایسه با توابع دیگر استفاده کردیم [۲۷-۳۰]. همچنین با استفاده از رابطه‌ای که اسکات در منبع [۳۸] برای طول بازه در مطالعات آماری غیر پارامتری

$$h = 1.6 \min\left\{\sigma, \frac{IQR}{1.34}\right\} n^{-\frac{1}{5}}, \quad (10)$$

پیشنهاد کرده بود ( $h$  بیانگر طول بازه‌ها،  $\sigma$  بیانگر انحراف استاندارد داده‌ها،  $IQR$  محدوده بین یک چهارم و  $n$  تعداد داده‌ها در دنباله را توصیف می‌کند [۴۵])، طول بازه را برای تمام

و غیرمنظم برای دسته عمده‌ای از این سامانه‌ها را نشان می‌دهد. در این شرایط، مقایسه هیستوگرام هر دنباله با منحنی دو حد پواسونی و ویگنری، نتیجه‌ای به همراه ندارد. برای حل این مشکل، روش پارامتری مبتنی بر معرفی یک تابع توزیع مثل تابع توزیع برودی [۵] و غیره چنان است که با تغییر پارامتر، امکان پوشش هر دو حد مورد نظر فراهم آید. در هر یک از این توابع، میزان پارامتر به دست آمده با استفاده از روش‌های مختلف تخمین، رفتار منظم یا نامنظم سامانه‌های هسته‌ای را نشان می‌دهد. برای غلبه بر معایب روش پارامتری از جمله افزایش خطای ناشی از روش تخمین انتخابی و همچنین محدودیت‌های حاصل از اعمال توابع توزیع مختلف، روش‌های غیر پارامتری پیشنهاد می‌شود.

## ۲. روش تخمین چگالی کرنلی

در روش‌های مطالعاتی آماری، روش تخمین چگالی کرنلی به عنوان یک روش غیر پارامتری معروف است، که تابع چگالی احتمال را برای دنباله شامل متغیرهای تصادفی تخمین می‌زند [۳۱-۴۱]. این روش یک فرایند بنیادی برای تحلیل آماری بوده و در برخی از رشته‌ها مانند پردازش سیگنال و اقتصاد، به روش پنجره پارزن-رزنبالت<sup>۱</sup> معروف است [۳۶ و ۳۸]. در منابع [۴۵-۳۱] توضیحات کامل در مورد تخمین چگالی کرنلی ارائه شده است و ما در این مقاله مفاهیم و روش‌های مورد نیاز را ارائه می‌کنیم.

ساده‌ترین شکل غیر پارامتری تخمین چگالی، هیستوگرام است. روش‌های انتخاب عرض هیستوگرام و همچنین پارامترهای هموار کردن تخمین‌گرهای چگالی کرنلی بر اساس تخمین‌گرهای توابع ریسک مطابق با خطای مربع کامل شده میانگین<sup>۲</sup> و اندازه‌گیری اطلاعات کولبک-لیبلر<sup>۳</sup> هستند [۳۷]. فرض می‌کنیم  $X_1, X_2, \dots, X_n$  کمیات مستقل بوده و به طور یکسان توزیع شده‌اند.  $x$  هم متغیر توصیف کننده تغییرات در فضای متغیرهای تصادفی با چگالی احتمال  $f$  است که مقدار

۳. Kullback-Leibler

۱. Parzen-Rosenblatt window

۲. Mean integrated squared error (MISE)

تأثیر پذیری از مفهوم تغییر شکل ناشی از اندرکنش چهارقطبی، برای هسته‌های انتخابی ما سهم صفر خواهد داشت. در این مقاله از مدل برهمکنش بوزونی استفاده شده است و این مدل مختص هسته‌های سنگین و نیمه سنگین است که خاصیت تجمعی دارند. به همین دلیل با وجود مقدار داشتن چهارقطبی الکتریکی حتی برای بعضی از سبک‌ترین هسته‌ها، از هسته‌های سبک‌تر استفاده نکرده‌ایم.

حال با اثر عملگر گذار بر روی حالت‌های انتخابی برچسب خورده، مقدار احتمال‌های گذار چهارقطبی الکتریکی با استفاده از مقدار چشم‌داشتی رابطه (۲) به صورت:

$$B \left( \begin{matrix} E_f; n_d + 1, \tau = n_d + 1, n_\Delta = \\ \tau = n_d, L_f = 2n_d + 2 \rightarrow n_d, \tau = \\ n_d, n_\Delta = 0, L_d = 2n \end{matrix} \right) = \alpha_p^2 \frac{L + 2\tau N - L}{2}, \quad (12)$$

حاصل می‌شود. در نهایت، با استفاده از الگوریتم ژنتیک در نرم افزار متلب، مقادیر بار مؤثر بوزون،  $\alpha_p$ ، برای هر هسته را از مقایسه نتایج تئوری و داده‌های تجربی متناظر [۴۶-۵۸] محاسبه کردیم که این مقادیر به همراه مقادیر تجربی احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی و همچنین نتایج حاصل از این مطالعه در جدول ۱ گزارش شده است. همچنین مقادیر واپیچش شده احتمال گذارهای چهار قطبی برای تحلیل آماری در ستون آخر این جدول فهرست شده‌اند. مطالعات مشابهی نیز در این زمینه صورت گرفته است [۴۳، ۵۹-۶۱].

نتایج حاصل از این مطالعه برای احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی هسته‌های کروی، در مقایسه با مقادیر تجربی متناظر محاسبه شدند. این نتیجه، ضمن تأیید فرایند برازش و محاسبات تئوری صورت گرفته در این مقاله، انتخاب این هسته‌ها به عنوان مثال‌هایی برای نمونه‌های کروی را تأیید می‌کند. در مرحله بعدی، داده‌های واپیچش شده در قالب سه دنباله آماری طبقه‌بندی و با استفاده از فرایند تخمین غیر پارامتری چگالی کرنلی تحلیل شدند. نتایج حاصل از مقایسه هیستوگرام این سه دنباله با دو حد پواسونی و ویگنری بر اساس معیار واگرایی کولبک - لایبلر در جدول ۲ گزارش شده است.

همچنین هیستوگرام هریک از این دنباله‌ها به همراه مقایسه آن با دو حد منظم و غیر منظم در شکل ۱ نمایش داده شده است.

دنباله‌های مورد مطالعه، به صورت  $dh = 0/2$  انتخاب کردیم. در گام آخر و برای بررسی موقعیت آماری داده‌های هر دنباله نسبت به دو حد منظم و غیر منظم، از معیار واگرایی کولبک-لیبلر [۴۵]:

$$D_{KL}(PQ) = \sum_i P(X_i) \log \frac{P(X_i)}{Q(X_i)}, \quad (11)$$

استفاده می‌کنیم که در آن  $P(X_i)$  معرف تابع توزیع به دست آمده با استفاده از روش تخمین چگالی کرنلی و  $Q(X_i)$  بیانگر تابع توزیع پواسونی (یا گوسی) است. با استفاده از این معیار به نحوی که شرط  $D_{KL}(PQ) \rightarrow 0$ ، تأمین شود، رفتار آماری هر دنباله در روش غیر پارامتری مشخص می‌شود. با مقایسه عدد حاصل از رابطه (۱۲) با جایگذاری دو تابع پواسونی و ویگنری، عدد کوچک‌تر تطابق ویژگی‌های آماری دنباله با رفتار منظم یا غیر منظم را مشخص می‌کند.

### ۳. نتایج

هدف ما در این مقاله، بررسی همبستگی آماری احتمال‌های گذار چهار قطبی الکتریکی برای گذارهای بین ترازهای باند پایه، یعنی  $0g^+ \rightarrow 2g^+$ ،  $2g^+ \rightarrow 4g^+$  و  $4g^+ \rightarrow 6g^+$ ، هسته‌های کروی با استفاده از مدل برهمکنش بوزونی است. دلیل انتخاب این گذارها، فراوانی نسبی این گذارها نسبت به گذارهای مراتب دیگر الکتریکی و همچنین اطلاعات تجربی قابل توجه برای آنها است. به این منظور حالت‌های کوانتومی هر تراز مورد نظر را با اعداد کوانتومی متناظر با حد  $U(5)$  به صورت  $|nd, n_s, \tau, L\rangle$  برچسب می‌زنیم. در گام بعد، ابتدا با استفاده از رابطه ضرب تانسوری

$$\left[ s^m \times d^n \right]_q^k = \sum_{q', q''} \langle k' q' k'' q'' | k q \rangle s_q^m d_q^n,$$

جملات رابطه (۲) حاصل می‌شود. جمله اول این معادله، تنها برای آن دسته از گذارها نتیجه غیر صفر دارد که قواعد گزینش بین حالت‌ها به صورت  $\Delta n_d = 1, \Delta n_\Delta = 0 \text{ or } 1, \Delta \tau = 1$  برقرار باشد [۱۵]. قواعد گزینش برای غیر صفر شدن سهم جمله دوم معادله (۲)،  $\Delta n_d = 0, \Delta n_\Delta = 1, \Delta \tau = 0 \text{ or } 1$  است که البته به دلیل

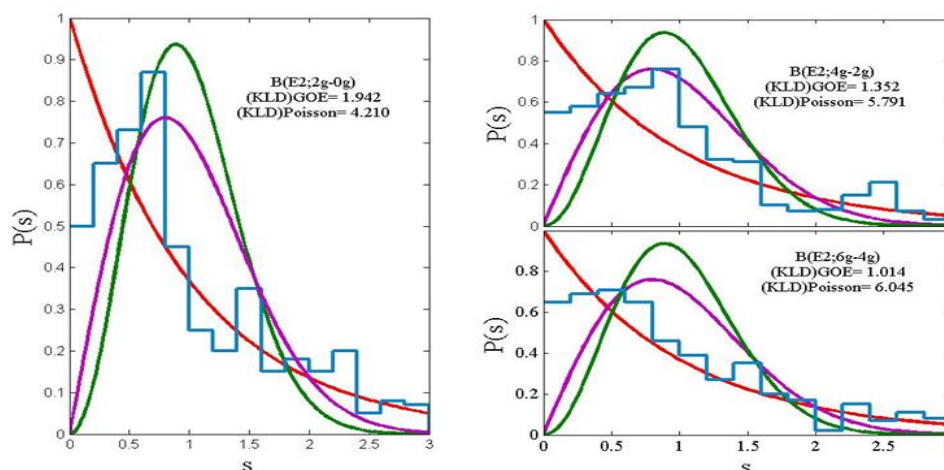
جدول ۱. مقادیر تجربی و نظری احتمال‌های گذار چهار قطبی الکتریکی برای هسته‌های کروی. مقادیر تجربی از منابع [۴۶-۵۸] استخراج شده است. مقادیر بار مؤثر بوزونی،  $\alpha_p$ ، برحسب واحد وایسکوف ذکر شده است. کمیت  $y_i$  مقادیر واپیچش شده احتمال گذارهای چهار قطبی برای تحلیل آماری هستند.

$y_i = \frac{B(E\gamma)_{IBM}}{B(E\gamma)_{IBM}}$	$B(E\gamma)_{IBM}$ (W.u.)	$B(E\gamma)_{EXP}$ (W.u.)	گذار	$\alpha_2$	هسته
۰,۳۳۸۲	۲۶,۱۱۶	۴۵,۱	$2^+ \rightarrow 0^+$		
۰,۱۷۱۶	۱۳,۲۵۳	۶۶	$4^+ \rightarrow 2^+$	۰,۹۸۳	$^{102}_{44}Ru$
۰,۲۲۹۳	۱۷,۷۰۸	۶۹	$6^+ \rightarrow 4^+$		
۰,۷۵۲۸	۵۸,۱۳	۵۷,۹	$2^+ \rightarrow 0^+$	۱,۰۱۵	$^{104}_{44}Ru$
۱,۰۷۵۴	۸۳,۰۴	۸۳	$4^+ \rightarrow 2^+$		
۰,۴۱۵۴	۳۲,۰۸	۳۲,۶	$2^+ \rightarrow 0^+$	۱,۰۰۳	$^{102}_{46}Pd$
۰,۶۵۷۶	۵۰,۷۸۱	۵۰,۹	$4^+ \rightarrow 2^+$		
۰,۳۳۷۱	۲۶,۰۳	۴۴,۳	$2^+ \rightarrow 0^+$		
۰,۲۶۷۴	۲۰,۵۶	۷۱	$4^+ \rightarrow 2^+$	۰,۹۹۸	$^{106}_{46}Pd$
۲,۴۲۰۱	۱۸۶,۸۷	۸۸	$6^+ \rightarrow 4^+$		
۰,۳۲۳۷	۲۵,۲۲۶	۲۵,۸	$2^+ \rightarrow 0^+$	۱,۱۰۴	$^{106}_{48}Cd$
۰,۵۹۳۹	۴۵,۸۶۱	۴۶	$4^+ \rightarrow 2^+$		
۰,۳۴۱۹	۲۶,۴	۲۶,۴	$2^+ \rightarrow 0^+$	۰,۹۵۹	$^{108}_{48}Cd$
۰,۵۳۰۲	۴۰,۹۴	۴۱	$4^+ \rightarrow 2^+$		
۰,۳۲۷۹	۲۵,۳۱۹	۶۲	$2^+ \rightarrow 0^+$		
۰,۴۵۰۲	۳۴,۷۷۶	۹۱	$4^+ \rightarrow 2^+$	۱,۰۱۸	$^{122}_{54}Xe$
۳,۴۹۸۲	۲۷۰,۱۱۵	۵۵	$6^+ \rightarrow 4^+$		
۰,۴۷	۳۶,۲۹۵	۵۷,۸	$2^+ \rightarrow 0^+$		
۰,۵۱۳۵	۳۹,۶۵	۶۷,۸	$4^+ \rightarrow 2^+$	۱,۱۰۲	$^{124}_{54}Xe$
۷,۹۰۲۹	۶۱۰,۲۲۳	۸۸	$6^+ \rightarrow 4^+$		
۰,۴۰۴۱	۳۱,۲۰۵	۳۱,۱	$2^+ \rightarrow 0^+$	۱,۰۱۹	$^{124}_{52}Te$
۱,۲۶۳۵	۹۷,۵۶۱	۹۷,۵۲	$4^+ \rightarrow 2^+$		
۰,۲۵۷۴	۱۹,۸۷۵	۲۵,۴	$2^+ \rightarrow 0^+$		
۰,۸۳۹۴	۶۴,۸۲۱	۳۴	$4^+ \rightarrow 2^+$	۰,۹۶۸	$^{126}_{52}Te$
۰,۶۱۵۵	۴۷,۵۳۲	۱۷,۸	$6^+ \rightarrow 4^+$		

جدول ۲. مقدار کمیت واگرایی کولبک - لایبلر برای سه دنباله انتخابی از اطلاعات محاسبات نظری برای احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی،

در مقایسه با دو حد پواسونی  $(KLD)_{Poisson}$  و ویگنری  $(KLD)_{GOE}$ .

$(KLD)_{GOE}$	$(KLD)_{Poisson}$	دنباله گذار چهار قطبی الکتریکی
۴,۲۱۰	۱,۹۴۲	$2_g^+ \rightarrow 0_g^+$
۵,۷۹۱	۱,۳۵۲	$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$
۶,۰۴۵	۱,۰۱۴	$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$



شکل ۱. توزیع آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی داخل باند پایه هسته‌های کروی. خط آبی رنگ هیستوگرام هر دنباله، خط قرمز و سبز رنگ به ترتیب، توزیع پواسونی و ویگنری و منحنی بنفش رنگ، تابع توزیع حاصل از روش تخمین چگالی کرنلی هستند.

افزایش همبستگی با افزایش اسپین را حاصل کرد که به دلیل تشابه، در این مقاله ذکر نشده است. دلیل افزایش همبستگی داده‌ها با افزایش اسپین این است که در اسپین‌های بالاتر فعل و انفعالات کمتری نسبت به اسپین‌های پایین‌تر اتفاق می‌افتد. لذا داده‌های مربوط به اسپین‌های بالاتر از قطعیت بیشتر و پهن‌شدگی کمتری نسبت به اسپین‌های پایین‌تر، برخوردارند. دلایل ذکر شده سبب همبستگی بیشتر داده‌های مربوط به اسپین‌های بالاتر می‌شود. نتایج حاصل از این مطالعه را بر اساس چگالی بین ترازهای نیز ارزیابی کردیم. وجود همبستگی آماری مطابق با نتایج منبع [۶۲] به دلیل کاهش چگالی بین ترازهای و افزایش دافعه بین ترازهای سامانه‌های هسته‌ای ارزیابی شده است. از طرفی، این ترازها و تابع موج آنها در محاسبه احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی مؤثر هستند. می‌توان وجود همبستگی آماری بین احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی را به وجود دافعه

نتایج حاصل، انطباق بیشتر رفتار آماری هر سه دنباله با توزیع ویگنری را نشان می‌دهد. این نتیجه وجود همبستگی آماری بین این داده‌ها را نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان از دیدگاه تقارن‌های مدل برهمکنش بوزونی بررسی کرد به نحوی که، ما در محاسبات خود تمام ترازهای انتخابی را از یک نمایش تقلیل ناپذیر زنجیره تقارنی حاصل کردیم و لذا انتظار وجود همبستگی آماری، امری واضح به نظر می‌رسد. همچنین افزایش میزان همبستگی آماری داده‌ها با افزایش مقدار اسپین تراز اولیه، محسوس است. این نتیجه را می‌توان بر اساس نظریه ماتریس‌های تصادفی، مبنی بر رفتار آماری همبسته ترازهای دورانی ارزیابی کرد که نتایج ما نیز این مسئله را تأیید می‌کند. بررسی افت و خیز آماری احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی با استفاده از اطلاعات تجربی ارائه شده در جدول ۱، نتیجه مشابهی مبنی بر همبستگی آماری داده‌ها و همچنین



روش تخمین چگالی کرنلی (روش غیر پارامتری) است. به این منظور با استفاده از مدل برهمکنش بوزونی، ترازهای مختلف در باند پایه هسته‌های انتخابی را در قالب حد دینامیکی  $U(5)$  برچسب زده و مقدار چشم‌داشتی عملگر گذار بر روی این حالات را محاسبه کردیم. روش‌های پارامتری خطا دارند، لذا در این مطالعه برای بررسی آماری احتمال‌های گذار چهار قطبی الکتریکی، از روش غیر پارامتری با کرنل گوسی استفاده کردیم. تابع توزیع به دست آمده برای هر دنباله را با استفاده از معیار واگرایی کولبک - لایبلر نسبت به دو حد منظم و غیر منظم قیاس زدیم. نتایج حاصل وجود همبستگی آماری داده‌ها را نشان داده و همچنین با افزایش اسپین، رفتار آماری ویگنری در دنباله‌ها غالب می‌شود. این نتیجه را می‌توان بر اساس تقارن‌های موجود در ترازهای انتخابی تفسیر کرد. بررسی وابستگی بین ویژگی‌های آماری دنباله‌های مختلف و پارامترهایی مثل نیمه عمر ترازها، سطح مقطع انجام واکنش جذب نوترون در این ترازها مواردی هستند که مطالعات بعدی پیرامون آنها انجام خواهد شد.

#### تشکر و قدردانی

این مطالعه با پشتیبانی مالی مدیریت امور پژوهشی دانشگاه تبریز و همچنین دانشگاه ایلام انجام شده است.

بین ترازها و در نتیجه کاهش چگالی ترازهای هسته‌ای نسبت داد. افزایش همبستگی برای ترازهایی با اسپین بزرگ‌تر که دافعه بین ترازها در خصوص آنها قوی‌تر است، این نتیجه را تأیید می‌کند. با توجه به هسته‌های انتخابی این مطالعه که در مجاورت لایه‌های بسته پروتونی (و نوترونی) قرار گرفته‌اند و از طرفی نتایج اشاره شده در منبع [۶۳]، سهم اندرکنش‌های باقی‌مانده در این هسته‌های کروی حداقل بوده و البته برای ترازهایی با اسپین بزرگ‌تر، افزایش می‌یابد. با توجه به افزایش همبستگی آماری احتمال‌گذارهای چهار قطبی الکتریکی از ترازهایی با اسپین بزرگ‌تر، می‌توان این رفتار را به افزایش اندرکنش‌های باقی‌مانده نسبت داد که برای یک نتیجه‌گیری کلی، ما در مطالعات آینده این موضوع را با تأکید بر انرژی ترازهای مختلف ارزیابی خواهیم کرد. هدف از مطالعه آماری، پیش‌بینی رفتار سامانه است. وقتی داده‌ها همبستگی داشته باشند، پیش‌بینی رفتار هسته نسبت به آن داده‌ها راحت‌تر است. اگر رفتار هسته قابل پیش‌بینی باشد، می‌توانیم در بحث‌های کاربردی به صورت دقیق‌تر از آن استفاده کنیم.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مطالعه هدف ما مطالعه ویژگی‌های آماری احتمال‌گذارهای چهار قطبی الکتریکی هسته‌های کروی با استفاده از

#### مراجع

1. M Mehta, "Random Matrices 2nd ed" Academic, New York (1991).
2. C E Porter, "Statistical theories of spectra: fluctuations" Academic, New York (1965).
3. Y Alhassid, *Reviews of Modern Physics* **72** (2000) 895.
4. O Bohigas, M J Giannoni, and C Schmit, *Physical Review Letters* **52** (1984) 1.
5. T A Brody, *et al.*, *Reviews of Modern Physics* **53** (1981) 385.
6. T Guhr, A Müller Groeling, and H A Weidenmüller, *Physics Reports* **299** (1998) 189.
7. W Heiss, R Lynch, and R Nazmitdinov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **69** (1999) 563.
8. W Heiss and R Nazmitdinov, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **118** (1998) 134.
9. Y Alhassid and A Novoselsky, *Physical Review C* **45** (1992) 1677 .
10. Y Alhassid and N Whelan, *Physical Review Letters* **67** (1991) 816 .
11. Y Alhassid and D Vretnar, *Physical Review C* **46** (1992) 1334.
12. V Zelevinsky and B Brown, *Physics Reports* **276** (1996) 85.
13. A Adams, *et al.*, *Physics Letters B* **392** (1997) 1 .
14. C E Porter and R G Thomas, *Physical Review* **104** (1956) 483.
15. B Brown and G Bertsch, *Physics Letters B* **148** (1984) 5.
16. H Dias, *et al.*, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **15** (1989) L79.
17. J Verbaarschot and P Brussaard, *Physics Letters B* **87** (1979) 155 .

18. R Whitehead, *et al.*, *Physics Letters B* **76** (1978) 149 .
19. F Iachello and A Arima, “*The Interacting Boson Model*” Cambridge University Press, Cambridge (1987).
20. V Werner, *et al.*, *Physical Review C* **78** (2008) 051303.
21. P Koseoglou *et al.*, *Physical Review C* **101** (2020) 014303.
22. F Iachello, “*Neutron Capture Gamma-Ray Spectroscopy*” Springer (1979).
23. A Arima and F Iachello, *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **31** (1981) 75.
24. F Pan and J Draayer, *Nuclear Physics A* **636** (1998) 156.
25. A Al Sayed and A Abul Magd, *Physical Review C* **74** (2006) 037301 .
26. B Rashidian Maleki, H Sabri, and M A Jafarizadeh, *Journal of Research on Many-body Systems* **2** (2013) 47.
27. H Sabri, *et al.*, *Random Matrices: Theory and Applications* **3** (2014) 1450017.
28. P Möller, *et al.*, *arXiv preprint nucl-th/9308022* (1993).
29. H Sabri, *et al.*, *The European Physical Journal Plus* **129** (2014) 1.
30. A Hamoudi and A A M Al Rahmani, *Nuclear Physics A* **892** (2012) 21.
31. M J Baxter, C C Beardah, and R V Wright, *Journal of Archaeological Science* **24** (1997) 347.
32. A W Bowman and A Azzalini, *Computational statistics & data analysis* **42** (2003) 545.
33. O De Jager, B Raubenheimer, and J Swanepoel, *Astronomy and Astrophysics* **221** (1989) 180.
34. A Elgammal, *Proceedings of the IEEE* **90** (2002) 1151.
35. F P Miller, A F Vandome, and J McBrewster, “*Kernel Density Estimation*” Alphascript Publishing German (2010).
36. M Rodchuen and P Suwattee, *Chiang Mai Journal of Science* **38** (2011) 1.
37. M Rudemo, *Scandinavian Journal of Statistics* (1982) 65.
38. D W Scott, “*Multivariate density estimation: theory, practice, and visualization*” John Wiley & Sons (2015).
39. S J Sheather and M C Jones, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* **53** (1991) 683.
40. J Shi, M Luo, and C Huang, *Indian Journal of Physics* **84** (2010) 1229.
41. G R Terrell and D W Scott, *The Annals of Statistics* (1992) 1236.
42. H Aytekin and D Demirbağ, *Indian Journal of Physics* **87** (2013) 487.
43. M Jafarizadeh, *et al.*, *Indian Journal of Physics* **87** (2013) 919.
44. D Kalita and K Boruah, *Indian Journal of Physics* **87** (2013) 289.
45. S Marinai, “*Machine learning in document analysis and recognition*” Springer (2008).
46. D De Frenne, *Nuclear Data Sheets* **110** (2009) 1745.
47. J Blachot, *Nuclear Data Sheets* **108** (2007) 2035.
48. D De Frenne and A. Negret, *Nuclear Data Sheets* **109** (2008) 943.
49. J Blachot, *Nuclear Data Sheets* **91** (2000) 135.
50. G Gürdal and F Kondev, *Nuclear Data Sheets* **113** (2012) 1315.
51. S Lalkovski and F Kondev, *Nuclear Data Sheets* **124** (2015) 157.
52. J Blachot, *Nuclear Data Sheets* **113** (2012) 515.
53. J Blachot, *Nuclear Data Sheets* **111** (2010) 717.
54. K Kitao, *Nuclear Data Sheets* **75** (1995) 99.
55. K Kitao, Y Tendow, and A Hashizume, *Nuclear Data Sheets* **96** (2002) 241.
56. T Tamura, *Nuclear Data Sheets* **108** (2007) 455.
57. J Katakura and Z Wu, *Nuclear Data Sheets* **109** (2008) 1655.
58. J Katakura and K Kitao, *Nuclear Data Sheets* **97** (2002) 765.
59. B Rashidian Maleki, H Sabri, and M Ali Jafarizadeh, *Journal of Research on Many-body Systems* **2** (2013) 47.
60. J Majarshin, *et al.*, *Annals of Physics* **407** (2019) 250.
61. H Sabri and R Malekzadeh, *Nuclear Physics A* **963** (2017) 78.
62. V Zelevinsky and M Horoi, *Progress in Particle and Nuclear Physics* **105** (2019) 180.
63. A Kamchatnov and V Nosov, *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* **63** (1972) 1961.