مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران
مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۸، شمارهٔ ۲، تابستان ۱۳۹۷

تبادل تابش گرمایی بین دو تیغهٔ مغناطودی‌الکتریک متا ماده با ضخامت متناهی در شرایط غیرتعادلی

سحر بیاتی[1]، احسان عموقربان [1و2] و علی مهدی‌فر[1و2و3]

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
۲. گروه پژوهشی فوتونیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
۳. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان

(دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۱۱/۲۱ ؛ دریافت نسخهٔ نهایی: ۱۳۹۶/۱۱/۱۱)

چکیده

در این مقاله سامانه‌ای متشکل از دو تیغهٔ مغناطودی‌الکتریک تخت با دماهای متفاوت را در نظر می‌گیریم که در خلأ با دمای صفر مطلق و فاصلهٔ جدایی ناچیز از یکدیگر قرار گرفته‌اند. بر اساس رهیافت کوانتش کانونی میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط‌های جاذب، تبادل تابش گرمایی ناشی از افت و خیزهای کوانتومی و گرمایی را در این سامانهٔ غیرتعادلی ولی ایستا بررسی می‌کنیم. بدین منظور، با استخراج روابط همبستگی کوانتومی بین عملگرهای نوفهٔ قطبش و مغناطش و به دست آوردن تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه به محاسبهٔ میانگین آنسامبلی بردار پوئینتینگ می‌پردازیم. در نهایت با استفاده از نتایج عددی بردار پوئینتینگ به تجزیه و تحلیل تابش مبادله شده در سامانهٔ مزبور می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: کوانتش کانونی میدان الکترومغناطیس، تابش گرمایی، تانسور گرین الکترومغناطیسی، امواج منتشر شونده و ناپایا، پولاریتون سطحی

۱. مقدمه

افت و خیزهای کوانتومی و گرمایی منشأ بروز بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از قبیل اثر کازیمیر، نیروهای کازیمیر– پولدر و تغییرات شدید آهنگ واپاشی اتم‌ها در فواصل نزدیک به اجسام مادی هستند. این پدیده‌ها صرفاً در یک چارچوب کاملاً کوانتومی قابل توصیف و به اثرات میدان نزدیک معروف هستند. در این میان، تبادل تابش گرمایی بین ساختارهایی که در فواصل جدایی بسیار ناچیزی از یکدیگر قرار گرفته و در تماس فیزیکی با یکدیگر نیستند، به خاطر کاربردهای گسترده‌ای که اخیراً در حوزهٔ نانو تکنولوژی و فیزیک پیدا کرده‌اند، بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است [۱]. در حقیقت انرژی گرمایی مبادله شده بین اجسامی که در فواصل جدایی بزرگ از یکدیگر هستند از قانون استفان- بولتزمن تبعیت می‌کند. اما این قانون در فواصل بسیار کوچک‌تر از

طول موج گرمایی به دلیل تونل‌زنی فوتون‌ها دیگر معتبر نیست. زیرا در مقیاس‌های بزرگ تنها امواج پیش‌رونده در تبادل انرژی نقش دارند، اما در فواصل جدایی کم امواج ناپایا نقش بسیار بارزتری ایفا می‌کنند. به عبارت دیگر با برانگیختـه شدن پولاریتون فونون‌های سطحی و پولاریتون پلاسمون‌های سطحی در مجاورت بسیار نزدیک بـه سطح اجسام قطبی و فلزات و برهم‌کنش این مدها با یکدیگر، انرژی تبادلی بین این محیط‌های مادی به شدت افزایش می‌یابد.

در دهۀ ۱۹۶۰ نخستین مشاهدۀ تجربی از تابش غیرعادی بین اجسام در فواصل میکرومتری گزارش شد[۲]. با وجود تلاش‌های اولیه که در راستای فرمول‌بندی این پدیده انجام شد، سرانجام پولدر و وان هوو در سال ۱۹۷۱ بر اساس نظریۀ الکترودینامیک افت‌وخیزی رایتوف، که بر پایۀ فرض تعادل موضعی و کاربرد مستقیم قضیه افت و خیز- اتلاف استوار بود، رهیافت کلی برای توصیف این پدیده بین اجسام ماکروسکوپی را معرفی کردند [۳].در دو دهۀ اخیر با توجه به پیشرفت‌های چشمگیری که در حوزۀ تکنولوژی رخ داده، شدت مطالعات در این حوزه به‌ویژه در بررسی ساختارهای تخت نیمه نامتناهی به دلیل سادگی محاسبات نظری و همچنین فرایند سادۀ ساخت نمونه‌های تجربی آنها افزایش یافته است [۴-۹]. از جمله مطالعات دیگر در این حوزه که با هدف مدل‌سازی میکروسکوپ‌های (STM) انجام گرفته است می‌توان به نمونه‌هایی اشاره کرد که در آنها انرژی گرمایی انتقالی بین دو نانوذرۀ کروی شکل [۱۰]، دو جسم کروی شکل ماکروسکوپی با شعاع‌های متفاوت و مراکز غیرمنطبق بر یکدیگر [۱۱-۱۲] و یک جسم کروی شکل و یا بیضی‌گون با یک صفحۀ تخت [۱۳-۱۴]، بررسی شده است. برخی از ساختارهای مزبور نیز با به کار بردن رهیافت ماتریس پراکندگی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۱۵-۱۶].

اکنون سوالی که در اینجا مطرح است، صحت فرض ایده‌ال به‌کاربرده شده در بررسی ساختارهای تخت است که در آنها عملاً ضخامت تیغه‌ها نیمه نامتناهی در نظر گرفته شده‌اند. اگر چه چنین فرضی برای برداشتن گام‌های ابتدایی و ساده‌سازی مسائل پیچیده‌تر امری ضروری و پراهمیت است ولی در نمونه‌های واقعی نظیر سلول‌های ترموفوتوولتایی و خنک کننده‌های تابشی [۱۷-۱۸] عملاً ناکارآمد است. علاوه بر این، امکان حضور مدهای تقارنی و پادتقارنی در اثر برهم‌کنش مدهای سطحی دو طرف یک فیلم نازک نیز وجود دارد که ممکن است به شدت در تابش گرمایی مبادله شده تأثیر گذار باشد. اخیراً اثر فیلم‌های دی‌الکتریک نازک نشانده شده روی یک بسترۀ نیمه نامتناهی بر تابش گرمایی گسیلی از آن [۱۹] و همچنین تبادل انرژی گرمایی بین دو فیلم دی‌الکتریک نازک بررسی شده است [۲۰]. با وجود تلاش‌های اندک در این حوزه، تمامی این بررسی‌ها فقط روی محیط‌های دی‌الکتریک متمرکز شده‌اند. البته اخیراً سامانه‌ای با ساختار دو تیغۀ مغناطودی‌الکتریک نیمه نامتناهی نیز مطالعه شده است [۲۱]. البته تاکنون ساختارهایی متشکل از تیغه‌های مغناطودی‌الکتریک با ضخامت متناهی بررسی نشده‌اند؛ زیرا بسیاری از مواد در برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی نه تنها ویژگی‌های الکتریکی، بلکه ویژگی‌های مغناطیسی نیز از خود بروز می‌دهند. به عنوان نمونه می‌توان به متامواد، به خاطر ویژگی‌های اپتیکی منحصر به‌فردشان، اشاره کرد. در یک متا ماده اگر گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی در ناحیۀ بسامدی معینی به طور هم‌زمان منفی باشند، بردار میدان الکتریکی، بردار میدان مغناطیسی و بردار موج تابش الکترومغناطیسی یک دستگاه چپگرد را تشکیل داده و ضریب شکست منفی می‌شود. از طرف دیگر، با توجه به اهمیت متامواد در حوزۀ نانو تکنولوژی و کاربردهای آنها در پیشرفت‌های کنونی، پژوهش‌های اندکی در حوزۀ اپتیک کوانتومی متامواد انجام شده است [۲۲]. از این‌رو، با بررسی تابش گرمایی انتقالی بین این اجسام می‌توان گام دیگری در جهت فهم فیزیکی بهتر این ساختارها در حوزۀ کوانتومی برداشت.

در این مقاله انرژی تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغۀ مغناطودی الکتریک با فاصلۀ جدایی بسیار کوچک‌تر از طول موج گرمایی را مطالعه خواهیم کرد. تمام بررسی‌هایی که

تاکنون صورت گرفته است براساس نظریهٔ الکترودینامیک افت و خیزی فرمول‌بندی شده‌اند. در حالی که روشی که ما برای مطالعهٔ این پدیده اتخاذ می‌کنیم یک روش میکروسکوپی دقیق و کاملاً کوانتومی است. بدین منظور، در گام نخست با استفاده از کوانتش کانونی میدان الکترومغناطیسی در حضور مواد جاذب، پاشنده، ناهمگن و ناهمسانگرد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را بر حسب تانسور گرین سامانه به دست می‌آوریم. در این روش خواهیم دید که بدون نیاز به قضیهٔ افت و خیز- اتلاف، همبستگی‌های کوانتومی بین عملگرهای نوفهٔ قطبش و مغناطش ماده و به دنبال آن بین مؤلفه‌های میدان به صورت مستقیم به دست می‌آیند. سپس با کمک این توابع همبستگی به محاسبهٔ میانگین آنسامبلی بردار پوینتینگ می‌پردازیم و یک عبارت تحلیلی برای تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغه مغناطو دی الکتریک با ضخامت‌های متناهی به دست می‌آوریم. در نهایت، با انجام محاسبات عددی نشان داده می‌شود که به دلیل تونل زنی فوتون‌ها و جفت‌شدگی تشدیدی مدهای سطحی پولاریتونی، تابش گرمایی تبادلی در سامانه مزبور به صورت چشم‌گیری افزایش خواهد یافت.

۲. روابط پایه

محیط مغناطودی‌الکتریک جاذب، پاشنده، ناهمگن و ناهمسانگردی را در نظر می‌گیریم که پارامترهای مادی آن توسط تانسورهای گذردهی الکتریکی $\bar{\bar{\varepsilon}}(\mathrm{r},\omega)$ و تراوایی مغناطیسی $\bar{\bar{\mu}}(\mathrm{r},\omega)$ توصیف می‌شوند. در این مقاله برای توصیف کمیت‌های تانسوری از نماد بالا نویس = استفاده شده است. با به کار بردن رهیافت کانونی در کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط‌های مغناطودی‌الکتریک جاذب که جزییات آن در پیوست ۱ آمده است، می‌توان نشان داد که میدان الکتریکی سامانه را می‌توان به صورت حاصل جمع دو بخش به صورت $\hat{\mathrm{E}}(\mathrm{r},\omega)=\hat{\mathrm{E}}_e(\mathrm{r},\omega)+\hat{\mathrm{E}}_m(\mathrm{r},\omega)$ نوشت. بخش اول که از سهم چگالی جریان نوفهٔ الکتریکی $\hat{\mathrm{j}}_e^N=-\iota\omega\hat{\mathrm{P}}^N(\mathrm{r},\omega)$ ناشی می‌شود به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{\mathrm{E}}_e(\mathrm{r},\omega)=\iota\mu_\circ\omega\int d\mathrm{r}'\,\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\cdot\hat{\mathrm{j}}_e^N(\mathrm{r}',\omega), \qquad (۱)$$

و بخش دوم که در نتیجهٔ افت وخیزهای چگالی جریان نوفهٔ مغناطیسی $\hat{\mathrm{j}}_m^N(\mathrm{r},\omega)=-\iota\omega\hat{\mathrm{M}}^N(\mathrm{r},\omega)$ هستند برابر

$$\hat{\mathrm{E}}_m(\mathrm{r},\omega)=\mu_\circ\int d\mathrm{r}'\,\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Em}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\cdot\hat{\mathrm{j}}_m^N(\mathrm{r}',\omega), \qquad (۲)$$

است. در اینجا $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}$ تانسور گرین الکتریکی- الکتریکی سامانه است که در معادلهٔ هلمهولتز $\vec{\nabla}\times\left(\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\mathrm{r},\omega)\cdot\vec{\nabla}\times\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\bar{\bar{\varepsilon}}(\mathrm{r},\omega)\cdot\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\mathrm{I}\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')$ صدق می‌کند که در آن I تانسور همانی است. به‌علاوه، تانسور گرین الکتریکی- مغناطیسی $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Em}$ بر حسب تانسور گرین الکتریکی- الکتریکی $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}$ به صورت $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\times\bar{\nabla}_{r'}$ تعریف می‌شود و اثر کرل از سمت راست نیز بر حسب نماد لوی- چی ویتا ε_{jmn} به صورت $\left(\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\times\bar{\nabla}_{r'}\right)_{ij}=\varepsilon_{jmn}\partial'_n\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee,im}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)$ تعریف می‌شود. به سادگی می‌توان نشان داد که تانسور گرین الکتریکی- الکتریکی سامانه در رابطهٔ متقابل $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}^T(\mathrm{r}',\mathrm{r},\omega)$ صدق می‌کند که در آن نماد T بیانگر ترانهادهٔ یک تانسور است. همچنین رابطهٔ $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}^*(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',-\omega)$ برای این تانسور برقرار است.

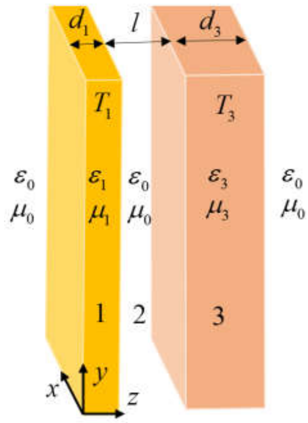
اکنون با استفاده از معادلهٔ ماکسول $\nabla\times\hat{\mathrm{E}}(\mathrm{r},\omega)=\iota\omega\bar{\bar{\mu}}\cdot\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{r},\omega)$ و مشابه تفکیک انجام شده برای میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی را نیز به صورت حاصل‌جمع دو بخش

$$\hat{\mathrm{H}}_e(\mathrm{r},\omega)=\int d\mathrm{r}'\,\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{He}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\,\hat{\mathrm{j}}_e{}^N(\mathrm{r}',\omega), \qquad (۳)$$

و

$$\hat{\mathrm{H}}_m(\mathrm{r},\omega)=\int d\mathrm{r}'\,\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Hm}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\,\hat{\mathrm{j}}_m{}^N(\mathrm{r}',\omega), \qquad (۴)$$

می‌نویسیم که در آن تانسورهای گرین مغناطیسی- الکتریکی و مغناطیسی- مغناطیسی $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{He}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)$ و $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Hm}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)$ به ترتیب بر حسب تانسور گرین الکتریکی- الکتریکی $\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}$ به صورت $\vec{\nabla}\times\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)/\iota\omega\mu(\mathrm{r},\omega)$ و $\vec{\nabla}_r\times[\bar{\bar{\mathrm{G}}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\times\bar{\nabla}_{r'}]/\iota\omega\mu(\mathrm{r},\omega)$ تعریف می‌شوند.



شکل ۱. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمایی کلی از سامانهٔ متشکل از دو تیغهٔ مغناطودی‌الکتریک با ضخامت‌های d_1 و d_3 و دماهای متفاوت T_1 و T_3 در فاصلهٔ جدایی ℓ از یکدیگر قرار گرفته‌اند.

به طور معمول، برای محاسبهٔ شار تابش گرمایی مبادله شده بین ساختارهای مادی، از بردار پوینتینگ استفاده می‌شود. مؤلفه‌های این کمیت بر حسب مؤلفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی به صورت

$$\langle S(\mathrm{r},\omega)\rangle_i = \varepsilon_{ipq}\left\langle E_p(\mathrm{r},t)\,H_q^*(\mathrm{r},t)\right\rangle, \tag{۵}$$

تعریف می‌شود. با توجه به وابستگی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه، نخست لازم است که تانسور گرین سامانه تعیین شود که تانسور مزبور نیز به هندسه و پارامترهای مادی سامانه وابستگی دارد. از این‌رو در بخش بعدی به محاسبهٔ تانسور گرین الکترومغناطیسی برای یک ساختار چندلایه ای تخت می‌پردازیم.

۳. دینامیک شار گرمایی مبادله شده

تاکنون مطالعات نظری بسیاری جهت محاسبهٔ چگالی مدهای موضعی و چگالی انرژی طیفی تابش‌های گرمایی در مجاورت ساختارهای حجیم، محیط‌های دی‌الکتریک تخت و کروی پوشش داده شده با لایه‌های نازک و همچنین تابش گرمایی مبادله شده بین آنها انجام شده است. اخیراً نیز انتقال تابش گرمایی بین دو محیط مغناطودی‌الکتریک تخت نیمه نامتناهی بررسی شده است [۲۱]. لازم به ذکر است که با توجه به سازوکار انتقال انرژی پولاریتون گونه‌ای که در هر دو قطبش s و p برای مواد مغناطودی‌الکتریک وجود دارد، سهم ناشی از میدان نزدیک در تابش گرمایی به شدت افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، به دلیل برهم‌کنش مدهای پولاریتونی سطحی در دو طرف سطح بیرونی یک لایه نازک، سهم میدان نزدیک در مجاورت این لایهٔ نازک، نسبت به محیط‌های مادی حجیم رفتار متفاوتی از خود نشان داده و موجب افزایش چشمگیر تابش گرمایی مبادله شده می‌شود. بنابراین در ادامه، بر یک ساختار مغناطودی‌الکتریک چند لایه‌ای نازک تخت متمرکز شده و در نهایت نتایج به دست آمده را در حالت حدی یک مادهٔ حجیم و یا یک چند لایه‌ای دی‌الکتریک با نتایج به دست آمده در مراجع دیگر مقایسه خواهیم کرد.

۳. ۱. تانسور گرین

در این بخش دو تیغهٔ مغناطودی‌الکتریک تخت با ضخامت‌های d_1 و d_3 و پارامترهای مادی متفاوت ε_1، μ_1 و ε_3، μ_3 در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دو تیغه در وضعیت ایستا ولی غیرتعادلی با دماهای T_1 و T_3 در فاصلهٔ جدایی $d_2 = \ell$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۱). بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود، برای سادگی محاسبات بعدی محیط پیرامون دو تیغه را خلأ با دمای صفر مطلق انتخاب کرده و راستای عمود بر فصل مشترک لایه‌ها را محور zها در نظر می‌گیریم. برای محاسبهٔ تانسور گرین سامانهٔ مزبور، روش

برهم‌نهی پراکندگی را به کار می‌بریم. بر اساس این روش تانسور گرین الکترومغناطیسی به دو بخش زیر تفکیک می‌شود:

$$\overline{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{0}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)+\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{s}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega), \tag{6}$$

که در آن بردار مکان r' نشان دهندهٔ موضع چشمه و بردار مکان $\mathbf{r}$ بیانگر مختصات میدان است. در اینجا تانسور $\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{0}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)$ جواب ناهمگن معادلهٔ هلمهولتز بوده و بیانگر سهم مستقیم موج الکترومغناطیسی منتشر شونده از چشمه‌ای است که در یک محیط بی‌کران قرار دارد که پارامترهای مادی آن لایه‌ای است که همان بردار r' در آن قرار دارد. در حالی‌که تانسور پراکندگی $\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{s}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)$ نیز متناظر با پاسخ همگن معادلهٔ هلمهولتز بوده و سهم اضافی ناشی شده از عبور و بازتاب‌های چندگانه موج الکترومغناطیسی از مرز لایه‌های مختلف را توصیف می‌کند.

به منظور محاسبهٔ تانسور گرین (۶) و به دنبال آن تابش گرمایی انتقالی بین دو تیغه لازم است تا نخست موضع نقاط چشمه و میدان مشخص شوند. بر اساس این انتخاب، رهیافت‌های موجود در بررسی این مسئله را می‌توان به دو دستهٔ روش مستقیم و غیر مستقیم طبقه‌بندی کرد. در رهیافت مستقیم، نخست نقاط چشمه و میدان به ترتیب در تیغه‌های ۱ و ۳ در نظر گرفته شده و سپس تابش گرمایی ناشی از افت‌وخیز چشمه‌های درون تیغه ۱ در مکان تیغه ۳ محاسبه می‌شوند. در ادامه تابش گرمایی ناشی از تیغهٔ ۳ در تیغهٔ ۱ محاسبه شده و در نهایت از تفاضل این دو عبارت، شار گرمایی تبادلی به دست می‌آید. در رهیافت غیر مستقیم نقاط چشمه و میدان در محیط خلأ بین دو تیغه در نظر گرفته شده و سپس شار عبوری بر اساس ضرایب بازتاب تعمیم یافته محاسبه می‌شود.

با توجه به سادگی رهیافت مستقیم در ساختارهای با هندسه تخت، در ادامه رهیافت مزبور را برمی‌گزینیم و موضع نقاط چشمه و میدان را به ترتیب درون تیغهٔ ۱ و ۳ در نظر می‌گیریم. با تعمیم تانسور گرین ارائه شده در مرجع [۲۳] به چند لایه‌ای‌های مغناطودی‌الکتریک، تانسور گرین سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\mathrm{G}}}{}^{31}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\frac{\iota}{8\pi^{2}}\int d^{2}\mathrm{k}_{\parallel}\, e^{\iota \mathrm{k}_{\parallel}.(\mathrm{R}-\mathrm{R}_{0})}\mu_{3}\,\Xi^{31}_{s}[\hat{s}^{3}_{+}\hat{s}^{1}\\
+e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\,e^{-\iota\beta_{1}z'}+r^{s}_{10}\,\hat{s}^{3}_{+}\,\hat{s}^{1}_{-}\\
e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\,e^{\iota\beta_{1}z'}+r^{s}_{34}\hat{s}^{3}_{-}\,\hat{s}^{1}_{+}\;e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\\
e^{-\iota\beta_{1}z'}+r^{s}_{10}\,r^{s}_{34}\hat{s}^{3}_{-}\,\hat{s}^{1}_{-}-e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\,e^{\iota\beta_{1}z'}]\\
+\Xi^{31}_{p}[\hat{p}^{3}_{+}\,\hat{p}^{1}_{+}\;e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\,e^{-\iota\beta_{1}z'}+r^{p}_{10}\,\hat{p}^{3}_{+}\,\hat{p}^{1}\\
-e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\,e^{\iota\beta_{1}z'}+r^{p}_{34}\,\hat{p}^{3}_{-}\,\hat{p}^{1}+e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\\
e^{-\iota\beta_{1}z'}+r^{p}_{10}\,r^{p}_{34}\,\hat{p}^{3}_{-}\,\hat{p}^{1}_{-}\;e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}\,e^{\iota\beta_{1}z'}]\},\end{aligned} \tag{7}$$

که در آن $k_j=n_j\dfrac{\omega}{c}$، $k_0=\dfrac{\omega}{c}$، و مؤلفه طولی بردار موج β_j در لایه j ام به صورت $\beta_j=\sqrt{k_0^{2}n_j^{2}-k_{\parallel}^{2}}$ تعریف می‌شود. در اینجا ضریب شکست لایه j ام برابر $n_j^{2}=\varepsilon_j(\omega)\mu_j(\omega)$ بوده و $\hat{s}^{j}_{\pm}=\hat{k}_{\parallel}\times\hat{z}$ و $\hat{p}^{j}_{\pm}=(k_{\parallel}\hat{z}\mp\beta_j\hat{k})/k_j$ بردارهای یکهٔ متناظر با قطبش‌های s و p هستند. پارامتر Ξ^{31}_{λ} نیز به ازای قطبش‌های $\lambda=s,p$ که تغییرات دامنهٔ موج الکترومغناطیسی TE و TM را در اثر بازتاب از لایه‌ها نشان می‌دهند به صورت

$$\frac{t^{\lambda}_{31}\;e^{\iota\beta_{1}d_{1}}\;e^{\iota\beta_{3}d_{3}}}{D_{\lambda 1}D_{\lambda 3/1}}, \tag{8}$$

تعریف می‌شوند. در اینجا $D_{\lambda 1}=1-r^{\lambda}_{10}r^{\lambda}_{14}\,e^{2\iota\beta_{1}d_{1}}$، $D_{\lambda 3/1}=1-r^{\lambda}_{3/4}\,r^{\lambda}_{3/2/1}\,e^{2\iota\beta_{3}d_{3}}$ و $r^{\lambda}_{i/j/k}=D^{-1}_{\lambda j}(r^{\lambda}_{ij}+r^{\lambda}_{j/k}e^{2i\beta_j d_j})$ است. به‌علاوه r^{λ}_{ij} و t^{λ}_{ij} ضرایب عبور و بازتاب از لایه‌های i و j هستند که جزییات روابطشان در پیوست ۳ آمده است. اکنون با در دست داشتن تانسور گرین الکترومغناطیسی (۷) و استفاده از روابطی که در بخش قبلی ارائه شد به سادگی می‌توان نشان داد که تانسور گرین $\overline{\overline{\mathrm{G}}}{}^{31}_{He}$ نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\mathrm{G}}}{}^{31}_{He}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\frac{1}{8\pi^{2}}\int d^{2}\mathrm{k}_{\parallel}\, e^{\iota \mathrm{k}_{\parallel}.(\mathrm{R}-\mathrm{R}_{0})}k_{3}\{\Xi^{31}_{s}[\hat{p}^{3}_{+}\,\hat{s}^{1}_{+}\\
e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{-\iota\beta_{1}z'}+\hat{p}^{3}_{+}\hat{s}^{1}_{-}e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{\iota\beta_{1}z'}r^{s}_{10}\\
+\hat{p}^{3}_{-}\,\hat{s}^{1}_{+}\,e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{-\iota\beta_{1}z'}r^{s}_{34}+\hat{p}^{3}_{-}\,\hat{s}^{1}_{-}\\
e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{\iota\beta_{1}z'}r^{s}_{10}r^{s}_{34}]+\Xi^{31}_{p}[\hat{s}^{3}_{+}\,\hat{p}^{1}_{+}\\
e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{-\iota\beta_{1}z'}+\hat{s}^{3}_{+}\hat{p}^{1}_{-}e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{\iota\beta_{1}z'}\\
r^{p}_{10}+\hat{s}^{3}_{-}\,\hat{p}^{1}_{+}\,e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{-\iota\beta_{1}z'}r^{p}_{34}+\hat{s}^{3}_{-}\,\hat{p}^{1}_{-}\\
e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}e^{\iota\beta_{1}z'}r^{p}_{10}r^{p}_{34}]\}.\end{aligned} \tag{9}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که تانسورهای گرین الکتریکی– مغناطیسی و مغناطیسی– الکتریکی، $\overline{\overline{\mathrm{G}}}{}^{31}_{Em}$ و $\overline{\overline{\mathrm{G}}}{}^{31}_{Hm}$، که به ترتیب بیانگر سهم میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی درون تیغهٔ

۳ ناشی از جریان نوفه‌های مغناطیسی درون تیغهٔ ۱ هستند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathrm{G}}}^{31}_{Em}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=&\frac{1}{8\pi^2}\int d^2\mathrm{k}_{\parallel}\, e^{\iota \mathrm{k}_{\parallel}.(\mathrm{R}-\mathrm{R}_0)}\mu_3 k_1\{\Xi^{31}_s\\&[\hat{s}^3_+\,\hat{p}^1_-\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}+\hat{s}^3_+\hat{p}^1_+\\&e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^s_{10}+\hat{s}^3_-\,\hat{p}^1_-\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}\\&e^{-\iota\beta_1 z'}r^s_{34}+\hat{s}^3_-\,\hat{p}^1_+\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^s_{10}r^s_{34}]\\&+\Xi^{31}_p[\hat{p}^3_+\,\hat{s}^1_-\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}+\hat{p}^3_+\hat{s}^1_+\\&e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^p_{10}+\hat{p}^3_-\,\hat{s}^1_-\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}\\&e^{-\iota\beta_1 z'}r^p_{34}+\hat{p}^3_-\,\hat{s}^1_+\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^p_{10}r^p_{34}]\},\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathrm{G}}}^{31}_{Hm}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=&-\frac{1}{8\pi^2}\int d^2\mathrm{k}_{\parallel}\, e^{\iota \mathrm{k}_{\parallel}.(\mathrm{R}-\mathrm{R}_0)}\\&k_1k_3\{\Xi^{31}_s[\hat{p}^3_+\,\hat{p}^1_-\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}\\&+\hat{p}^3_+\hat{p}^1_+e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^s_{10}+\hat{p}^3_-\,\hat{p}^1_-\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}\\&e^{-\iota\beta_1 z'}r^s_{34}+\hat{p}^3_-\,\hat{p}^1_+\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^s_{10}r^s_{34}]\\&+\Xi^{31}_p[\hat{s}^3_+\,\hat{s}^1_-\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}\\&+\hat{s}^3_+\hat{s}^1_+e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^p_{10}+\hat{s}^3_-\,\hat{s}^1_-\\&e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}r^p_{34}+\hat{s}^3_-\,\hat{s}^1_+\\&e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}r^p_{10}r^p_{34}]\}.\end{aligned}\tag{11}$$

اکنون با به کار بردن رابطه‌های (۷)- (۱۱)، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و سپس بردار پوئینتینگ به سادگی به دست می‌آیند. از این‌رو در بخش بعدی به محاسبهٔ بردار پوئینتینگ در سامانه مزبور می‌پردازیم.

۳. ۲. بردار پوییتنینگ

همان طور که در بخش‌های قبلی گفته شد بردار پوئینتینگ یک کمیت دینامیکی مناسب برای محاسبه گرمای تابشی انتقالی در سامانه‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی است. در سامانهٔ مورد بررسی در این مقاله با توجه به هندسهٔ تخت لایه‌ها و نکات گفته شده در بخش قبلی، شار گرمایی تابشی مبادله شده بین دو تیغه مغناطودی‌الکتریک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\varphi_{13}=\varphi_{1\to3}-\varphi_{3\to1}=&\left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle\\&-\left\langle S_z((\mathrm{r}_3+d_3)^-,\omega)\right\rangle-\left\langle S_z(\mathrm{r}_1^-,\omega)\right\rangle\\&+\left\langle S_z((\mathrm{r}_1-d_1)^+,\omega)\right\rangle.\end{aligned}\tag{12}$$

در اینجا براکت‌ها اشاره به میانگین‌گیری آنسامبلی دارند و $\varphi_{1\to3}$ و $\varphi_{3\to1}$ به ترتیب بیانگر انرژی گرمایی انتقالی از محیط ۱ به محیط ۳ و برعکس هستند. در ادامه به دلیل تقارن سامانه فقط کمیت $\varphi_{1\to3}$ را محاسبه می‌کنیم؛ انرژی منتقل شده $\varphi_{3\to1}$ با اعمال تغییر $d_1\leftrightarrow d_3$ و ۱↔۳ و $T_1\leftrightarrow T_3$ در رابطهٔ نهایی $\varphi_{1\to3}$ به دست خواهد آمد. علاوه بر این، $S_z(\mathrm{r},\omega)$ مؤلفهٔ z ام بردار پوئینتینگ در فضای بسامد است و مطابق رابطهٔ (۵) برای بسامدهای مثبت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\left\langle S_z(\mathrm{r},\omega)\right\rangle=&2\,\mathrm{Re}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}e^{\iota(\omega-\omega')t}\\&\left\langle E_x(\mathrm{r},\omega)H^*_y(\mathrm{r},\omega')-E_y(\mathrm{r},\omega)H^*_x(\mathrm{r},\omega')\right\rangle.\end{aligned}\tag{13}$$

با جایگذاری رابطه‌های (۳)- (۶) در رابطهٔ بالا، بردار پوییتنینگ در فضای بسامد به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\left\langle S_z(\mathrm{r},\omega)\right\rangle=2\,\mathrm{Re}\int\frac{d\omega}{(2\pi)^2}\{\left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle_e+\left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle_m\},\tag{14}$$

که در آن بخش الکتریکی و مغناطیسی بردار پوئینتینگ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}\left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle_e&=\left\langle[E_{e,x}H^*_{e,y}-E_{e,y}H^*_{e,x}]\right\rangle,\\\left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle_m&=\left\langle[E_{m,x}H^*_{m,y}-E_{m,y}H^*_{m,x}]\right\rangle.\end{aligned}\tag{15}$$

اکنون برای محاسبهٔ توابع همبستگی بین مؤلفه‌های میدان از توابع هم بستگی بین مؤلفه‌های جریان‌های نوفه استفاده می‌کنیم که جزئیات استخراج آنها در پیوست ۱ آمده است.

در نهایت با انجام محاسبات بسیار طولانی بخش الکتریکی بردار پوئینتینگ به صورت زیر به دست می‌آید (به پیوست ۳ رجوع شود):

$$\begin{aligned}\left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle_e=&\frac{\Theta(\omega,T_1)}{8\pi^3}\\&\mathrm{Re}\left[\frac{\omega^2}{c^2}\mu_3\,\mathrm{Im}[\varepsilon_1]\int d^2\mathrm{k}_{\parallel}\int_0^{d_1}dz'\,\mathrm{I}_e(z,z')\right].\end{aligned}\tag{16}$$

با گرفتن انتگرال $\mathrm{I}_e(z,z')$ روی بازهٔ فضایی $(0,d_1)$ که در آن چشمه نوفه‌های الکتریکی در تیغهٔ اول حضور دارند، داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^{d_1}dz'\,\mathrm{I}_e(z,z')=&[v_e(z)\{\frac{1}{2\beta''_1}[(e^{2\beta''_1 d_1}-1)\\&-|r^s_{10}|^2(e^{-2\beta''_1 d_1}-1)]+\frac{1}{\beta'_1}\mathrm{Im}[r^s_{10}(e^{2\iota\beta'_1 d_1}-1)]\}\\&+u_e(z)\{\frac{(k^2_{\parallel}+|\beta_1|^2)}{2\beta''_1}[(e^{2\beta''_1 d_1}-1)\\&-|r^p_{10}|^2(e^{-2\beta''_1 d_1}-1)]+\frac{(k^2_{\parallel}-|\beta_1|^2)}{\beta'_1}\\&\mathrm{Im}[r^p_{10}(e^{2\iota\beta'_1 d_1}-1)]\}].\end{aligned}\tag{17}$$

در اینجا β_j' و β_j'' به ترتیب بیانگر قسمت حقیقی و موهومی مؤلفهٔ طولی بردار انتشار در لایهٔ j ام هستند و توابع $u_e(z)$ و $v_e(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_e(z) &= \left|\Xi_p^{31}\right|^2 \frac{\beta_3}{|k_3k_1|^2}(\beta_3^{2*}+k_\parallel^2)(e^{-2\beta_3''(z-d_3)} \\ &\quad -|r_{10}^p|^2 e^{2\beta_3''(z-d_3)} - r_{34}^p e^{-2\iota\beta_3'(z-d_3)} \\ &\quad + r_{34}^{p*} e^{2\iota\beta_3'(z-d_3)}), \\ v_e(z) &= \left|\Xi_s^{31}\right|^2 \beta_3^*(e^{-2\beta_3''(z-d_3)} - |r_{34}^s|^2 e^{2\beta_3''(z-d_3)} \\ &\quad + r_{34}^s e^{-2\iota\beta_3'(z-d_3)} - r_{34}^{s*} e^{2\iota\beta_3'(z-d_3)}). \end{aligned} \tag{18}$$

به طور مشابه، بخش مغناطیسی بردار پوییتینگ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \left\langle S_z(\mathrm{r}_3^+,\omega)\right\rangle_m &= \frac{\Theta(\omega,T_1)}{8\pi^3}\mathrm{Re} \\ &\quad \left[\mu_3 \,\mathrm{Im}[\mu_1^{-1}]\int d^2\mathrm{k}_\parallel \int_0^{d_1} dz'\, \mathrm{I}_m(z,z')\right], \end{aligned} \tag{19}$$

که در آن انتگرال فضایی $\mathrm{I}_m(z,z')$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^{d_1} dz'\,\mathrm{I}_m(z,z') &= [v_m(z)\{\frac{(|\beta_1|^2+k_\parallel^2)}{2\beta_1''}[(e^{2\beta_1''d_1}-1) \\ &\quad -|r_{10}^s|^2(e^{-2\beta_1''d_1}-1)] + \frac{(k_\parallel^2-|\beta_1|^2)}{\beta_1'} \\ &\quad \mathrm{Im}[r_{10}^s(e^{2\iota\beta_1'd_1}-1)]\} \\ &\quad + u_m(z)\{\frac{1}{2\beta_1''}[(e^{2\beta_1''d_1}-1) \\ &\quad -|r_{10}^p|^2(e^{-2\beta_1''d_1}-1)] + \frac{1}{\beta_1'}\mathrm{Im}[r_{10}^p(e^{2\iota\beta_1'd_1}-1)]\}], \end{aligned} \tag{20}$$

که در آن توابع $u_m(z)$ و $v_m(z)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_m(z) &= \left|\Xi_p^{31}\right|^2 \frac{|n_3|^2}{|n_1|^2}\beta_3(\beta_3^{*2}+k_\parallel^2)(e^{-2\beta_3''(z-d_3)} \\ &\quad -|r_{10}^p|^2 e^{2\beta_3''(z-d_3)} + r_{34}^p e^{-2\iota\beta_3'(z-d_3)} \\ &\quad - r_{34}^{p*} e^{2\iota\beta_3'(z-d_3)}), \\ v_m(z) &= \left|\Xi_s^{31}\right|^2 \beta_3^*(e^{-2\beta_3''(z-d_3)} \\ &\quad -|r_{34}^s|^2 e^{2\beta_3''(z-d_3)} - r_{34}^s e^{-2\iota\beta_3'(z-d_3)} \\ &\quad + r_{34}^{s*} e^{2\iota\beta_3'(z-d_3)}). \end{aligned} \tag{21}$$

حال روابط (۱۶) و (۱۹) را در رابطهٔ (۱۴) جایگذاری می‌کنیم. با توجه به این که β'' و β' در خلأ به ترتیب برای امواج منتشر شونده و ناپایا برابر صفرند، بنابراین انرژی گرمایی منتقل شده از تیغهٔ ۱ به تیغهٔ ۳ را می‌توان به دو بخش منتشر شونده و ناپایا تقسیم کرد. این دو بخش که استخراج آنها یکی از اهداف اصلی ما در این مقاله است به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varphi_{1\to 3}^{prop} &= \frac{\Theta(\omega,T_1)}{4\pi^2}\sum_{\lambda=s,p}\int_{k_\parallel<\omega/c} dk_\parallel \frac{k_\parallel}{|N_\lambda|^2} \\ &\quad \{(1-|r_{23}^\lambda|^2)(1-|A_3|^2)(1+|r_{34}^\lambda|^2|A_3|^2) \\ &\quad -4\,\mathrm{Im}(r_{23}^\lambda)\,\mathrm{Im}[r_{34}^\lambda(A_3^2-|A_3|^2)]\} \\ &\quad \times\{(1-|r_{21}^\lambda|^2)(1-|A_1|^2)(1+|r_{10}^\lambda|^2|A_1|^2) \\ &\quad -4\,\mathrm{Im}(r_{21}^\lambda)\,\mathrm{Im}[r_{10}^\lambda(A_1^2-|A_1|^2)]\}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1\to 3}^{evan} &= \frac{\Theta(\omega,T_1)}{\pi^2}\sum_{\lambda=s,p}\int_{k_\parallel>\omega/c} dk_\parallel \frac{|A_2|^2\, k_\parallel}{|N_\lambda|^2} \\ &\quad \{\mathrm{Im}(r_{23}^\lambda)(1-|A_3|^2)(1+|r_{34}^\lambda|^2|A_3|^2) \\ &\quad +(1-|r_{23}^\lambda|^2)\,\mathrm{Im}[r_{34}^\lambda(A_3^2-|A_3|^2)]\} \\ &\quad \times\{\mathrm{Im}(r_{21}^\lambda)(1-|A_1|^2)(1+|r_{10}^\lambda|^2|A_1|^2) \\ &\quad +(1-|r_{21}^\lambda|^2)\,\mathrm{Im}[r_{10}^\lambda(A_1^2-|A_1|^2)]\}, \end{aligned} \tag{23}$$

که در آن $A_1=e^{\iota\beta_1 d_1}$، $A_2=e^{\iota\beta_1 l}$ و $A_3=e^{\iota\beta_1 d_3}$ بوده و N_λ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} N_\lambda &= (1+r_{10}^\lambda r_{21}^\lambda A_1^2)(1+r_{34}^\lambda r_{23}^\lambda A_3^2) \\ &\quad -A_2^2(r_{21}^\lambda+r_{10}^\lambda A_1^2)(r_{23}^\lambda+r_{34}^\lambda A_3^2). \end{aligned} \tag{24}$$

برای وضعیتی که تراوایی مغناطیسی تیغه‌های مختلف برابر واحد است، روابط (۲۲) و (۲۳) به نتایج به دست آمده در مرجع [۲۰] میل می‌کنند که در آن شار گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ دی الکتریک محاسبه شده است. علاوه بر این، در حالت حدی دیگری که ضخامت دو تیغه به سمت بی نهایت میل کند، داریم: $A_1, A_3 \to 0$ و $N_\lambda \to (1-r_{21}^\lambda r_{23}^\lambda A_2^2)$. اکنون با جایگذاری این نتایج در روابط (۲۲) و (۲۳) به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \varphi_{1\to 3}^{prop} &= \frac{\Theta(\omega,T_1)}{4\pi^2}\sum_{\lambda=s,p}\int_{k_\parallel<\omega/c} k_\parallel dk_\parallel \\ &\quad \frac{(1-|r_{21}^\lambda|^2)(1-|r_{23}^\lambda|^2)}{|1-r_{21}^\lambda r_{23}^\lambda e^{-2\iota\beta_2 L}|^2}, \\ \varphi_{1\to 3}^{evan} &= \frac{\Theta(\omega,T_1)}{\pi^2}\sum_{\lambda=s,p}\int_{k_\parallel>\omega/c} k_\parallel dk_\parallel\, |A_2|^2 \\ &\quad \frac{\mathrm{Im}[r_{21}^\lambda]\,\mathrm{Im}[r_{23}^\lambda]}{|1-r_{21}^\lambda r_{23}^\lambda e^{-2\iota\beta_2 L}|^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

این روابط دقیقاً منطبق بر نتایج به دست آمده در مرجع [۲۱] هستند که در آن تبادل تابش گرمایی بین دو محیط مغناطودی‌الکتریک محاسبه شده است.

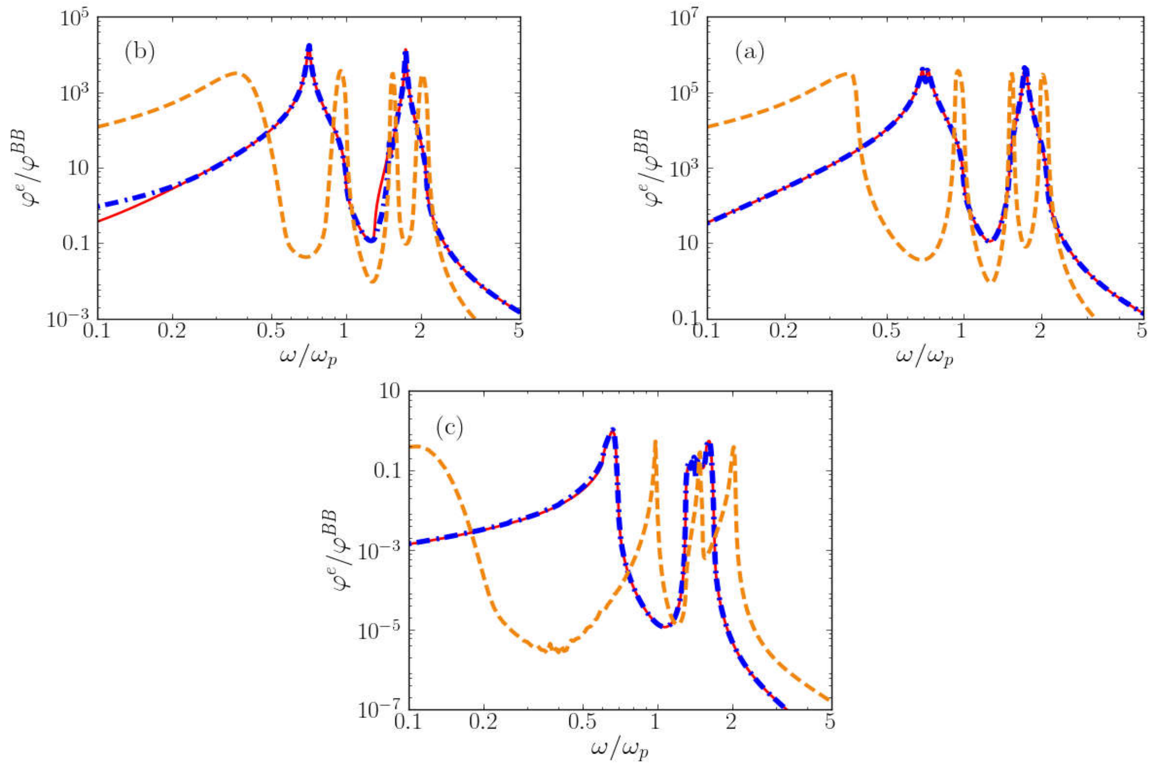
۴. تجزیه و تحلیل نتایج

در بخش قبلی توانستیم عبارتی تحلیلی برای تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ مغناطودی‌الکتریک به دست بیاوریم. اکنون با توجه به پیچیدگی روابط به دست آمده، نتایج عددی آن را برای دو تیغهٔ متا ماده با ضریب شکست‌های مثبت و منفی بررسی خواهیم کرد. متامواد ویژگی‌های خود را بیشتر از ساختار واحدهای اجزا تشکیل دهندهٔ خود دریافت می‌کنند. این مواد را می‌توان از ترکیب میله‌های زیرطول موجی و مجموعه‌ای از مشددهای حلقه‌ای فلزی کوچک و مانند آنها ساخت، که این واحدهای زیر طول موجی متا اتم یا متا مولکول نامیده می‌شوند. معمولاً هندسهٔ این ساختارها به گونه‌ای طراحی می‌شوند که می‌توان مواد با ضریب شکست کاملاً دلخواه ساخت. در اینجا فرض می‌کنیم که گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی مؤثر این دو تیغهٔ متا ماده توسط مدل درود- لورنتس:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma_e)},$$
$$\mu = 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma_m\omega}, \tag{۲۶}$$

توصیف شوند که در آن F ضریب پرشدگی، $\omega_p = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$ بسامد پلاسما و n تعداد الکترون‌های آزاد بر واحد حجم هستند.

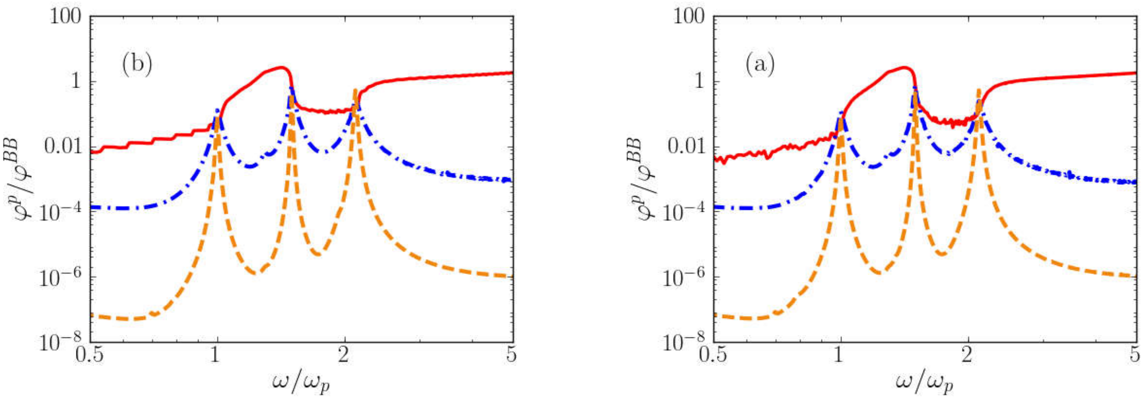
در شکل ۲ نمودار لگاریتمی مربوط به سهم امواج ناپایا در میزان تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ متا ماده یکسان که به مقدار شار گرمایی انتقالی بین دو جسم سیاه بهنجار شده، بر حسب تغییرات لگاریتمی بسامد بدون بعد ω/ω_p رسم شده است. در این نمودارها دو تیغه در دماهای متفاوت $0.385\hbar\omega_p/k_B$ و $0.406\hbar\omega_p/k_B$ هستند و تغییرات شار گرمایی انتقالی برای فواصل بین دو تیغه‌ای متفاوت و همچنین ضخامت‌های مختلف رسم شده‌اند. از مقایسهٔ این نموارها در می‌یابیم که مطابق آنچه که انتظار داریم سهم میدان نزدیک شار گرمایی انتقالی با کاهش فاصلهٔ بین دو تیغه به شدت افزایش می‌یابد. به عنوان نمونه، شدت قله‌ها و دامنه تغییرات منحنی‌ها با کاهش فاصلهٔ دو تیغه از مقدار $5.31\times10^{-1}\lambda_p$ به $5.31\times10^{-4}\lambda_p$، به اندازهٔ مرتبه بزرگی 10^5 افزایش می‌یابد. به علاوه، مقایسه منحنی‌های توپر قرمز رنگ و نقطه خط چین آبی رنگ با منحنی خط چین نارنجی رنگ نشان می‌دهد که تغییر ضخامت تیغه‌ها تا زمانی که ضخامتشان بیشتر از مقدار عمق پوستهٔ میدان الکترومغناطیسی درون ماده، $\delta = 1/\mathrm{Im}\,\beta$، است، تغییر محسوسی در گرمای انتقالی بین آنها مشاهده نمی‌شود. به همین دلیل است که منحنی‌های توپر قرمز رنگ و نقطه-خط چین آبی رنگ تقریباً بر یکدیگر منطبق هستند. در نمودارهای مزبور، دو قله در بسامدهای $\omega = 0.71\omega_p$ و $\omega = 1.73\omega_p$ مشاهده می‌شود که متناظر با پولاریتون‌های سطحی برانگیخته شده با قطبش s و p هستند. این بسامدهای تشدیدی کاملاً منطبق بر بسامدهایی هستند که از رابطه پاشندگی مربوط به امواج پولاریتونی سطحی مواد حجیم به ازای شرط $\mu = -1$ و $\varepsilon = -1$ به دست می‌آیند. با به کار بردن پارامترهای مادی (۲۶)، این بسامدهای تشدیدی برای قطبش‌های s و p و برای مواد حجیم به ترتیب برابر با $\omega = \sqrt{2}\omega_0/\sqrt{2-F}$ و $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ هستند [۲۱]. بنابراین، تفاوتی بین تابش مبادله شده بین تیغه‌های نسبتاً ضخیم و محیط‌های حجیم نیمه نامتناهی مشاهده نمی‌شود. ولی در فواصل کوچک و ضخامت‌های کوچک‌تر از عمق نفوذ پوسته اتفاق متفاوت دیگری رخ می‌دهد. در حقیقت، به دلیل جفت شدگی پولاریتونی سطحی در دو طرف یک تیغه، رابطهٔ پاشندگی این امواج سطحی تغییر می‌کند؛ به‌گونه‌ای که هر تک مد سطحی که قبلاً به ازای هر یک از قطبش‌های s و p برای مواد حجیم وجود داشت اکنون به دو مد متقارن و پاد متقادن تفکیک می‌شود. به عبارت دیگر با کوچک‌تر شدن ضخامت تیغه‌ها به مقدار کمتر از عمق نفوذ پوسته به نحوی تبهگنی مدهای سطحی از بین می‌رود و در رابطهٔ پاشندگی مربوطه به ازای هر بسامد مشخص دو ثابت موج وجود خواهد داشت. البته این دو مد تفکیک شده در حد ثابت‌های موج بزرگ به همان مقداری میل می‌کنند که برای مواد حجیم در این حالت حدی به دست می‌آید. بنابراین، در شکل ۲ و در



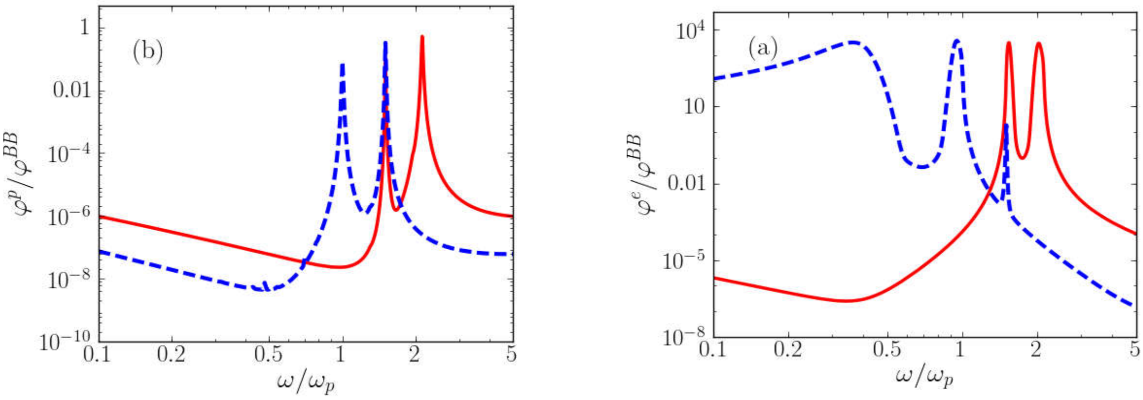
شکل ۲. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار لگاریتمی سهم امواج ناپایا در تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغه متامادهٔ یکسان در دماهای متفاوت $۰/۴۰۶\hbar\omega_p/k_B$ و $۰/۳۸۵\hbar\omega_p/k_B$ بر حسب تغییرات لگاریتمی بسامد بدون بعد ω/ω_p. در اینجا $\varphi^{\rm BB}$ بیانگر شار گرمایی انتقالی بین دو جسم سیاه با دماهای متفاوت $۰/۴۰۶\hbar\omega_p/k_B$ و $۰/۳۸۵\hbar\omega_p/k_B$ هستند. پارامترهای به کار برده شده در مدل دورود- لورنتس (۲۶) برای رسم نمودارها عبارتند از: $F=۰/۵$، $\gamma_e=\gamma_m=۰/۰۱\omega_p$ و $\omega_0=۱/۵\omega_p$. (الف) فاصلهٔ جدایی دو تیغه برابر $l=۵/۳۱\times۱۰^{-۴}\lambda_p$ در نظر شده و منحنی‌های توپر قرمز رنگ، نقطه- خط چین آبی رنگ و خط چین نارنجی رنگ به ترتیب به ازای ضخامت‌های $d_۱=d_۲=۵/۳۱\lambda_p$، $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۲}\lambda_p$ و $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۵}\lambda_p$ رسم شده‌اند. (ب) فاصلهٔ جدایی دو تیغه برابر $l=۵/۳۱\times۱۰^{-۳}\lambda_p$ در نظر گرفته شده و منحنی‌های توپر قرمز رنگ، نقطه- خط چین آبی رنگ و خط چین نارنجی رنگ به ترتیب به ازای ضخامت‌های $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰\lambda_p$، $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۲}\lambda_p$ و $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۴}\lambda_p$ رسم شده‌اند. (ج) فاصلهٔ جدایی دو تیغه برابر $l=۵/۳۱\times۱۰^{-۱}\lambda_p$ در نظر گفته شده و منحنی‌های توپر قرمز رنگ، نقطه خط چین آبی رنگ و خط چین نارنجی رنگ به ترتیب به ازای ضخامت‌های $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰\lambda_p$، $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۱}\lambda_p$ و $d_۱=d_۲=۵/۳۱\times۱۰^{-۳}\lambda_p$ رسم شده‌اند.

منحنی‌های خط چین نارنجی رنگ مشاهده می‌شود که تعداد قله‌های تشدیدی دو برابر شده‌اند. جزییات بیشتر از این فرایند افزایش دو برابری تعداد مدهای پولاریتونی سطحی به ازای هر یک از قطبش‌های s و p در شکل ۴. الف نشان داده شده است. از طرف دیگر، با توجه به کوچک شدن ضخامت تیغه‌ها، تیغه‌ها دیگر در مقابل تابش ساطع شده توسط تیغه دیگر کاملاً کدر نیستند. در نتیجه مقداری از انرژی تابشی از آن عبور کرده و باعث می‌شود که شدت دامنه تغییرات کاهش یابد. در شکل ۲. ب مشاهده می‌شود که این کاهش دامنه برای ضخامت $۵/۳۱\times۱۰^{-۴}\lambda_p$ تقریباً به اندازهٔ یک مرتبهٔ بزرگی است.

در شکل ۳ نمودار لگاریتمی مربوط به سهم میدان دور در میزان تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ متا ماده یکسان که به مقدار شار گرمایی انتقالی بین دو جسم سیاه بهنجار شده بر حسب تغییرات لگاریتمی بسامد بدون بعد ω/ω_p رسم شده است. مشاهده می‌شود که سهم امواج منتشر شونده نسبت به سهم امواج ناپایا در تابش گرمایی مبادله شده در فواصل کوچک

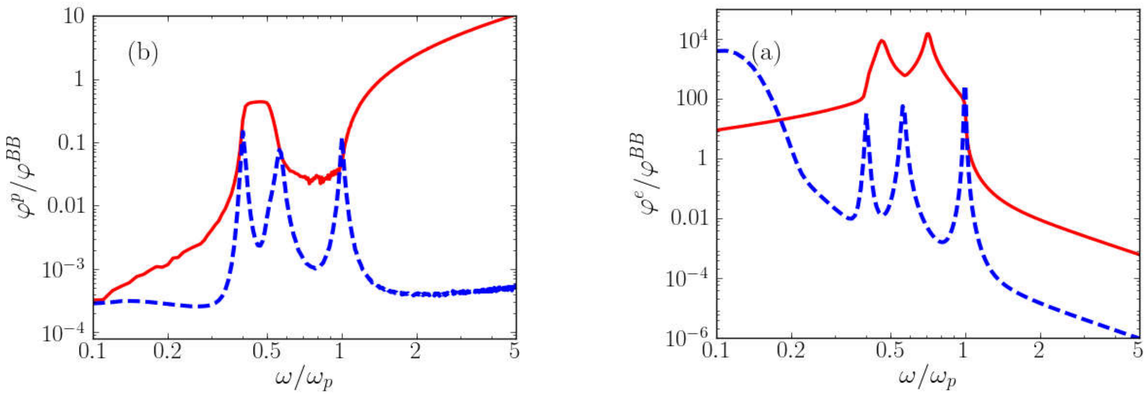


شکل ۳. (رنگی درنسخهٔ الکترونیکی) نمودار تغییرات لگاریتمی سهم امواج منتشر شونده در تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ متا مادهٔ یکسان در دماهای متفاوت $0.406\hbar\omega_p / k_B$ و $0.385\hbar\omega_p / k_B$ بر حسب تغییرات لگاریتمی بسامد بدون بعد ω/ω_p. پارامترهای مادی به کار برده شده در اینجا مشابه شکل ۲ هستند. منحنی‌های توپر قرمز رنگ، نقطه خط چین آبی رنگ و خط چین نارنجی رنگ به ترتیب به ازای ضخامت‌های $d_1 = d_2 = 5.31\lambda_p$، $d_1 = d_2 = 5.31\times10^{-2}\lambda_p$ و $d_1 = d_2 = 5.31\times10^{-4}\lambda_p$ رسم شده‌اند. فاصلهٔ جدایی دو تیغه در (الف) $l = 5.31\times10\lambda_p$ و در (ب) $l = 5.31\lambda_p$ است.



شکل ۴. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار تغییرات لگاریتمی (الف) سهم امواج ناپایا و (ب) سهم امواج منتشر شونده در تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغه متا مادهٔ یکسان در دماهای متفاوت $0.406\hbar\omega_p / k_B$ و $0.385\hbar\omega_p / k_B$ بر حسب تغییرات لگاریتمی بسامد بدون بعد ω/ω_p. منحنی‌های توپر قرمز رنگ و خط چین آبی رنگ به ترتیب به قطبش‌های S و P اشاره دارند. پارامترهای مادی به کار برده شده در اینجا مشابه شکل ۲ هستند. ضخامت لایه ها برابر $d_1 = d_2 = 5.31\times10^{-4}\lambda_p$ در نظر گرفته شده و فاصلهٔ جدایی دو تیغه در (الف) $l = 5.31\times10^{-3}\lambda_p$ و در (ب) $l = 5.31\lambda_p$ هستند.

تقریباً چندین مرتبهٔ بزرگی کوچک‌تر است. نتیجه‌ای که مکانیک کلاسیک نمی‌تواند به توصیف آن بپردازد. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که منحنی‌های مختلفی که به ازای ضخامت‌های متفاوت ترسیم شده‌اند عملاً با تغییر فاصلهٔ جدایی دو تیغه تغییر نمی‌کنند. نتیجه‌ای که در تطابق کامل با نتایج کلاسیکی است و بیانگر آن است که تابش گرمایی ساطع شده از یک جسم گرم در فواصل بزرگ عملاً مستقل از فاصله است (قانون استفان–بولتزمن). ولی نکته‌ای که کاملاً مشهود است، کاهش دامنهٔ تغییرات تابش انتقالی به همراه تغییرات تقریباً نوسانی شکلی است که در ضخامت‌های کوچک دیده می‌شود. این اثرات نتیجه‌ای از رقابت دو عامل مهم هستند. عامل نخست مربوط به اثرات تداخلی فابری– پرو مانندی است که از بازتاب‌های چندگانه در تیغهٔ نازک ناشی می‌شوند و موجب افزایش دامنه و همچنین یک رفتار نوسان گونه در شار گرمایی تبادلی می‌شوند.



شکل ۵. (رنگی در نسخهٔ الکترونیکی) نمودار تغییرات لگاریتمی (الف) سهم امواج ناپایا و (ب) سهم امواج منتشر شونده در تابش گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ متا مادهٔ یکسان که در بازهٔ بسامدی $۰/۴\omega_p<\omega<۰/۶\omega_p$ ضریب شکست منفی از خود نشان می‌دهند بر حسب تغییرات لگاریتمی بسامد بدون بعد ω/ω_p. در اینجا دو تیغه در دماهای متفاوت $۰/۴۰۶\hbar\omega_p/k_B$ و $۰/۳۸۵\hbar\omega_p/k_B$ هستند و پارامترهای به کار برده شده در مدل دورود- لورنتس (۲۶) برای رسم نمودارها عبارتند از: $F=۰/۵$، $\gamma_e=\gamma_m=۰/۰۱\omega_p$ و $\omega_0=۰/۴\omega_p$. منحنی‌های توپر قرمز رنگ و خط چین آبی رنگ به ترتیب به ازای ضخامت‌های (الف) $d_1=d_2=۵/۳۱\times۱۰^{-۳}\lambda_p$، $d_1=d_2=۵/۳۱\times۱۰^{-۵}\lambda_p$ و فاصلهٔ جدایی $l=۵/۳۱\times۱۰^{-۳}\lambda_p$ و (ب) ضخامت‌های $d_1=d_2=۵/۳۱\times۱۰\lambda_p$ و $d_1=d_2=۵/۳۱\times۱۰^{-۲}\lambda_p$ و فاصلهٔ جدایی $l=۵/۳۱\times۱۰\lambda_p$ رسم شده‌اند.

عامل دیگر مربوط به کاهش چشمه‌های ساطع کننده تابش گرمایی در اثر کاهش ضخامت تیغه‌ها به ضخامت‌های کمتر از مقدار عمق نفوذ پوسته است که منجر به کاهش شدت تابش انتقالی بین اجسام گرم می‌شود. در شکل ۴. ب جزییات هر یک از قطبش‌های s و p را در سهمی که امواج منتشر شونده به تنهایی در شار گرمایی بازی می‌کنند، نشان می‌دهد.

در شکل ۵. الف و ب به ترتیب سهم میدان نزدیک و میدان دور در شار تابشی برای وضعیتی که تیغه‌ها در برخی از بازه‌های بسامد ضریب شکست منفی دارند، نشان داده شده است. می‌دانیم که منفی شدن هم‌زمان پارامترهای گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی موجب ضریب شکست منفی می‌شود. با توجه به پارامترهای به کار رفته در این شکل و همچنین معیار $\arg(\varepsilon)+\arg(\mu)>\pi$ که در مرجع [۲۱] بیان شده است به سادگی می‌توان مشاهده کرد که این تیغه‌ها در بازهٔ بسامدی $۰/۴\omega_p<\omega<۰/۶\omega_p$ ضریب شکست منفی از خود نشان می‌دهند. نتایج شکل ۵ نشان می‌دهد به جز تفاوت‌های اندکی که فقط ناشی از تغییر پارامترهای مادی است، ضریب شکست منفی به خودی خود نسبت به ضریب شکست مثبت تأثیر متفاوت و شگرفی بر تابش گرمایی تبادلی ندارد. به عبارت دیگر، رفتار کلی دامنه تغییرات شار گرمایی تقریبا مشابه وضعیت‌های شکل‌های ۳ و ۴ هستند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله شار تابشی گرمایی مبادله شده بین دو تیغهٔ مغناطودی‌الکتریک با دماهای متفاوت در خلأ بررسی شد. رهیافت به کار برده شده در اینجا بر پایه یک رهیافت کوانتش کانونی میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده استوار بود. بر این اساس نخست تانسورهای گرین الکتریکی- الکتریکی، مغناطیسی- مغناطیسی، الکتریکی- مغناطیسی و مغناطیسی- الکتریکی سامانه محاسبه شد و به دنبال آن با به کار گیری مؤلفه‌های این تانسورها، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی سامانه و سپس میانگین آنسامبلی بردار پوئینتینگ به صورت تحلیلی به دست آمدند. در نهایت با توجه به پیچیدگی و طولانی بودن رابطهٔ نهایی، نتایج عددی آن مطالعه شد. بدین منظور پارامترهای مادی تیغه‌ها با مدل درود- لورنتس الگوسازی و رقابت بین دوسهم میدان نزدیک و دور در شار گرمایی انتقالی با تغییر فاصلهٔ جدایی و ضخامت تیغه‌ها بررسی شد. مشاهده کردیم که در فواصل جدایی بسیار کوچک، سهم

میدان‌های نزدیک در تابش مبادله شده به شدت بر سهم میدان دور غالب است. علاوه بر این، در فواصل جدایی بسیار کوچک با کمتر شدن ضخامت تیغه‌ها تعداد قله‌های تشدیدی در طیف تابشی مربوط به میدان‌های ناپایا، به علت جفت‌شدگی پولاریتون‌های سطحی دو طرف یک تیغه، افزایش می‌یابد.

پیوست ۱

کوانتش کانونی میدان الکترومغناطیسی در حضور محیط مادی

در این پیوست، رهیافت کوانتش کانونی میدان الکترومغناطیسی را در حضور محیط‌های جاذب، پاشنده، ناهمگن و ناهمسانگرد مرور سریع می‌کنیم. یک سامانه شامل میدان الکترومغناطیسی، محیط مغناطودی‌الکتریک جاذب و پاشنده و برهم‌کنش بین آنها را در نظر می‌گیریم. چگالی لاگرانژی کل سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۴-۲۵]:

$$L = L_F + L_e + L_m + L_{\text{int}}. \qquad (۱-۱)$$

جمله اول در رابطه بالا، تراز شود L_F، چگالی لاگرانژی متناظر با میدان الکترومغناطیسی است که به شکل

$$L_F = \frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ \mathrm{E}^{۲}(\mathrm{r},t) - \frac{۱}{۲\mu_\circ}\mathrm{B}^{۲}(\mathrm{r},t), \qquad (۲-۱)$$

نوشته می‌شود. جمله‌های دوم و سوم در لاگرانژی (۱-۱)، بیانگر چگالی‌های لاگرانژی محیط مغناطودی‌الکتریک هستند. این چگالی لاگرانژی‌ها بر اساس مدل هوپفیلد [۲۶] توسط پیوستاری از نوسانگرهای هماهنگ مستقل الگوسازی می‌شوند. بر این اساس لاگرانژی مادهٔ مغناطودی‌الکتریک به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} L_e + L_m = {} & \frac{۱}{۲}\int_\circ^\infty d\omega[\dot{\mathrm{X}}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t) - \omega^{۲}\mathrm{X}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t)] \\ & + \frac{۱}{۲}\int_\circ^\infty d\omega[\dot{\mathrm{Y}}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t) - \omega^{۲}\mathrm{Y}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t)], \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

که در آن میدان‌های برداری Y_ω و X_ω به ترتیب توصیف کنندهٔ ویژگی‌های الکتریکی و مغناطیسی ماده هستند. در نهایت L_{int} سهم مربوط به بخش برهم‌کنشی لاگرانژی ماده و میدان است و به شکل

$$L_{\text{int}} = \dot{\mathrm{P}}(\mathrm{r},t)\cdot\mathrm{A}(\mathrm{r},t) + \mathrm{M}(\mathrm{r},t)\cdot\mathrm{B}(\mathrm{r},t), \qquad (۴-۱)$$

نوشته می‌شود. در اینجا $\mathrm{P}(\mathrm{r},t)$ و $\mathrm{M}(\mathrm{r},t)$ بردار قطبش و مغناطش ماده هستند و بر حسب تانسورهای جفت‌شدگی بخش الکتریکی $\overline{\overline{g}}_e$ و مغناطیسی $\overline{\overline{g}}_m$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{r},t) &= \int_\circ^\infty d\omega\, \overline{\overline{g}}_e(\mathrm{r},\omega)\cdot\mathrm{X}_\omega(\mathrm{r},t), \\ \mathrm{M}(\mathrm{r},t) &= \int_\circ^\infty d\omega\, \overline{\overline{g}}_m(\mathrm{r},\omega)\cdot\mathrm{Y}_\omega(\mathrm{r},t). \end{aligned} \qquad (۵-۱)$$

اکنون با استفاده از لاگرانژی (۱-۱)، تکانه‌های همیوغ متناظر با متغیرهای دینامیکی سامانه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_\circ E_i(r,t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i}, \\ Q_{\omega,i}(\mathrm{r},t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = \dot{X}_{\omega,i}(\mathrm{r},t) + \overline{\overline{g}}_{e,ij}(\mathrm{r},\omega)A_j(\mathrm{r},t), \\ \Pi_{\omega,i}(\mathrm{r},t) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_{\omega,i}} = \dot{Y}_{\omega,i}(\mathrm{r},t). \end{aligned} \qquad (۶-۱)$$

با به‌کاربردن لاگرانژی (۱-۱) به همراه روابط بالا، چگالی هامیلتونی سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = {} & \frac{۱}{۲}\varepsilon_\circ \mathrm{E}^{۲}(\mathrm{r},t) + \frac{۱}{۲\mu_\circ}\mathrm{B}^{۲}(\mathrm{r},t) \\ & + \frac{۱}{۲}\int_\circ^\infty d\omega(\mathrm{Q}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t) + \omega^{۲}\mathrm{X}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t)) \\ & + \frac{۱}{۲}\int_\circ^\infty d\omega(\Pi^{۲}_\omega(\mathrm{r},t) + \omega^{۲}\mathrm{Y}^{۲}_\omega(\mathrm{r},t)) \\ & - \mathrm{M}(\mathrm{r},t)\cdot\mathrm{B}(\mathrm{r},t) \\ & - \dot{\mathrm{P}}(\mathrm{r},t)\cdot\mathrm{A}(\mathrm{r},t) - \frac{۱}{۲}\int_\circ^\infty d\omega\, \overline{\overline{g}}_e^{\,۲}(\mathrm{r},\omega)\mathrm{A}^{۲}(\mathrm{r},t). \end{aligned} \qquad (۷-۱)$$

حال به منظور توصیف کوانتومی سامانه مزبور، روابط جابه‌جایی زیر را بین متغیرهای دینامیکی و تکانه‌های همیوغشان برقرار می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\left[A_i(\mathrm{r},t), -\varepsilon_\circ E_j(\mathrm{r},t)\right] = \iota\hbar\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\delta_{ij}, \\ &\left[X_i(\mathrm{r},\omega,t), Q_j(\mathrm{r}',\omega',t)\right] = \iota\hbar\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\delta(\omega-\omega')\delta_{ij}, \\ &\left[Y_i(\mathrm{r},\omega,t), \Pi_j(\mathrm{r}',\omega',t)\right] = \iota\hbar\delta(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\delta(\omega-\omega')\delta_{ij}. \end{aligned} \qquad (۸-۱)$$

با به‌کاربردن روابط جابه‌جایی بالا و استفاده از هامیلتونی (۷-۱)، معادلات هایزنبرگ متناظر با متغیرهای دینامیکی سامانه عبارتند از:

$$\ddot{X}_\omega(r,t)+\omega^2 X_\omega(r,t)=\bar{\bar{g}}_e(r,\omega)\cdot E(r,t),\quad \ddot{Y}_\omega(r,t)+\omega^2 Y_\omega(r,t)=\bar{\bar{g}}_m(r,\omega)\cdot B(r,t), \tag{۱-۹}$$

و

$$\nabla\times(\nabla\times A(r,t))+c^{-2}\dot{A}^2(r,t)=\mu_0[\nabla\times M(r,t)+\dot{P}(r,t)]. \tag{۱-۱۰}$$

با حل روابط (۱-۹) و جایگذاری پاسخ آنها در رابطهٔ (۱-۵)، بردارهای قطبش و مغناطش ماده در فضای بسامد به صورت زیر دست می‌آید:

$$P(r,\omega)=P^N(r,\omega)+\bar{\bar{\chi}}^e(r,\omega).E(r,\omega),\quad M(r,\omega)=M^N(r,\omega)+\bar{\bar{\chi}}^m(r,\omega).B(r,\omega), \tag{۱-۱۱}$$

که در آن پذیرفتاری الکتریکی و مغناطیسی $\bar{\bar{\chi}}^{e(m)}$ بر حسب تانسورهای جفت‌شدگی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\bar{\chi}}^e_{ij}(r,\omega)=\varepsilon_0^{-1}\int_0^\infty d\omega'\frac{\bar{\bar{g}}^t_e\cdot\bar{\bar{g}}_e}{\omega'^2-\omega^2+\iota 0^+},\quad \bar{\bar{\chi}}^m_{ij}(r,\omega)=\mu_0\int_0^\infty d\omega'\frac{\bar{\bar{g}}^t_m\cdot\bar{\bar{g}}_m}{\omega'^2-\omega^2+\iota 0^+}. \tag{۱-۱۲}$$

جملات P^N و M^N در رابطه (۱-۱۱)، عملگرهای نوفهٔ قطبش و مغناطش ماده هستند که از اثرات اتلافی در ماده ناشی می‌شوند. با تعریف عملگرهای نابودی $\hat{f}_e=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}[-\iota\omega X_\omega(r,t)+Q_\omega(r,t)]$ و $\hat{f}_m=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}[\omega Y_\omega(r,t)+\iota\Pi_\omega(r,t)]$، عملگرهای نوفهٔ قطبش و مغناطش به دو بخش بسامد مثبت و منفی به شکل

$$P^N(r,\omega)=P^{+N}(r,\omega)+P^{-N}(r,\omega),\quad M^N(r,\omega)=M^{+N}(r,\omega)+M^{-N}(r,\omega), \tag{۱-۱۳}$$

تفکیک می‌شوند. بخش مثبت بسامدی آنها برابر

$$\hat{P}^{+N}(r,\omega)=2\iota\pi\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\bar{\bar{g}}_e(r,\omega)\cdot\hat{f}_e(r,\omega,0),\quad \hat{M}^{+N}(r,\omega)=2\pi\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\bar{\bar{g}}_m(r,\omega)\cdot\hat{f}_m(r,\omega,0), \tag{۱-۱۴}$$

است و بخش منفی بسامدی آنها از اثر عملگر هرمیتی بر بخش مثبت بسامدی به دست می‌آید. به سادگی می‌توان نشان داد که با به کاربردن رابطهٔ جابه‌جایی (۱-۸)، این عملگرهای نوفه در رابطه جابه‌جایی بوزونی زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{f}_{e(m),j}(r,\omega,t),\hat{f}^\dagger_{e(m),j'}(r',\omega',t)]=\delta_{jj'}\delta(r-r')\delta(\omega-\omega'). \tag{۱-۱۵}$$

اکنون با وارون کردن روابط (۱-۱۲)، تانسورهای جفت‌شدگی سامانه بر حسب قسمت موهومی پارامترهای مادی به صورت $\bar{\bar{g}}^t_e.\bar{\bar{g}}_e(r,\omega)=\frac{2\varepsilon_0\omega}{\pi}\mathrm{Im}[\bar{\bar{\varepsilon}}(r,\omega)]$ و $\bar{\bar{g}}^t_m.\bar{\bar{g}}_m(r,\omega)=-\frac{2\omega}{\mu_0\pi}\mathrm{Im}[\bar{\bar{\mu}}^{-1}(r,\omega)]$ نوشته می‌شوند. با به کاربردن این روابط و همچنین استفاده از روابط جابه‌جایی (۱-۱۵)، روابط همبستگی بین عملگرهای نوفهٔ قطبش و مغناطش به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\left\langle \hat{P}^N_i(r,\omega),\hat{P}^{N\dagger}_j(r',\omega')\right\rangle=4\pi\hbar\varepsilon_0\,\mathrm{Im}[\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}(r,\omega)]\,a_T(\omega)\delta_{ij}\,\delta(\omega-\omega')\delta(r-r'),$$
$$\left\langle \hat{M}^N_i(r,\omega),\hat{M}^{N\dagger}_j(r',\omega')\right\rangle=4\pi\hbar\mu_0^{-1}\,\mathrm{Im}[\bar{\bar{\mu}}^{-1}_{ij}(r,\omega)]\,a_T(\omega)\delta_{ij}\,\delta(\omega-\omega')\delta(r-r'),$$
$$\left\langle \hat{P}^N_i(r,\omega),\hat{M}^{N\dagger}_j(r',\omega')\right\rangle=\left\langle \hat{M}^N_i(r,\omega),\hat{P}^{N\dagger}_j(r',\omega')\right\rangle=0. \tag{۱-۱۶}$$

در اینجا $a_T=[2(n_T+\frac{1}{2})]$ بوده و $n_T(\omega,T)=[\exp(\hbar\omega/k_BT)-1]^{-1}$ بیانگر میانگین تعداد فوتون‌های گرمایی است که در آن $\hbar$، k_B و T به ترتیب اشاره به ثابت پلانک تقسیم بر 2π، ثابت بولتزمن و دمای تیغهٔ مغناطودی- الکتریک دارند. در حقیقت روابط (۱۶-۱) در تطابق کامل با قضیه اتلاف- افت و خیز است که مراجع دیگر از آن استفاده می‌کنند در حالی‌که این روابط مستقیماً از فرمول‌بندی رهیافتمان به دست می‌آیند.

با استفاده از روابط (۱-۱۱) و جایگذاری آن در رابطه (۱-۱۰)، معادلهٔ موج به صورت

$$\left[\bar{\nabla}\times(\bar{\bar{\mu}}^{-1}(r,\omega)\nabla\times)-\frac{\omega^2}{c^2}\bar{\bar{\varepsilon}}(r,\omega)\right]\hat{E}(r,\omega)=\iota\mu_0\omega\,\hat{j}^N_e(r,\omega)-\mu_0\nabla\times\hat{j}^N_m(r,\omega), \tag{۱-۱۷}$$

به دست می‌آید. در رابطهٔ بالا $\hat{j}^N_e=-\iota\omega\hat{P}^N(r,\omega)$ چگالی جریان نوفهٔ الکتریکی، $\hat{j}^N_m(r,\omega)=-\iota\omega\hat{M}^N(r,\omega)$ چگالی جریان نوفهٔ مغناطیسی بوده و $\bar{\bar{\varepsilon}}(r,\omega)=I+\bar{\bar{\chi}}_e(r,\omega)$ و

$\overline{\overline{\mu}}(\mathrm{r},\omega)=\mathrm{I}\text{-}\overline{\overline{\chi}}_m(\mathrm{r},\omega)$ به ترتیب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی محیط مغناطودی‌الکتریک هستند. به سادگی می‌توان نشان داد که با به کاربردن معادلهٔ موج بالا و معرفی تانسورهای گرین الکترومغناطیسی سامانه، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر حسب عملگرهای بوزونی الکتریکی و مغناطیسی و تانسورهای گرین الکترومغناطیسی سامانه بیان شده و بدین ترتیب روند کوانتش کانونی تکمیل می‌شود. این کار با جزییات کامل در بخش ۲ مقاله انجام شده است.

پیوست ۲

تانسور گرین

سامانهٔ مورد بررسی در این مقاله یک ساختار چند لایه‌ای مغناطودی‌الکتریک است. تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه مزبور با تعمیم روش ارائه شده در مرجع [۲۳] برای محیط‌های مغناطودی‌الکتریک به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\frac{\mu_j(\mathrm{r},\omega)}{(2\pi)^2}\int d^2\mathrm{k}_{\|}\,\overline{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{z},\mathrm{z}',\mathrm{k}_{\|},\omega)\,e^{\iota \mathrm{k}_{\|}\cdot(\mathrm{R}-\mathrm{R}_0)}. \qquad (۱–۲)$$

در اینجا $\mathrm{k}_{\|}=(k_x,k_y)$ و $\mathrm{R}=(x,y)$ به ترتیب مختصهٔ مکان و بردار موج مماسی بر سطح لایه‌ها و $\overline{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{z},\mathrm{z}',\mathrm{k}_{\|},\omega)$ تانسور گرین سامانه در فضای فوریه است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\overline{\overline{\mathrm{G}}}^{jj'}(z,z',\mathrm{k}_{\|},\omega)=-\mathrm{e}_z\frac{\delta_{jj'}}{k_j^2}\mathrm{e}_z\delta(z-z')+\overline{\overline{\mathrm{g}}}^{jj'}(z,z',\mathrm{k}_{\|},\omega). \qquad (۲–۲)$$

همان طور که مشاهده می‌شود تانسور گرین سامانه شامل دو جمله است. جملهٔ اول و دوم به ترتیب بیانگر پاسخ‌های ناهمگن و همگن معادلهٔ هلمهولتز و اندیس‌های j,j' نیز هر کدام مشخص کنندهٔ موضع نقاط چشمه و میدان هستند. در اینجا پاسخ بخش ناهمگن عبارت است از:

$$\overline{\overline{\mathrm{g}}}^{jj'}(z,z',\mathrm{k}_{\|},\omega)=\frac{\iota}{2}\sum_{\lambda=s,p}\sigma_\lambda[\varepsilon_\lambda^{j>}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)\,\Xi_\lambda^{jj'}\,\varepsilon_\lambda^{j'<}(z',-\mathrm{k}_{\|},\omega)\Theta(j-j')+\varepsilon_\lambda^{j'>}(z',-\mathrm{k}_{\|},\omega)\Xi_\lambda^{j'j}\,\varepsilon_\lambda^{j<}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)\,\Theta(j'-j)], \qquad (۳–۲)$$

که در آن $\sigma_p=1,\ \sigma_s=-1$ و $\Xi_\lambda^{jj'}=\dfrac{t_{jj'}^\lambda e^{\iota\beta_j d_j}e^{\iota\beta_{j'}d_{j'}}}{D_{\lambda j'}D_{\lambda j/j'}}$ است.

به‌علاوه ضرایب برداری $\varepsilon_\lambda^{j>}$ و $\varepsilon_\lambda^{j<}$ بر حسب ضرایب فرنل بازتاب بین لایهٔ jام و لایهٔ صفرم، ($r_{j/0}^\lambda$) و لایهٔ jام و بین لایهٔ nام، ($r_{j/n}^\lambda$) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\lambda^{j>}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)&=\mathrm{e}_{\lambda+}^j(\mathrm{k}_{\|})\,e^{\iota\beta(z-d_j)}+r_{j/n}^\lambda\mathrm{e}_{\lambda-}^j(-\mathrm{k}_{\|})\,e^{-\iota\beta(z-d_j)},\\ \varepsilon_\lambda^{j<}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)&=\mathrm{e}_{\lambda-}^j(\mathrm{k}_{\|})\,e^{-\iota\beta z}+r_{j/0}^\lambda\mathrm{e}_{\lambda+}^j(-\mathrm{k}_{\|})\,e^{\iota\beta z},\end{aligned} \qquad (۴–۲)$$

که در آن بردارهای $\mathrm{e}_{s\pm}^j(\mathrm{k}_{\|})=\hat{\mathrm{k}}_{\|}\times\hat{z}=\hat{s}_\pm^j$ و $\mathrm{e}_{p\pm}^j(\mathrm{k}_{\|})=(k_{\|}\hat{z}\mp\beta_j\hat{k})/k_j=\hat{p}_\pm^j$، بردارهای یکهٔ متناظر با قطبش p,s هستند. اکنون یک ساختار ۴ لایه‌ای را بررسی می‌کنیم که در آن لایهٔ صفرم، دوم و آخر آن برابر محیط خلأ هستند (شکل ۱). بنابراین پارامترهای مادی این لایه‌ها برابر ε_0 و μ_0 هستند. با توجه به نکات گفته شده در متن مقاله، به مؤلفه‌های تانسور گرینی نیاز داریم که نقاط چشمه و میدان آنها در لایه های $j'=1$, $j=3$ قرار دارند. بر این اساس، تانسور گرین (۲–۲) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{\overline{\mathrm{G}}}^{31}(z,z',\mathrm{k}_{\|},\omega)=\frac{\iota}{2}\sum_{\lambda=s,p}\sigma_\lambda[\varepsilon_\lambda^{3>}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)\,\Xi_\lambda^{31}\,\varepsilon_\lambda^{1<}(z',-\mathrm{k}_{\|},\omega)], \qquad (۵–۲)$$

که در آن دوتایی نتیجه شده از حاصل‌ضرب ضرایب برداری $\varepsilon_\lambda^{3>}\otimes\varepsilon_\lambda^{1<}$، با استفاده از روابط (۴–۲) برای قطبش‌های مختلف به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_s^{3>}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)\otimes\varepsilon_s^{1<}(z',-\mathrm{k}_{\|},\omega)&=\mathrm{e}_{s+}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{s+}^1(\mathrm{k}_{\|})\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}+r_{10}^\lambda\,\mathrm{e}_{s+}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{s-}^1(\mathrm{k}_{\|})e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}\\&+r_{34}^\lambda\,\mathrm{e}_{s-}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{s+}^1(\mathrm{k}_{\|})e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}+r_{10}^\lambda r_{34}^\lambda\,\mathrm{e}_{s-}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{s-}^1(\mathrm{k}_{\|})\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'},\end{aligned} \qquad (۶–۲)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_p^{3>}(z,\mathrm{k}_{\|},\omega)\otimes\varepsilon_p^{1<}(z',-\mathrm{k}_{\|},\omega)&=\mathrm{e}_{p+}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{p+}^1(\mathrm{k}_{\|})\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}+r_{10}^\lambda\,\mathrm{e}_{p+}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{p-}^1(\mathrm{k}_{\|})\,e^{\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}\\&+r_{34}^\lambda\,\mathrm{e}_{p-}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{p+}^1(\mathrm{k}_{\|})\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{-\iota\beta_1 z'}+r_{10}^\lambda r_{34}^\lambda\,\mathrm{e}_{p-}^3(\mathrm{k}_{\|})\,\mathrm{e}_{p-}^1(\mathrm{k}_{\|})\,e^{-\iota\beta_3(z-d_3)}e^{\iota\beta_1 z'}.\end{aligned} \qquad (۷–۲)$$

بـا جایگـذاری روابـط بـالا در رابطـهٔ (۲-۱)، تانسـور گـرین الکتریکی- الکتریکی $\bar{\bar{G}}^{31}_{Ee}$ که بیانگر رابطهٔ مستقیم چشمه‌هـای الکتریکی در تولید میدان الکتریکی اسـت، در فضـای مکـان بـه صورت زیر داده می‌شود:

$$\bar{\bar{G}}^{31}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\frac{\iota}{8\pi^{2}}\int d^{2}\mathrm{k}_{\|}\,e^{\iota\mathrm{k}_{\|}\cdot(\mathrm{R}-\mathrm{R}_{0})}\,\mu_{3}\Big(\sum_{i,j=x,y,z}g_{ij}^{Ee}\Big), \tag{8-2}$$

که در آن مؤلفه های دکارتی g_{ij}^{Ee} به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$g_{zz}^{Ee}=\Xi_{p}^{31}\frac{k_{\|}^{2}}{k_{1}k_{3}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})}), \tag{9-2}$$

$$\begin{aligned}g_{xx}^{Ee}&=\Xi_{s}^{31}\frac{k_{y}^{2}}{k_{\|}^{2}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{s}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{s}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})\\&+\Xi_{p}^{31}\frac{\beta_{1}\beta_{3}}{k_{1}k_{3}}\frac{k_{x}^{2}}{k_{\|}^{2}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}-r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}-r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=g_{yy}^{Ee}(k_{x}\leftrightarrow k_{y}),\end{aligned} \tag{10-2}$$

$$\begin{aligned}g_{xy}^{Ee}&=-\Xi_{s}^{31}\frac{k_{y}k_{x}}{k^{2}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{s}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{s}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})\\&+\Xi_{p}^{31}\frac{\beta_{1}\beta_{3}}{k_{1}k_{3}}\frac{k_{x}k_{y}}{k_{\|}^{2}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}-r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}-r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=g_{yx}^{Ee}(k_{x}\leftrightarrow k_{y}),\end{aligned} \tag{11-2}$$

$$g_{xz}^{Ee}=-\Xi_{p}^{31}\frac{\beta_{3}}{k_{1}k_{3}}k_{x}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}-r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=g_{yz}^{Ee}(k_{x}\leftrightarrow k_{y}), \tag{12-2}$$

$$g_{zx}^{Ee}=\Xi_{p}^{31}\frac{\beta_{1}}{k_{1}k_{3}}k_{x}(-e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=g_{zy}^{Ee}(k_{x}\leftrightarrow k_{y}), \tag{13-2}$$

از طرف دیگر، تانسور گرین $\bar{\bar{G}}^{31}_{He}$ که رابطهٔ مستقیم چشمه‌های الکتریکی را در تولید میدان مغناطیسی بیان می‌کند با مشتق‌گیری فضایی از تانسور گرین الکتریکی- الکتریکی سامانه به صـورت $\vec{\nabla}\times\bar{\bar{G}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)/\iota\omega\mu(\mathrm{r},\omega)$ بـه دسـت مـی‌آیـد (بخـش ۱). بنابراین داریم:

$$\bar{\bar{G}}^{31}_{He}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\frac{1}{8\pi^{2}}\int d^{2}\mathrm{k}_{\|}\,e^{\iota\mathrm{k}_{\|}\cdot(\mathrm{R}-\mathrm{R}_{0})}k_{3}\Big(\sum_{i,j=x,y,z}g_{ij}^{He}\Big), \tag{14-2}$$

که در آن مؤلفه‌های دکارتی g_{ij}^{He} به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}g_{xx}^{He}&=\Xi_{s}^{31}\frac{k_{x}k_{y}}{k_{\|}^{2}}\beta_{3}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{s}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}-r_{34}^{s}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})\\&-\Xi_{p}^{31}\frac{k_{x}k_{y}}{k_{\|}^{2}}\frac{\beta_{1}(\beta_{3}^{2}+k_{\|}^{2})}{k_{1}k_{3}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}-r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=-g_{yy}^{He},\end{aligned} \tag{15-2}$$

$$\begin{aligned}g_{xy}^{He}&=-[\Xi_{s}^{31}\frac{k_{x}^{2}}{k_{\|}^{2}}\beta_{3}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{s}\,e^{\iota\beta_{1}z'})(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}-r_{34}^{s}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})\\&+\Xi_{p}^{31}\frac{k_{y}^{2}}{k_{\|}^{2}}\frac{\beta_{1}(\beta_{3}^{2}+k_{\|}^{2})}{k_{1}k_{3}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}-r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})\\&(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})]=-g_{yx}^{He}(k_{x}\rightarrow k_{y}),\end{aligned} \tag{16-2}$$

$$\begin{aligned}g_{xz}^{He}&=\Xi_{p}^{31}k_{y}\frac{(\beta_{3}^{2}+k_{\|}^{2})}{k_{1}k_{3}}(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})\\&(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=-g_{yz}^{He}\,(k_{y}\rightarrow k_{x}),\end{aligned} \tag{17-2}$$

$$\begin{aligned}g_{zx}^{He}&=-\Xi_{s}^{31}(k_{y})(e^{-\iota\beta_{1}z'}+r_{10}^{p}\,e^{\iota\beta_{1}z'})\\&(e^{\iota\beta_{3}(z-d_{3})}+r_{34}^{p}e^{-\iota\beta_{3}(z-d_{3})})=-g_{zy}^{He}\,(k_{y}\rightarrow k_{x}),\end{aligned} \tag{18-2}$$

$$g_{zz}^{He}=0. \tag{19-2}$$

بـه طـور مشـابه مؤلفـه‌هـای تانسـور گـرین الکتریکـی- مغناطیسـی و مغناطیسی- الکتریکـی $\bar{\bar{G}}^{31}_{Em}$ و $\bar{\bar{G}}^{31}_{Hm}$ کـه بـه ترتیـب بیـانگر رابطـهٔ مستقیم چشمه‌های مغناطیسی در تولیـد میـدان الکتریکـی و مغناطیسـی هستند، مطابق آنچه که در بخش ۱ گفته شد بر حسـب تانسـور گـرین الکتریکـــــی $\bar{\bar{G}}_{Ee}$ بـــــــه شـــــــکل $\bar{\bar{G}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\times\overleftarrow{\nabla}_{r'}$ و $\vec{\nabla}_{r}\times[\bar{\bar{G}}_{Ee}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\times\overleftarrow{\nabla}_{r'}]/\iota\omega\mu(\mathrm{r},\omega)$ تعریف می‌شوند. بنابراین، با به کار بردن این نکات و استفاده از تانسور گرین (۲-۸) داریم:

$$\bar{\bar{G}}^{31}_{Em}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=\frac{\iota}{8\pi^{2}}\int d^{2}\mathrm{k}_{\|}\,e^{\iota\mathrm{k}_{\|}\cdot(\mathrm{R}-\mathrm{R}_{0})}\mu_{3}k_{1}\Big(\sum_{i,j=x,y,z}g_{ij}^{Em}\Big), \tag{20-2}$$

$$\bar{\bar{G}}^{31}_{Hm}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)=-\frac{1}{8\pi^2}\int d^2\mathrm{k}_{\parallel}\,e^{\imath \mathrm{k}_{\parallel}.(\mathrm{R}-\mathrm{R}_\circ)}k_1k_3\Big(\sum_{i,j=x,y,z} g^{Hm}_{ij}\Big), \tag{۲۱-۲}$$

که در آن مؤلفه های دکارتی g^{Em}_{ij} و g^{Hm}_{ij} به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} g^{Em}_{xx}=&[\Xi^{31}_s\frac{k_xk_y\beta_1}{k_{\parallel}^2}(e^{-\imath\beta_1z'}-r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}+r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})\\ &-\Xi^{31}_p\frac{k_xk_y\beta_2}{k_1k_2k_{\parallel}^2}(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)(e^{-\imath\beta_1z'}+r^p_{10}e^{\imath\beta_1z'})]\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}-r^p_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})]=-g^{Em}_{yy}, \end{aligned} \tag{۲۲-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Em}_{yx}=&-[\Xi^{31}_s\frac{k_x^2\beta_1}{k_{\parallel}^2}(e^{-\imath\beta_1z'}-r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}+r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})\\ &+\Xi^{31}_p\frac{k_y^2\beta_2}{k_1k_2k_{\parallel}^2}(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)(e^{-\imath\beta_1z'}+r^p_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}-r^p_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})]=-g^{Em}_{yx}(k_x\leftrightarrow k_y), \end{aligned} \tag{۲۳-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Em}_{xz}=&-\Xi^{31}_s k_y\beta_2(e^{-\imath\beta_1z'}+r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}+r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})=-g^{Em}_{yz}(k_x\leftrightarrow k_y), \end{aligned} \tag{۲۴-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Em}_{zx}=&-\Xi^{31}_p\frac{k_y}{k_1k_2}(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)(e^{-\imath\beta_1z'}+r^p_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}+r^p_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})\}=g^{Em}_{zy}(k_x\leftrightarrow k_y), \end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

$$g^{Em}_{zz}=0. \tag{۲۶-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Hm}_{xx}=&-[\Xi^{31}_s\frac{k_x^2}{k_{\parallel}^2}\beta_1\beta_2(e^{-\imath\beta_1z'}-r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}-r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})\\ &+\Xi^{31}_p\frac{k_y^2}{k_{\parallel}^2}\frac{(\beta_2^2+k_{\parallel}^2)}{k_1}\frac{(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)}{k_2}(e^{-\imath\beta_1z'}+r^p_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}+r^p_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})]=g^{Hm}_{yy}(k_x\leftrightarrow k_y), \end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Hm}_{xy}=&-[\Xi^{31}_s\frac{k_yk_x}{k_{\parallel}^2}\beta_1\beta_2(e^{-\imath\beta_1z'}-r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}\\ &-r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})+\Xi^{31}_p\frac{k_xk_y}{k_{\parallel}^2}\frac{(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)}{k_1}\\ &\frac{(\beta_2^2+k_{\parallel}^2)}{k_2}(e^{-\imath\beta_1z'}+r^p_{10}e^{\imath\beta_1z'})(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}\\ &+r^p_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})]=g^{Hm}_{yx}, \end{aligned} \tag{۲۸-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Hm}_{yz}=&[\Xi^{31}_s\beta_2k_y(e^{-\imath\beta_1z'}+r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}\\ &-r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})]=g^{Hm}_{xz}(k_x\leftrightarrow k_y), \end{aligned} \tag{۲۹-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Hm}_{zz}=&-[\Xi^{31}_s k_{\parallel}^2(e^{-\imath\beta_1z'}+r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})\\ &(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}+r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})], \end{aligned} \tag{۳۰-۲}$$

$$\begin{aligned} g^{Hm}_{zy}=&[\Xi^{31}_s k_y\beta_1(e^{-\imath\beta_1z'}-r^s_{10}e^{\imath\beta_1z'})(e^{\imath\beta_2(z-d_2)}\\ &+r^s_{34}e^{-\imath\beta_2(z-d_2)})]=g^{Hm}_{zx}(k_x\leftrightarrow k_y). \end{aligned} \tag{۳۱-۲}$$

پیوست ۳

بردار پوینتینگ

با توجه به طولانی بودن محاسبهٔ میانگین بردار پوینتینگ

$$\langle S_z(\mathrm{r},t)\rangle=2\,\mathrm{Re}\langle E_x(\mathrm{r},t)H^*_y(\mathrm{r},t)-E_y(\mathrm{r},t)H^*_x(\mathrm{r},t)\rangle. \tag{۱-۳}$$

جزئیات محاسبات آن در این پیوست آورده شده است با توجه به رابطهٔ بالا، مؤلفهٔ z بردار پوینتینگ در فضای بسامد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle S_z(\mathrm{r},\omega)\rangle=&2\,\mathrm{Re}\int\frac{d\,\omega}{2\pi}\frac{d\,\omega'}{2\pi}e^{\imath(\omega-\omega')t}\\ &\langle E_x(\mathrm{r},\omega)H^*_y(\mathrm{r},\omega')-E_y(\mathrm{r},\omega)H^*_x(\mathrm{r},\omega')\rangle,\\ =&2\,\mathrm{Re}\int\frac{d\,\omega}{(2\pi)^2}\langle[E_{e,x}+E_{m,x}][H^*_{e,y}\\ &+H^*_{m,y}]-[E_{e,y}+E_{m,y}][H^*_{e,x}+H^*_{m,x}]\rangle. \end{aligned} \tag{۲-۳}$$

که در رابطهٔ بالا از تفکیک میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به دو بخش الکتریکی و مغناطیسی استفاده شده است. مشاهده می‌شود که مقدار میانگین بردار پوینتینگ به همبستگی‌های کوانتومی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بستگی دارد. بنابراین با به کاربردن روابط همبستگی بین عملگرهای نوفهٔ قطبش و مغناطش، می‌توان همبستگی بین مؤلفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی را نیز به شکل زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \langle E_{e,i}H^*_{e,j}\rangle=&\int_A d\,\mathrm{r}'\,d\,\mathrm{r}''\;\imath\mu_\circ\omega\,\bar{\bar{G}}_{Ee,ik}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\\ &\bar{\bar{G}}^*_{He,jl}(\mathrm{r},\mathrm{r}'',\omega)\langle j^N_{e,k}(\mathrm{r}',\omega)\,j^{N*}_{e,l}(\mathrm{r}'',\omega)\rangle\\ =&4\pi\frac{\omega^2}{c^2}\imath\,\Theta(\omega,T)\int_A d\,\mathrm{r}'\bar{\bar{G}}_{Ee,ik}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\\ &\bar{\bar{G}}^*_{He,jk}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\,\mathrm{Im}[\varepsilon_{j'}], \end{aligned} \tag{۳-۳}$$

$$\left\langle E_{m,i}H^{*}_{m,j}\right\rangle = \int_A d\,\mathrm{r}'\,d\,\mathrm{r}''\,\mu_0\,\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{Em,ik}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\,\overline{\overline{\mathrm{G}}}^{*}_{Hm,jl}(\mathrm{r},\mathrm{r}'',\omega)\left\langle j^{N}_{m,k}(\mathrm{r}',\omega)\,j^{N\,*}_{m,l}(\mathrm{r}'',\omega)\right\rangle = 4\pi\,\omega\,\Theta(\omega,T)\int_A d\,\mathrm{r}'\overline{\overline{\mathrm{G}}}_{Em,ik}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\,\overline{\overline{\mathrm{G}}}^{*}_{Hm,jk}(\mathrm{r},\mathrm{r}',\omega)\ \mathrm{Im}[\mu^{-1}_{j'}]. \quad (۴-۳)$$

در روابط بالا، $\Theta(\omega,T)=\hbar\omega\,a_T(\omega)$، $j'=1$، $j=3$ و مساحت سطح تیغه برابر واحد است. با جایگذاری مؤلفه‌های دکارتی تانسورهای گرین به دست آمده در پیوست ۲ در روابط بالا و انجام محاسبات بسیار طولانی، رابطهٔ زیر به دست خواهد آمد:

$$\left\langle E_{e,x}H^{*}_{e,y}-E_{e,y}H^{*}_{e,x}\right\rangle = \Theta(\omega,T_1)\mu_3\,\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}[\varepsilon_1]\int\frac{d^2\mathrm{k}_{\parallel}}{4\pi}\int_0^{d_1}dz'\,\mathrm{I}_e(z,z'), \quad (۵-۳)$$

که در آن $\mathrm{I}_e(z,z')$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_e(z,z') = \{&\left|\Xi^{31}_{s}\right|^2\beta_3^{*}(e^{-\iota\beta_1 z'}+r^{s}_{10}e^{\iota\beta_1 z'})(e^{\iota\beta_1^{*}z'}+r^{s*}_{10}e^{-\iota\beta_1^{*}z'})(e^{\iota\beta_3(z-d_3)}+\\ &r^{s}_{34}e^{-\iota\beta_3(z-d_3)})(e^{-\iota\beta_3^{*}(z-d_3)}-r^{s*}_{34}e^{\iota\beta_3^{*}(z-d_3)})\\ &+\left|\Xi^{31}_{p}\right|^2\frac{\beta_3}{|k_1|^2|k_3|^2}(\beta_3^{2*}+k_{\parallel}^2)(e^{\iota\beta_3(z-d_3)}\\ &-r^{p}_{34}e^{-\iota\beta_3(z-d_3)})(e^{-\iota\beta_3^{*}(z-d_3)}+r^{p*}_{34}e^{\iota\beta_3^{*}(z-d_3)})\\ &\times[|\beta_1|^2(e^{-\iota\beta_1 z'}-r^{p}_{10}e^{\iota\beta_1 z'})(e^{\iota\beta_1^{*}z'}-r^{p*}_{10}e^{-\iota\beta_1^{*}z'})\\ &+k_{\parallel}^2(e^{-\iota\beta_1 z'}+r^{p}_{10}e^{\iota\beta_1 z'})(e^{\iota\beta_1^{*}z'}+r^{p*}_{10}e^{-\iota\beta_1^{*}z'})]\}.\end{aligned} \quad (۶-۳)$$

به طور مشابه با انجام محاسبات بالا برای بخش مغناطیسی داریم:

$$\left\langle E_{m,x}H^{*}_{m,y}-E_{m,y}H^{*}_{m,x}\right\rangle = \Theta(\omega,T_1)\mu_3\,\mathrm{Im}[\mu_1^{-1}]\int\frac{d^2\mathrm{k}_{\parallel}}{4\pi}\int_0^{d_1}dz'\,\mathrm{I}_m(z,z'), \quad (۷-۳)$$

که در آن $\mathrm{I}_m(z,z')$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_m(z,z') = \{&\left|\Xi^{31}_{s}\right|^2\beta_3^{*}(e^{\iota\beta_3(z-d_3)}+r^{s}_{34}e^{-\iota\beta_3(z-d_3)})\\ &(e^{-\iota\beta_3^{*}(z-d_3)}-r^{s*}_{34}e^{\iota\beta_3^{*}(z-d_3)})\times[|\beta_1|^2(e^{-\iota\beta_1 z'}-r^{s}_{10}e^{\iota\beta_1 z'})\\ &(e^{\iota\beta_1^{*}z'}-r^{s*}_{10}e^{-\iota\beta_1^{*}z'})+k_{\parallel}^2(e^{-\iota\beta_1 z'}+r^{s}_{10}e^{\iota\beta_1 z'})(e^{\iota\beta_1^{*}z'}+r^{s*}_{10}\\ &e^{-\iota\beta_1^{*}z'})]+\left|\Xi^{31}_{p}\right|^2\frac{\beta_3}{|k_1|^2|k_3|^2}(\beta_3^{2*}+k_{\parallel}^2)(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)(\beta_1^{2*}+k_{\parallel}^2)\\ &\times(e^{\iota\beta_3(z-d_3)}-r^{p}_{34}e^{-\iota\beta_3(z-d_3)})(e^{-\iota\beta_3^{*}(z-d_3)}+r^{p*}_{34}e^{\iota\beta_3^{*}(z-d_3)})\\ &(e^{-\iota\beta_1 z'}+r^{p}_{10}e^{\iota\beta_1 z'})(e^{\iota\beta_1^{*}z'}+r^{p*}_{10}e^{-\iota\beta_1^{*}z'})\}.\end{aligned} \quad (۸-۳)$$

اکنون با انجام محاسبات بالا برای مؤلفه عمودی بردار پویینتینگ، شار گرمایی تابشی تولید شده از چشمه‌های درون محیط ۱ در محیط ۳ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varphi_{1\to3}=\varphi^{e}_{1\to3}+\varphi^{m}_{1\to3}=\frac{\Theta(\omega,T_1)}{8\pi^3}\int d^2\mathrm{k}_{\parallel}\frac{|A|^2}{|\beta_3|^2|N_\lambda|^2}(\Upsilon_s+\Upsilon_p), \quad (۹-۳)$$

که در آن پارامتر Υ برای قطبش‌های مختلف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Upsilon_s = \mathrm{Re}[&|t^{s}_{32}|^2|t^{s}_{21}|^2\beta_3^{*}\mu_3[(1-|A_3|^2)\\ &(1+|A_3|^2|r^{s}_{34}|^2)+2\iota\,\mathrm{Im}[r^{s}_{34}(A_3^2-|A_3|^2)]]\\ &\times\{\frac{(1-|A_1|^2)(1+|A|^2|r^{s}_{10}|^2)}{2\beta_1''}[\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}[\varepsilon_1]\\ &+\frac{\mathrm{Im}[\mu_1]}{|\mu_1|^2}(|\beta_1|^2+k_{\parallel}^2)]+\frac{\mathrm{Im}[r^{s}_{10}(A_1^2-|A_1|^2)]}{\beta_1'}\\ &[\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}[\varepsilon_1]+\frac{\mathrm{Im}[\mu_1]}{|\mu_1|^2}(k_{\parallel}^2-|\beta_1|^2)]\},\end{aligned} \quad (۱۰-۳)$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_p = \mathrm{Re}[&|t^{p}_{32}|^2|t^{p}_{21}|^2\beta_3\mu_3\frac{(\beta_3^{*2}+k_{\parallel}^2)}{|k_1k_3|^2}\\ &[(1-|A_3|^2)(1+|A_3|^2|r^{p}_{34}|^2)-2\iota\,\mathrm{Im}[r^{p}_{34}(A_3^2-|\\ &A_3|^2)]]\times\{\frac{(1-|A_1|^2)(1+|A|^2|r^{p}_{10}|^2)}{2\beta_1''}[\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}[\varepsilon_1]\\ &(|\beta_1|^2+k_{\parallel}^2)+\frac{\mathrm{Im}[\mu_1]}{|\mu_1|^2}(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)(\beta_1^{*2}+k_{\parallel}^2)]+\\ &\frac{\mathrm{Im}[r^{p}_{10}(A_1^2-|A_1|^2)]}{\beta_1'}[\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{Im}[\varepsilon_1](k_{\parallel}^2-|\beta_1|^2)+\\ &\frac{\mathrm{Im}[\mu_1]}{|\mu_1|^2}(\beta_1^2+k_{\parallel}^2)(\beta_1^{*2}+k_{\parallel}^2)]\}.\end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

لازم به ذکر است که در روابط بالا از اتحاد $|t^{\lambda}_{31}|^2=\dfrac{|t^{\lambda}_{32}|^2|t^{\lambda}_{21}|^2\,e^{-2\beta_2''l}}{|1-r^{s}_{21}r^{s}_{23}\,e^{2\iota\beta_2 l}|^2}$ استفاده شده است. در نهایت نیز با کمک اتحادهای مهم زیر که در مرجع [۲۰] آمده‌اند و جایگذاری آنها در روابط بالا به روابط نهایی (۲۲) و (۲۳) در متن مقاله می‌رسیم.

$$(k_{\|}^{۲}+|\beta_{۱}|^{۲})\,\mathrm{Re}[\beta_{۱}]=k_{\circ}^{۲}(\mathrm{Re}[\mu_{۱}]\mathrm{Re}[\varepsilon_{۱}^{*}\beta_{۱}]+\mathrm{Im}[\mu_{۱}]\mathrm{Im}[\varepsilon_{۱}^{*}\beta_{۱}]),$$

$$(k_{\|}^{۲}-|\beta_{۱}|^{۲})\,\mathrm{Im}[\beta_{۱}]=k_{\circ}^{۲}(\mathrm{Re}[\mu_{۱}]\mathrm{Im}[\varepsilon_{۱}^{*}\beta_{۱}]-\mathrm{Im}[\mu_{۱}]\mathrm{Re}[\varepsilon_{۱}^{*}\beta_{۱}]), \qquad (۱۲\text{–}۳)$$

$$۲\,\mathrm{Re}[\beta_{۱}]\,\mathrm{Im}[\beta_{۱}]=k_{\circ}^{۲}\,\mathrm{Im}[\mu_{۱}\varepsilon_{۱}],$$

$$\mathrm{Re}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۱}^{s}|^{۲})+۲\,\mathrm{Im}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۱}^{s}]=\mathrm{Re}[\mu_{۱}^{*}\beta_{۱}]\,|t_{۲۱}^{s}|^{۲}\frac{|\mu_{۲}|^{۲}}{|\mu_{۱}|^{۲}},$$

$$\mathrm{Im}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۱}^{s}|^{۲})-۲\,\mathrm{Re}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۱}^{s}]=\mathrm{Im}[\mu_{۱}^{*}\beta_{۱}]\,|t_{۲۱}^{s}|^{۲}\frac{|\mu_{۲}|^{۲}}{|\mu_{۱}|^{۲}},$$

$$\mathrm{Re}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۳}^{s}|^{۲})+۲\,\mathrm{Im}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۳}^{s}]=\mathrm{Re}[\mu_{۳}^{*}\beta_{۳}]\,|t_{۲۳}^{s}|^{۲}\frac{|\beta_{۲}|^{۲}}{|\beta_{۳}|^{۲}},$$

$$\mathrm{Im}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۳}^{s}|^{۲})-۲\,\mathrm{Re}[\mu_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۳}^{s}]=\mathrm{Im}[\mu_{۳}^{*}\beta_{۳}]\,|t_{۲۳}^{s}|^{۲}\frac{|\beta_{۲}|^{۲}}{|\beta_{۳}|^{۲}}.$$

$$\mathrm{Re}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۱}^{p}|^{۲})+۲\,\mathrm{Im}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۱}^{p}]=\mathrm{Re}[\varepsilon_{۱}^{*}\beta_{۱}]\,|t_{۲۱}^{p}|^{۲}\frac{|n_{۲}|^{۲}}{|n_{۱}|^{۲}},$$

$$\mathrm{Im}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۱}^{p}|^{۲})-۲\,\mathrm{Re}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۱}^{p}]=\mathrm{Im}[\varepsilon_{۱}^{*}\beta_{۱}]\,|t_{۲۱}^{p}|^{۲}\frac{|n_{۲}|^{۲}}{|n_{۱}|^{۲}},$$

$$\mathrm{Re}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۳}^{p}|^{۲})+۲\,\mathrm{Im}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۳}^{p}]=\mathrm{Re}[\varepsilon_{۳}^{*}\beta_{۳}]\,|t_{۲۳}^{p}|^{۲}\frac{|\beta_{۲}|^{۲}}{|\beta_{۳}|^{۲}}\frac{|\varepsilon_{۲}|^{۲}}{|\varepsilon_{۳}|^{۲}}\frac{|n_{۳}|^{۲}}{|n_{۲}|^{۲}},$$

$$\mathrm{Im}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}](۱-|r_{۲۳}^{p}|^{۲})-۲\,\mathrm{Re}[\varepsilon_{۲}^{*}\beta_{۲}]\,\mathrm{Im}[r_{۲۳}^{p}]=\mathrm{Im}[\varepsilon_{۳}^{*}\beta_{۳}]\,|t_{۲۳}^{p}|^{۲}\frac{|\beta_{۲}|^{۲}}{|\beta_{۳}|^{۲}}\frac{|\varepsilon_{۲}|^{۲}}{|\varepsilon_{۳}|^{۲}}\frac{|n_{۳}|^{۲}}{|n_{۲}|^{۲}}. \qquad (۱۳\text{–}۳)$$

مراجع

1. Sh Shen, A Narayanaswamy, and G Che, *Nano Lett.* **9** (2009) 2909.
2. C M Hargreaves, *Phys. Lett. A* **30** (1969) 491.
3. D Polder and M V Hove, *Phys. Rev. B* **4** (1971) 3303.
4. J B Pendry, *J. Phys. Condens. Matter* **11** (1999) 6621.
5. J P Mulet, K Joulain, R Carminati, and J J Greffet, *Microscale Thermophys. Eng.* **6** (2002) 209.
6. K Joulain, J P, Mulet, F Marquier, R Carminati and J J Greffet, *Surf. Sci. Rep.* **57** (2005) 59.
7. C J Fu, Z M Zhang, *Int. J. Heat Mass Transfer* **49** (2006) 1703.
8. S Basu, Z M Zhang, and C J Fu, *Int. J. Energy Res.* **33** (2009), 1203.
9. S A Dyakov, J Dai, and M Yan, *Phys. Rev. B* **90** (2014) 045414.
10. G Domingues, S Volz, K Joulain, and J J Greffet, *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 085901.
11. A Narayanaswamy and G Chen, *Phys. Rev. B* **77** (2008) 075125.
12. G V Dedkov and A A Kyasov, J. *Comput. Theor. Nanosci.* **7** (2008) 2019.
13. A I Volokitin and B N J Persson, *Phys. Rev. B* **63** (2001) 205404.
14. Huth, F R uting, S A Biehs, and M Holthaus, *Phys. J. Appl. Phys.* **50** (2010) 1603.
15. M Kruger, T Emig and M Kardar, *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011) 210404.
16. M. Kruger, T. Emig, G. Bimonte and M Kardar, *Phys. Rev. B* **86** (2012) 115423.
17. K Park, S Basu, W P King and Z M Zhang, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **109** (2008) 305.
18. B Guha, C Otey, C B Poitras, Sh Fan, and M Lipson, *Nano Lett.* **9** (2012) 4546.
19. M Francoeur, M P Menguc, and R Vaillon, *Appl. Phys. Lett.* **93** (2008) 043109.
20. P Ben-Abdallah, K Joulain, J Drevillon, and G Domingues, *J. Appl. Phys.* **106** (2009) 044306.
21. K Joulain, J Drevillon and P Ben-Abdallah, *Phys. Rev. B* **81** (2010) 165119.
22. M Morshed Behbahani, E Amooghorban, and A Mahdifar, *Phys. Rev. A* **94** (2016) 013854.
23. M S Tomas, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 2545.
24. E Amooghorban, and F Kheirandish, *Phys. Rev. A* **84** (2010) 042901.
25. E Amooghorban, M Wubs, N A Mortensen, and F Kheirandish, *Phys. Rev.* A. **84** (2011) 013806.
26. J J Hopfield, *Phys. Rev.* **112** (1958) 1555.