

حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره

زهرا هیبتی گوجانی^۱، علی مهدی‌فر^۲ و احسان عموقربان^{۱،۳،۴}

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
۲. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، اصفهان
۳. گروه پژوهشی فوتونیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
۴. مرکز تحقیقات نانو تکنولوژی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

پست الکترونیکی: a.mahdifar@sci.ui.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۲۲؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۳۹۷/۱۰/۲۴)

چکیده

در این مقاله، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را با استفاده از دو رهیافت به دست می‌آوریم. در این دو رهیافت هم ارز، نوسانگر سطح کره را یک بار به صورت نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبه‌کن و بار دیگر به صورت نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبه‌کن در نظر گرفته و حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر متناظر را می‌سازیم. سپس اثر خمیدگی فضا را بر ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس ساخته شده با این دو رهیافت بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر- نوسانگر هماهنگ دوبعدی- ویژگی‌های اپتیک کوانتومی

۱. مقدمه

با نماد $|J, \gamma\rangle$ نشان داده شده و به حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مشهور هستند. با توجه به این‌که ساخت حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای هر سامانه کوانتومی دلخواه امکان‌پذیر است، این حالت‌ها تا کنون در مقالات گوناگونی مورد توجه و بررسی قرار گرفته‌اند [۷-۱۴]. از طرف دیگر، در مرجع [۱۵] یک نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح تخت و همچنین روی سطح کره بررسی شده است. با بررسی جبر نوسانگر دوبعدی روی سطح تخت نشان داده شده است که می‌توان این نوسانگر را توسط یک

حالت‌های همدوس که در سال ۱۹۲۶ توسط شرودینگر معرفی شدند [۱] امروزه در بسیاری از شاخه‌های فیزیک، فناوری‌های کوانتومی و به‌طور خاص در اپتیک کوانتومی کاربرد یافته‌اند [۲-۵]. از این‌رو، تلاش‌های روزافزونی برای تعمیم حالت‌های همدوس و کاربردهای آنها در سال‌های اخیر انجام گرفته است [۶].

یکی از تعمیم‌های مهم حالت‌های همدوس که توسط گازیو و کلاودر در سال ۱۹۹۹ معرفی شده‌اند، حالت‌هایی هستند که

دکارتی روی صفحه مماس بر کره است، بدین صورت که برای یافتن مختصات هر نقطه کره، از مرکز کره به نقطه مورد نظر شعاعی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا صفحه مماسی را قطع کند. مختصات دکارتی نقطه تقاطع در صفحه مماسی را به عنوان مختصات دکارتی نقطه مورد نظر روی کره در نظر می‌گیریم. استفاده از این دستگاه مختصات از این مزیت برخوردار است که حرکت ذره آزاد روی کره (حرکت یکنواخت روی یک دایره عظیمه از کره) در صفحه مماسی، روی یک خط مستقیم تصویر می‌شود. به عبارت دیگر، مدارهای حرکت ذره آزاد تصویر شده، همانند مدارهای حرکت ذره آزاد در هندسه اقلیدسی است و انحنای آنها روی سرعت تصویر شده اثر خواهد گذاشت [۱۵].

اگر مختصات دکارتی روی صفحه مماس بر کره را با x و y نشان دهیم، هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ دوبعدی کوانتومی روی سطح کره به صورت زیر به دست می‌آید [۱۵]:

$$\hat{H} = \frac{1}{\mu}(\hat{\pi}^2 + \lambda \hat{L}^2) + \frac{1}{\mu}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \quad (1)$$

که در آن $\lambda = \frac{1}{R^2}$ خمیدگی کره است و داریم:

$$\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{\lambda}{\mu}[\vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{p}) + (\vec{p} \cdot \vec{x})\vec{x}], \quad (2)$$

و

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{\mu} \hat{L}_{ij} \hat{L}_{ij}, \quad \hat{L}_{ij} = \hat{x}_i \hat{p}_j - \hat{x}_j \hat{p}_i. \quad (3)$$

ویژه مقادیر انرژی این نوسانگر دوبعدی روی سطح کره نیز به صورت زیر به دست می‌آید (با فرض $\hbar = \omega = 1$):

$$(e_n)_{sphere} \equiv \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}(n+1)} + \frac{\lambda}{\mu}(n+1)^2. \quad (4)$$

علاوه بر این، در مرجع [۱۶]، به منظور بررسی ارتباط میان تابع تغییر شکل f در جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته و ساختار هندسی فضای فیزیکی، جبر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره با جبر نوسانگر تغییر شکل یافته

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = (\hat{n}+1)f(\hat{n}+1)f^\dagger(\hat{n}+1) - \hat{n}f(\hat{n})f^\dagger(\hat{n}),$$

جبر نوسانگر یک بعدی تغییر شکل یافته نمایش داد. علاوه بر آن، جبر نوسانگر روی سطح کره نیز به عنوان تغییر شکل یافته جبر نوسانگر روی سطح تخت به دست می‌آید.

هدف ما در این مقاله ساخت و بررسی ویژگی‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره و بررسی اثر خمیدگی فضا بر حالت‌های مزبور است. بدین منظور ابتدا در بخش ۲ به بررسی نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره پرداخته و ویژه مقادیر انرژی تبهنگ این نوسانگر را به دست می‌آوریم. با مقایسه جبر این نوسانگر با جبر نوسانگر هماهنگ تغییر شکل یافته نشان می‌دهیم که نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را می‌توانیم به صورت یک نوسانگر تغییر شکل یافته یک بعدی نیز در نظر بگیریم. با این رهیافت ویژه مقادیر انرژی را می‌توان به صورت ناتبگن در نظر گرفت. بنابراین در ادامه، ابتدا نوسانگر سطح کره را به صورت یک نوسانگر یک بعدی تغییر شکل یافته ناتبگن در نظر می‌گیریم و در بخش ۳ حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مرتبط با این نوسانگر را از این رهیافت ساخته و ویژگی‌های اپتیک کوانتومی این حالت‌ها شامل شمارش فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلاننگی کوادراتوری را بررسی خواهیم کرد. سپس نوسانگر هماهنگ سطح کره را به صورت نوسانگر دوبعدی معمولی و در نتیجه دارای طیف تبهنگ در نظر می‌گیریم و در بخش ۴ حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر این نوسانگر را با این رهیافت نیز ساخته و ویژگی‌های اپتیک کوانتومی این حالت‌ها را بررسی خواهیم کرد. در این بخش، اثر خمیدگی فضا و همچنین وجود تبهنگی را بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس ساخته شده، بررسی خواهیم کرد. در انتها نیز به جمع‌بندی و نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

۲. نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره

دستگاه‌های مختصات متنوعی روی یک کره وجود دارند که تعمیم‌های مفیدی از دستگاه مختصات دکارتی هندسه اقلیدسی هستند. در اینجا ما از مختصات ژنومی (به زبان حرفه‌ای در کارتوگرافی) استفاده می‌کنیم [۱۵]. این مختصات، مختصات

۳.۱. تعریف حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر

سامانه‌های ناتبهگن

یک سامانه با هامیلتونی H و ویژه مقادیر انرژی گسسته و ناتبهگن e_n در نظر می‌گیریم. ویژه حالت‌های هامیلتونی سامانه بردارهای متعامدی هستند که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$H|n\rangle = e_n|n\rangle, \quad n \geq 0. \quad (7)$$

همچنین برای تعریف حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برقراری شرط $0 = e_0 < e_1 < e_2 < \dots$ ضروری است.

حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه‌ای با طیف

گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷ و ۱۸]:

$$|J, \gamma\rangle = N(J)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/\gamma} e^{-ie_n \gamma}}{\sqrt{[e_n]!}} |n\rangle, \quad (8)$$

با تعریف $[e_n]! \equiv e_n e_{2n} \dots e_n$ و با توجه به این‌که $[e_0]! = 1$ است، ضریب بهنجارش $N(J)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N(J)^\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{[e_n]!}. \quad (9)$$

دامنه γ به صورت $-\infty < \gamma < \infty$ بوده و دامنه J نیز، $0 \leq J \leq R$ است که در آن R شعاع همگرایی است و به صورت زیر داده می‌شود:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{[e_n]!}. \quad (10)$$

مطابق با تعریف گازیو- کلاودر حالتی را حالت همدوس می‌نامیم که چهار شرط زیر را داشته باشد [۱۷]:

(الف) پیوستگی در برچسب، یعنی اگر $(J, \gamma) \rightarrow (J', \gamma')$ میل کند، باید $|J, \gamma\rangle \rightarrow |J', \gamma'\rangle$.

(ب) برقرار بودن رابطه $\langle J, \gamma | d\mu(J, \gamma) | J, \gamma \rangle = 1$ ، که به رابطه تفکیک واحد موسوم است.

(ج) برقراری رابطه پایداری زمانی یعنی رابطه $e^{-itH} |J, \gamma\rangle = |J, \gamma + \omega t\rangle$.

(د) برقرار بودن رابطه کنش واحد یعنی رابطه $\langle J, \gamma | H | J, \gamma \rangle = \omega J$.

$$[\hat{A}, \hat{n}] = \hat{A}, \quad (5)$$

$$[\hat{A}^\dagger, \hat{n}] = -\hat{A}^\dagger,$$

مقایسه و نشان داده شده است که نوسانگر دوبعدی مزبور را می‌توان به عنوان نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تغییر شکل یافته با تابع تغییر شکل:

$$f_S(n) = \sqrt{(N+1-n)} \times \sqrt{\left[\lambda(N+1-n) + \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4}} \right] \left[\lambda n + \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4}} \right]}, \quad (6)$$

در نظر گرفت که در اینجا N بعد فضای فوک متناهی الابعاد مربوط به جبر نوسانگر هماهنگ روی سطح کره است.

در این مقاله، دو نوع حالت همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه نوسانگر دوبعدی سطح کره با دو رهیافت متفاوت به دست می‌آوریم. در ابتدا در بخش ۳، نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را به صورت یک نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته در نظر می‌گیریم که در این صورت سامانه به عنوان یک سامانه ناتبهگن در خواهد آمد. سپس در بخش ۴ آن را به صورت یک نوسانگر دوبعدی غیر تغییر شکل یافته در نظر می‌گیریم که در این صورت سامانه به عنوان یک سامانه تبهگن بررسی خواهد شد.

۳. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر

یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبهگن سطح کره

در این بخش ابتدا به معرفی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه‌های دارای طیف ناتبهگن می‌پردازیم. سپس حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره را برای طیف انرژی ناتبهگن می‌سازیم و در ادامه ویژگی‌های اپتیک کوانتومی آنها از جمله تعداد متوسط فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلانگی حالت‌های مزبور را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حال برای ساختن حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ تغییر شکل یافته سطح کره، e'_n و $[e'_n]$ را در رابطه کلی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر طیف گسسته، رابطه (۸)، جایگذاری می‌کنیم،

$$|J, \gamma\rangle = \frac{[\Gamma(\mu+1)]^{1/2}}{N(J)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/2} e^{-ian(n+\mu)\gamma}}{[\alpha^n n! \Gamma(n+\mu+1)]^{1/2}} |n\rangle. \quad (15)$$

ضریب بهنجارش $N(J)$ نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N^2(J) = \Gamma(\mu+1) \frac{I_\mu(\sqrt{2}\sqrt{J/\alpha})}{(J/\alpha)^{\mu/2}}, \quad (16)$$

که در آن I_μ تابع بسل تغییر شکل یافته نوع اول است [۱۹]. به سادگی می‌توان نشان داد که رابطه بالا دارای هر چهار ویژگی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر است.

۳.۳. ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس

گازیو- کلاودر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته

پس از ساخت ریاضی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبهنگ روی سطح کره، در این قسمت خواص اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور را بررسی خواهیم کرد.

الف) شمار میانگین و آمار شمارش فوتونها

یکی از ویژگی‌های مهم حالت‌های همدوس که در این بخش مورد توجه قرار می‌دهیم تابع توزیع احتمال فوتونی آنهاست. شمار میانگین فوتونها در حالت $|J, \gamma\rangle$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle J, \gamma | \hat{a}^\dagger \hat{a} | J, \gamma \rangle = \frac{(J/\alpha)^{\mu/2}}{I_\mu(\sqrt{2}\sqrt{J/\alpha})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n n}{\alpha^n n! \Gamma(n+\mu+1)}. \quad (17)$$

در شکل ۱ شمار میانگین فوتونها برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مزبور برحسب λ برای مقادیر مختلف J و

به سادگی دیده می‌شود که حالت‌های همدوس (۸) هر چهار ویژگی بالا را دارند.

از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر، برای سامانه نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی، به تعریف حالت‌های همدوس استاندارد تبدیل می‌شود [۱۷]. از این رو، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر را می‌توان تعمیم حالت‌های همدوس استاندارد به سامانه‌های متفاوت با نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی در نظر گرفت.

۳.۲. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر

یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبهنگ سطح کره

همان‌گونه که در بخش ۲ بیان شد، می‌توان نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره را به عنوان یک نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبهنگ با ویژه مقادیر انرژی (۴) در نظر گرفت. در این بخش حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه مزبور را با این رهیافت به دست می‌آوریم.

با استفاده از تغییر متغیرهای $\frac{\lambda}{\gamma} = \alpha$ و $\sqrt{1+\alpha^2} = \beta$ ،

ویژه مقادیر انرژی (۴) به شکل زیر بیان می‌شوند:

$$e_n = (n+1)[\beta + \alpha(n+1)]. \quad (11)$$

چون $e_0 = \alpha + \beta \neq 0$ است و برای تعریف حالت‌های همدوس باید انرژی حالت پایه صفر باشد، ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$e'_n \equiv e_n - e_0 = \alpha n \left[n + \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]. \quad (12)$$

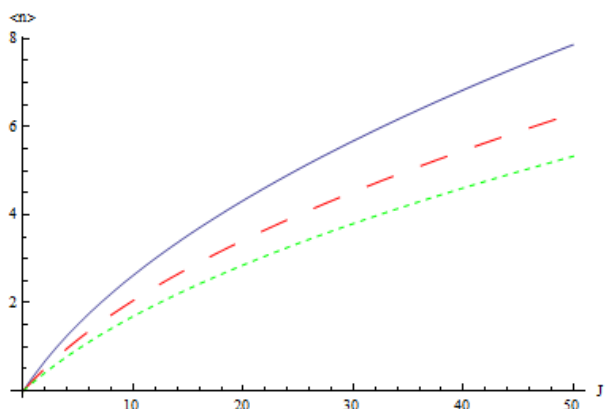
با استفاده از تغییر متغیر $\mu = \gamma + \frac{\beta}{\alpha}$ رابطه بالا به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$e'_n = \alpha n(n + \mu), \quad (13)$$

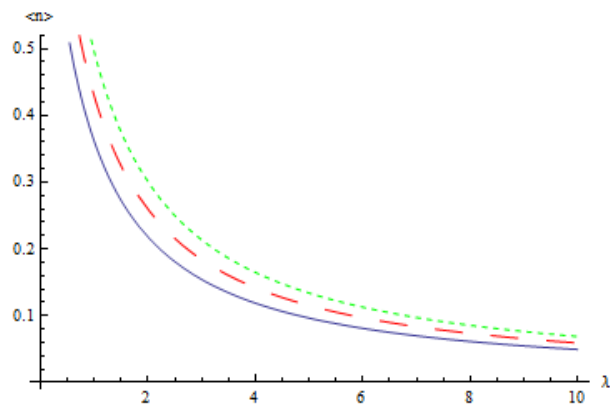
بنابراین داریم

$$[e'_n]! = \frac{\alpha^n n! \Gamma(n + \mu + 1)}{\Gamma(1 + \mu)}, \quad (14)$$

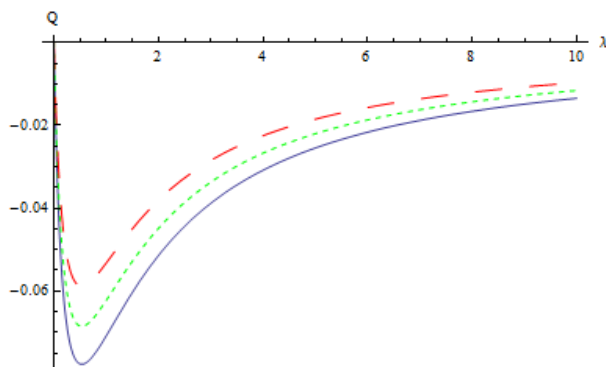
که در آن از این ویژگی تابع گاما یعنی، $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ ، استفاده کرده‌ایم.



شکل ۲. (رنگی در نسخه الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره برحسب J به ازای $N=500$ برای $\lambda=1$ (خط توپر)، $\lambda=1/5$ (خط چین)، $\lambda=2$ (نقطه چین).



شکل ۱. (رنگی در نسخه الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر سطح کره برحسب λ به ازای $N=200$ برای $J=1$ (خط توپر)، $J=1/2$ (خط چین)، $J=1/4$ (نقطه چین).



شکل ۳. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پارامتر مندل برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره برحسب λ به ازای $N=200$ برای $J=1$ (خط چین)، $J=1/2$ (نقطه چین)، $J=1/4$ (خط توپر).

را مورد بررسی قرار دهیم.

مقادیر مثبت، صفر و منفی پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی، آمار پواسونی و آمار زیرپواسونی است. در شکل ۳ اثر انحنای فضا بر پارامتر مندل حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره برای مقادیر مختلف J نشان داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود افزایش λ در ابتدا باعث تقویت سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس کره می‌شود و سپس افزایش خمیدگی فضای فیزیکی سبب کاهش ویژگی زیرپواسونی می‌شود. علاوه بر این، با افزایش J نیز، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود.

همچنین در شکل ۲ شمار میانگین فوتون‌ها برحسب J برای λ های مختلف رسم شده است. همان طور که از این دو شکل دیده می‌شود، با افزایش J ، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش می‌یابد. علاوه بر این افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره نیز باعث کاهش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود.

ب) پارامتر مندل

برای مطالعه آمار فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره لازم است پارامتر مندل [۲۰] یعنی

$$Q = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (18)$$

ج) چلانگی

به سادگی می توان نشان داد که رابطه (۲۱) را می توان به

صورت زیر بازنویسی کرد:

$$S_{1a} = [2\langle \hat{n} \rangle + 2|\langle \hat{a}^2 \rangle| \cos(2\varphi) - (2|\langle \hat{a} \rangle| \cos \varphi)^2], \quad (22)$$

$$S_{2a} = -[2|\langle \hat{a}^2 \rangle| \cos(\theta + 2\varphi) + 4|\langle \hat{a} \rangle| \times \cos^2(\psi + 2\varphi) - 2\langle \hat{n} \rangle]. \quad (23)$$

که در آنها از تعریف های $\langle \hat{a}^2 \rangle = |\langle \hat{a}^2 \rangle| e^{i\theta}$ و $\langle \hat{a} \rangle = |\langle \hat{a} \rangle| e^{i\psi}$ استفاده شده است.

مقادیر چشمداشتی $\langle \hat{a} \rangle$ و $\langle \hat{a}^2 \rangle$ نیز برای حالت های همدوس گازیو- کلاودر سطح کره به شکل زیر به دست می آیند:

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle J, \gamma | \hat{a} | J, \gamma \rangle = \frac{(J/\alpha)^{\frac{\mu}{2}}}{I_{\mu}(\sqrt{2J/\alpha})} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} J^{(n-1/2)} e^{-i\gamma\alpha[n(n+\mu)-(n-1)(n-1+\mu)]}}{[\alpha^n n! \Gamma(n+\mu+1)]^{1/2} [\alpha^{n-1} (n-1)! \Gamma(n+\mu)]^{1/2}}, \quad (24)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle J, \gamma | \hat{a}^2 | J, \gamma \rangle = \frac{(J/\alpha)^{\frac{\mu}{2}}}{I_{\mu}(\sqrt{2J/\alpha})} \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n-1)} J^{n-1} e^{-i\gamma\alpha[n(n+\mu)-(n-2)(n-2+\mu)]}}{[\alpha^n n! \Gamma(n+\mu+1)]^{1/2} [\alpha^{n-2} (n-2)! \Gamma(n+\mu-1)]^{1/2}}. \quad (25)$$

اکنون با جایگذاری رابطه (۱۷) و روابط بالا در روابط (۲۲) و (۲۳)، شکل نهایی روابط S_{1a} و S_{2a} به دست می آید.

با توجه به پیچیدگی این روابط، در شکل ۴ توابع $S_1(\varphi)$ و $S_2(\varphi)$ برحسب φ برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همان گونه دیده می شود در φ هایی که چلانگی رخ می دهد، افزایش خمیدگی کره سبب افزایش چلانگی شده است.

۴. حالت های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره

در این بخش حالت های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی سطح کره را از رهیافت دوم به دست خواهیم آورد. در این رهیافت نوسانگر سطح کره را به صورت دوبعدی و بدون تغییر شکل در نظر می گیریم. بدین منظور، ابتدا حالت های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه های دارای

در این بخش به بررسی نوبه های کوانتومی مؤلفه های کوادراتوری میدان نسبت به حالت های همدوس می پردازیم. بدین منظور \hat{x}_{1a} و \hat{x}_{2a} را در نظر می گیریم که به صورت زیر برحسب عملگرهای خلق و نابودی تعریف می شوند [۲۱]:

$$\hat{x}_{1a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}e^{i\varphi} + \hat{a}^{\dagger}e^{-i\varphi}), \quad (19)$$

$$\hat{x}_{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\hat{a}e^{i\varphi} - \hat{a}^{\dagger}e^{-i\varphi}). \quad (20)$$

با استفاده از رابطه جابه جایی بین \hat{a} و \hat{a}^{\dagger} به رابطه عدم قطعیت $(\Delta x_{1a})^2 (\Delta x_{2a})^2 \geq \frac{1}{16} |\langle [\hat{x}_{1a}, \hat{x}_{2a}] \rangle|^2 = \frac{1}{16}$ می رسیم.

اکنون، بنا به تعریف اگر برای حالت میدان، رابطه

$$(\Delta x_{ia})^2 < \frac{1}{4}$$

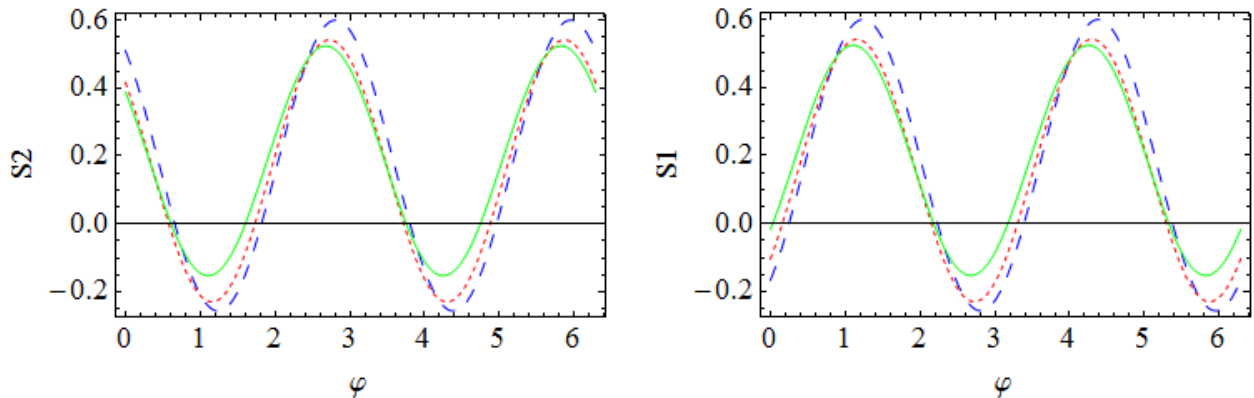
$$S_{ia} \equiv 4(\Delta x_{ia})^2 - 1 < 0, \quad (21)$$

برقرار باشد ($i=1$ or 2)، آن گاه حالت مزبور یک حالت چلانده است. بنابراین، برای حالت چلانده افت و خیزهای کوانتومی یکی از مؤلفه های کوادراتوری میدان نسبت به مقدار مربوط به حالت با کمینه حاصل ضرب نامعینی کاهش می یابد. این به بهای افزایش افت و خیزهای کوانتومی مؤلفه های کوادراتوری دیگر میدان خواهد بود، به طوری که اصل عدم قطعیت همچنان پا بر جا می ماند. حالت های چلانده میدان فاقد همتهای کلاسیکی هستند. از این رو، به عنوان دسته ای از حالت های غیرکلاسیک میدان به حساب می آیند [۲۲]. به منظور دستیابی به درک روشن تری از حالت های چلانده میدان خاطر نشان می کنیم که وردایی مؤلفه های کوادراتوری حالت های همدوس استاندارد و حالت خلأ میدان تابشی مساوی $\frac{1}{4}$ است

$$[22], \text{ یعنی } (\Delta x_{ia})_{Coh}^2 = (\Delta x_{ia})_{vac}^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{است که } (\Delta x_{ia})_{sq}^2 < (\Delta x_{ia})_{Coh,vac}^2.$$

رابطه اخیر، کاهش افت و خیزهای کوانتومی حالت های چلانده را نسبت به حالت همدوس استاندارد و حالت خلأ میدان نشان می دهد.



شکل ۴. (رنگی در نسخه الکترونیکی) نمودارهای $S_p(\varphi)$ و $S_q(\varphi)$ برحسب φ به ازای $J=1$ و $\gamma=0.1$ و $N=200$ برای $\lambda=0.14$ (خط توپر)، $\lambda=0.15$ (نقطه چین)، $\lambda=0.16$ (خط چین).

$$|n, d_n, \eta_n\rangle_D = \sum_{p_n=0}^{d_n-1} e^{ip_n \eta_n} |n, p_n\rangle, \quad (28)$$

داریم:

$${}_D\langle n, d_n, \eta_n | m, d_m, \eta_m \rangle_D = d_n \delta_{nm}. \quad (29)$$

در نهایت، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر برای سامانه تبهگن مزبور به صورت رابطه زیر تعمیم داده می‌شود [۲۳]:

$$|J, \gamma, \eta\rangle = N(J)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/2} e^{-i\rho_n \gamma}}{\sqrt{[\rho_n]!}} |n, d_n, \eta_n\rangle_D, \quad (30)$$

که در آن مجموعه فازهای $\{\eta_n, n \in N\}$ با بردار η نشان داده شده است و ضرب بهنجارش نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$N(J)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n J^n}{[\rho_n]!}. \quad (31)$$

از طرف دیگر، عملگرهای آفرینش و نابودی را برای یک سامانه کوانتومی تبهگن می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\hat{A}_D = \sqrt{H_{\rho_{n+1}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_{n+1}} |n, d_n, \eta_n\rangle \langle n+1, d_{n+1}, \eta_{n+1}|, \quad (32)$$

$$\hat{A}_D^\dagger = \sqrt{H_{\rho_n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_{n+1}} |n+1, d_{n+1}, \eta_{n+1}\rangle \langle n, d_n, \eta_n|, \quad (33)$$

که در آنها H_{ρ_n} و $H_{\rho_{n+1}}$ با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$H_{\rho_n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n}{d_n} |n, d_n, \eta_n\rangle \langle n, d_n, \eta_n|, \quad (34)$$

طیف تبهگن را معرفی می‌کنیم. سپس حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره را می‌سازیم و در ادامه ویژگی‌های اپتیک کوانتومی آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴.۱. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های تبهگن

در این بخش سامانه‌ای با هامیلتونی H_d و ویژه مقادیر انرژی تبهگن زیر را در نظر می‌گیریم:

$$e_0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_{n-1} \leq e_n \leq \dots, \quad (26)$$

ویژه حالت‌های انرژی را به صورت $\{|\psi_n\rangle\}$ بیان می‌کنیم. ترازهای انرژی مزبور را می‌توان به شکل زیر دسته‌بندی کرد:

$$\rho_0 = 0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{n-1} < \rho_n < \dots, \quad (27)$$

که در آن، انرژی ρ_n به اندازه d_n بار در سامانه تکرار شده است و طیف انرژی به گونه‌ای جابه‌جا شده تا انرژی حالت پایه برابر صفر شود. دیده می‌شود که اگر $\{\forall n: d_n = 1\}$ باشد، سامانه مورد نظر دیگر تبهگن نخواهد بود.

در ادامه از d_n ویژه حالت تبهگن و نامتعامل دارای انرژی ρ_n ، یک پایه متعامد و بهنجار $\{|n, p_n\rangle, p_n = 0, 1, \dots, d_n-1\}$ را انتخاب می‌کنیم. علاوه بر این، برای هر n ، یک فاز η_n نیز معرفی می‌شود که در بازه $[0, 2\pi]$ قرار دارد. حال اگر به ازای هر انرژی ρ_n ، یک حالت به صورت بر هم نهی از حالت‌های $|n, p_n\rangle$ به شکل زیر تعریف کنیم:

کلی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن روی سطح کره به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|J, \gamma, \eta\rangle = \frac{[\Gamma(\mu+1)]^{1/2}}{N(J)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^{n/2} e^{-ian(n+\mu)\gamma}}{[\alpha^n n! \Gamma(n+\mu+1)]^{1/2}} |n, d_n = n+1, \eta\rangle_D, \quad (43)$$

که در آن ضریب بهنجارش با رابطه زیر داده می‌شود:

$$N^2(J) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{(J/\alpha)^{\mu/2}} \left[\frac{\partial}{\partial(J/\alpha)} + 1 - \frac{\mu}{2} \right] I_{\mu} \left(2\sqrt{J/\alpha} \right). \quad (44)$$

۴.۳. ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس

گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن روی سطح کره

پس از ساخت ریاضی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره، در این قسمت ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور را بررسی می‌کنیم. بدین منظور، ابتدا ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه دارای طیف انرژی تبهگن از جمله پارامتر مندل، خواص فازی و چلانگی عددی- فازی را بررسی می‌کنیم. سپس ویژگی‌های غیرکلاسیکی مزبور را برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره به دست خواهیم آورد.

۴.۳.۱. ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های همدوس

گازیو- کلاودر برای سامانه‌ای دارای طیف انرژی

تبهگن

پارامتر مندل: برای سامانه دارای طیف انرژی تبهگن، عملگر عددی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$\hat{N}_D \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{d_n} |n, d_n, \eta_n\rangle \langle n, d_n, \eta_n|. \quad (45)$$

به سادگی دیده می‌شود که داریم:

$$\hat{N}_D |n, d_n, \eta_n\rangle = n |n, d_n, \eta_n\rangle. \quad (46)$$

بنابراین پارامتر مندل تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$H_{\rho_{n+1}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{n+1}}{d_n} |n, d_n, \eta_n\rangle \langle n, d_n, \eta_n|. \quad (35)$$

با محاسبات ساده می‌توان نشان داد که روابط زیر برقرارند:

$$\hat{A}_D |n, d_n, \eta_n\rangle = \sqrt{\rho_n} |n-1, d_{n-1}, \eta_{n-1}\rangle, \quad (36)$$

$$\hat{A}_D^\dagger |n, d_n, \eta_n\rangle = \frac{d_n}{d_{n+1}} \sqrt{\rho_{n+1}} |n+1, d_{n+1}, \eta_{n+1}\rangle. \quad (37)$$

به سادگی می‌توان دید که حالت همدوس گازیو- کلاودر (۳۰) ویژه حالت عملگر نابودی (۳۶) است:

$$\hat{A}_D |J, \gamma, \eta\rangle = J^{1/2} |J, \gamma, \eta\rangle. \quad (38)$$

۴.۲. حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر

دوبعدی روی سطح کره برای طیف انرژی تبهگن

در بخش قبل روش ساخت حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های تبهگن را بررسی کردیم. در این بخش حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر مرتبط با نوسانگر هماهنگ دوبعدی تبهگن روی سطح کره را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن تعداد تبهگنی d_n در ویژه مقادیر انرژی (۴)، ابتدا یک نوسانگر دوبعدی روی سطح تخت در نظر می‌گیریم. انرژی این نوسانگر با استفاده از رابطه (۴) و قرار دادن $\lambda = 0$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$e_n = (n+1). \quad (39)$$

به وضوح دیده می‌شود که این انرژی از ترکیب انرژی دو نوسانگر مستقل از یکدیگر به شکل زیر به دست آمده است:

$$e_n = e_{n_1} + e_{n_2} = \left(n_1 + \frac{1}{4}\right) + \left(n_2 + \frac{1}{4}\right) = (n_1 + n_2) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right). \quad (40)$$

از این رو به سادگی دیده می‌شود که برای هر مقدار از n به اندازه

$$d_n = n+1 \quad (41)$$

تبهگنی وجود دارد. برای سامانه نوسانگر دوبعدی تبهگن با توجه به رابطه (۴) و شرط صفر شدن ρ داریم:

$$\rho_n = \alpha n(n+\mu). \quad (42)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۴۱) و (۴۲) در رابطه (۳۰)، شکل

$$\langle (\Delta \phi_{\theta}^D)^{\dagger} \rangle \langle (\Delta N_D)^{\dagger} \rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{N}_D, \hat{\phi}_{\theta}^D] \rangle \right|^2, \quad (55)$$

همچنین داریم [۳۰]:

$$[\hat{N}_D, \hat{\phi}_{\theta}^D] = i[1 - 2\pi P_D(\theta)]. \quad (56)$$

عدم قطعیت فازی و عددی برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر سامانه‌های تبهگن (۳۰) نیز با رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \phi_{\theta}^D)^{\dagger} \rangle &= \int \theta^{\dagger} P_D(\theta) d\theta - \left(\int \theta P_D(\theta) d\theta \right)^{\dagger} \\ &= \frac{\pi^{\dagger}}{3} + 2N(J)^{-1} \sum_n \sum_{k < n} \sqrt{\frac{d_n d_k}{[\rho_n]! [\rho_k]!}} \\ &\quad \times J^{n/2} J^{*k/2} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^{\dagger}}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta N_D)^{\dagger} \rangle &= \langle \hat{N}_D^{\dagger} \rangle - \langle \hat{N}_D \rangle^{\dagger} = N(J)^{-1} \\ &\quad \times \sum_n n^{\dagger} \frac{|z|^{\dagger n}}{[\rho_n]!} d_n - \left[N(J)^{-1} \sum_n n \frac{J^n}{[\rho_n]!} d_n \right]^{\dagger}. \end{aligned} \quad (58)$$

برای بررسی چلانگی مؤلفه‌های عددی یا فازی، پارامترهای چلانگی عددی و فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_N = \frac{2 \langle (\Delta N_D)^{\dagger} \rangle}{|\langle [\hat{N}_D, \hat{\phi}_{\theta}^D] \rangle|} - 1, \quad (59)$$

$$S_{\phi} = \frac{2 \langle (\Delta \phi_{\theta}^D)^{\dagger} \rangle}{|\langle [\hat{N}_D, \hat{\phi}_{\theta}^D] \rangle|} - 1. \quad (60)$$

از این‌رو، اگر $S_N < 0$ ($S_{\phi} < 0$) باشد، آنگاه حالت همدوس مورد نظر دارای چلانگی در عملگر عددی (فازی) خواهد بود. در ادامه، ویژگی‌های غیرکلاسیکی بیان شده را برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن روی سطح کره به دست می‌آوریم.

الف) شمار میانگین و آمار شمارش فوتونها

شمار میانگین فوتونها در این حالت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle \hat{N}_D \rangle &\equiv \langle J, \gamma, \eta | \hat{N}_D | J, \gamma, \eta \rangle = \frac{\Gamma(\mu+1)}{N(J)^{\dagger}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{[\alpha^n n! (n+\mu)!]} n(n+1). \end{aligned} \quad (61)$$

$$Q_D = \frac{\langle \hat{N}_D^{\dagger} \rangle - \langle \hat{N}_D \rangle^{\dagger}}{\langle \hat{N}_D \rangle} - 1. \quad (47)$$

ویژگی‌های فازی و چلانگی عددی- فازی

بر اساس فرمول‌بندی پگ-بارنت، در یک فضای هیلبرت با بعد متنهایی $(s+1)$ ، مجموعه‌ای متعامد از حالت‌های فازی $\{|\theta_m\rangle, m=0,1,\dots,s\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۶ و ۲۷]:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (48)$$

که در آن داریم:

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad (49)$$

و θ_0 نیز مقداری دلخواه است.

بر اساس تعریف حالت فازی (۴۸)، عملگر فازی هرمیتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\phi}_{\theta}^D = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (50)$$

از طرف دیگر، برای یک سامانه دارای طیف تبهگن نیز، حالت فازی و عملگر فازی به صورت زیر تعمیم داده می‌شوند:

$$|\theta_m\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \frac{e^{in\theta_m}}{\sqrt{d_n}} |n, d_n\rangle, \quad (51)$$

$$\hat{\phi}_{\theta}^D = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle_D \langle \theta_m|. \quad (52)$$

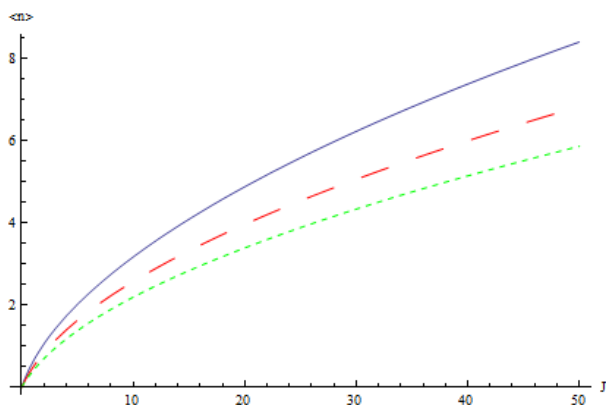
از این‌رو، توزیع احتمال فازی پگ-بارنت برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر (۳۰) مربوط به سامانه تبهگن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_D(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2\pi} \left| \langle \theta_m | J, \gamma, \eta \rangle \right|^2. \quad (53)$$

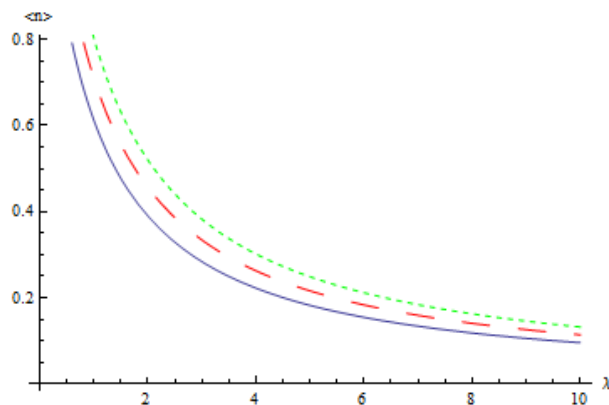
با جایگذاری روابط (۳۰) و (۵۱) در رابطه (۵۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} P_D(\theta) &= \frac{1}{2\pi} (1 + 2N(J)^{-1}) \\ &\quad \times \sum_n \sum_{k < n} \sqrt{\frac{d_n d_k}{[\rho_n]! [\rho_k]!}} z^n z^{*k} \cos[(n-k)\theta], \end{aligned} \quad (54)$$

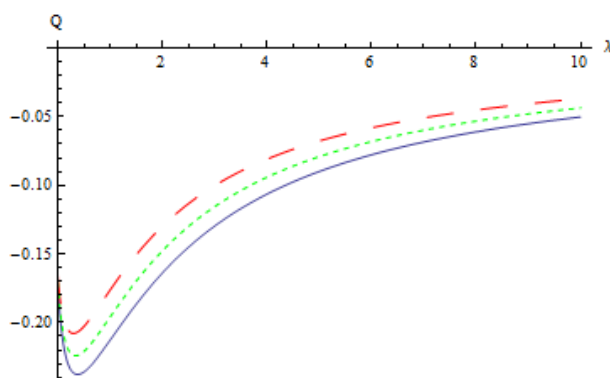
از طرف دیگر، بر طبق اصل عدم قطعیت، عملگرهای فازی و عددی در رابطه زیر صدق می‌کنند:



شکل ۶. (رنگی در نسخه الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره برحسب J به ازای $N=500$ برای $J=1$ (خط توپر)، $J=1/5$ (خط چین)، $J=2$ (نقطه چین).



شکل ۵. (رنگی در نسخه الکترونیکی) شمار میانگین فوتون‌های حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره برحسب J به ازای $N=200$ برای $J=1$ (خط توپر)، $J=1/2$ (خط چین)، $J=1/4$ (نقطه چین).



شکل ۷. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پارامتر مندل برای حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره بر حسب J به ازای $N=200$ برای $J=1$ (خط چین)، $J=1/2$ (نقطه چین)، $J=1/4$ (خط توپر).

بررسی می‌کنیم.

در شکل ۷ اثر انحنای فضای فیزیکی بر پارامتر مندل برای مقادیر مختلف J نشان داده شده است. همان گونه که دیده می‌شود افزایش J ، در ابتدا باعث تقویت سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس کره می‌شود و سپس افزایش خمیدگی فضای فیزیکی سبب کاهش ویژگی زیرپواسونی می‌شود. علاوه بر این، با افزایش J ، نیز، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود.

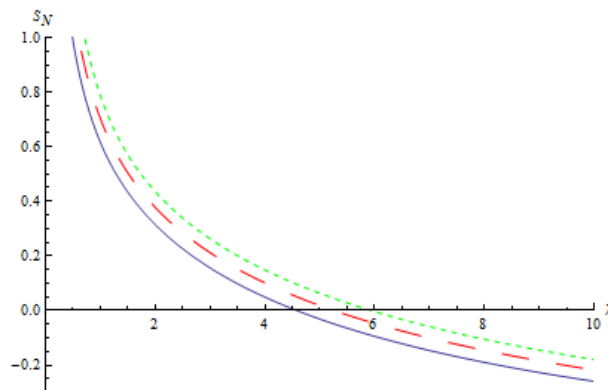
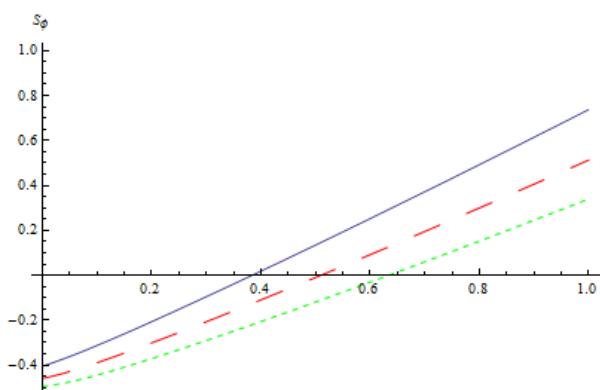
ج) چلانگی

در این بخش، با جایگذاری تعریف حالت‌های همدوس

در شکل ۵ شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی سطح کره بر حسب J به ازای مقادیر مختلف J و همچنین در شکل ۶ شمار میانگین فوتون‌ها بر حسب J برای J ‌های مختلف رسم شده است. همان طور که دیده می‌شود، با افزایش J ، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش می‌یابد. علاوه بر آن، افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره باعث کاهش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود.

ب) پارامتر مندل

برای مطالعه آمار فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره پارامتر مندل (۴۷) را



شکل ۸. (رنگی در نسخه الکترونیکی) پارامتر چلانندی برای حالت همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی روی سطح کره بر حسب λ به‌ازای $N=100$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ برای $J=1/4$ (خط توپر)، $J=1/6$ (خط چین)، $J=1/8$ (نقطه چین).

چلانندی کوادراتوری محاسبه و اثر خمیدگی فضای فیزیکی بر ویژگی‌های حالت‌های همدوس ساخته شده بررسی شد. نتایج نشان داد که افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره باعث کاهش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود. همچنین با افزایش پارامتر J ، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش پیدا می‌کند. علاوه بر این مشاهده شد که افزایش خمیدگی فضای فیزیکی، در ابتدا باعث تقویت سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس کره می‌شود و سپس با افزایش بیشتر خمیدگی، ویژگی زیرپواسونی کاهش می‌یابد. افزایش J نیز، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها را تقویت می‌کند. در انتها نیز دیده شد که در نواحی که چلانندی رخ می‌دهد، افزایش خمیدگی کره سبب افزایش چلانندی کوادراتوری و همچنین عملگر عددی شده است. از طرف دیگر مقایسه نمودارهای حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر دوبعدی تبهگن با نوسانگر یک‌بعدی تغییر شکل یافته ناتبهگن نشان می‌دهد که با این که رفتار کلی حالت‌های همدوس به دست آمده از این دو رهیافت، با توجه به نمودارهای شمار میانگین و پارامتر مندل، یکسان است، تبهگنی باعث افزایش شمار میانگین و تضعیف سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌های حالت‌های همدوس مزبور شده است.

نوسانگر هماهنگ دوبعدی تغییر شکل یافته، رابطه (۴۳)، در روابط (۵۹) و (۶۰) چلانندی در عملگر عددی و عملگر فازی را به دست می‌آوریم.

در شکل ۸ نمودارهای S_ϕ و S_N بر حسب λ برای مقادیر مختلف J رسم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، مقدار پارامتر چلانندی S_N با افزایش J افزایش و با افزایش λ کاهش می‌یابد. از این‌رو، افزایش خمیدگی فضا سبب افزایش چلانندی در عملگر عددی شده در حالی که افزایش پارامتر J چلانندی عملگر عددی را کاهش می‌دهد. همچنین دیده می‌شود که در عملگر فازی این روند برعکس اتفاق می‌افتد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از بررسی نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره، حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره با دو رهیافت متفاوت ساخته شد. در رهیافت نخست، سامانه مزبور به صورت نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی تغییر شکل یافته با طیف انرژی ناتبهگن در نظر گرفته شد. در رهیافت دوم، سامانه به صورت نوسانگر هماهنگ دوبعدی با طیف انرژی تبهگن بررسی شد. همچنین ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر نوسانگر کره از جمله میانگین شمارش فوتون‌ها، پارامتر مندل و

مراجع

13. A H El Kinani and M Daoud, *Int. J. Mod. Phys. B* **16** (2002) 3915.
14. A H El Kinani and M Daoud, *Int. J. Mod. Phys. B* **15** (2003) 2465.
15. P W Higgs, *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** (1979) 309.
16. A Mahdifar, R Roknizadeh and M H Naderi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 7003.
17. J P Gazeau and R Klauder, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999).
18. R Roknizadeh, M K Tavassoly, *J. Math. Phys.* **46** (2005) 042110.
19. I S Gradshteyn, I M Ryzhik, *Table of Integrals and Series*, Academic Press (1980).
20. L Mandel and E Wolf, "*Optical Coherence and Quantum Optics*", Cambridge University Press, Cambridge (1995).
21. M O Scully and M S Zubairy, "*Quantum optics*", Cambridge University Press, Cambridge (1997).
22. G S Agarwal and K Tara, *Phys. Rev. A* **43** (1991) 429.
23. L Dello Sbarba and V Hussin, *J. Math. Phys.* **48** (2007) 012110.
24. G R Honarasa, M K Tavassoly, M Hatami and R Roknizadeh, *Physica A* **390** (2011) 1381.
25. L Mandel, *Opt. Lett.* **4** (1979) 205.
26. D T Pegg and S M Barnett, *Phys. Rev. A* **39** (1989) 1665.
27. G.R. Honarasa, M.K. Tavassoly, M. Hatami, *Optics Communications* **282** (2009) 2192.
1. ع. مهدی فر، «ساختار هندسی حالت‌های همادوس غیر خطی»، پایان‌نامه دکتری، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان (۱۳۸۶).
2. J R Klauder and B S Skagerstam, "*Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics Singapore*", World Scientific (1985).
3. S Twareqe Ali, J-P Antoine, and J-P Gazeau, "*Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*", Springer-Verlag, New York, (2000).
4. P Deuar and P D Drummond, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 033812.
5. C C Chong, D I Tsomokos, and A Vourdas, *Phys. Rev. A* **66** (2002) 033813.
6. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys. A* **37** (2004) 5649.
7. J-P Gazeau and J R Klauder, *J. Phys. A* **32** (1999) 123.
8. J-P Gazeau and P Monceau, "*Generalized Coherent States for Arbitrary Quantum Systems*", Klauder Academic Publishers, Printed in the Netherlands (2000)..
9. R Roknizadeh and M K Tavassoly, *J. Phys. A* **37**, (2004) 8111.
10. D Popov, *Phys. Lett. A* **316** (2003) 369.
11. J-P Antoine, J-P Gazeau, J R Klauder, P Monceau, and K A Penson, *J. Math. Phys.* **42** (2001) 2349.
12. A H El Kinani and M Daoud, *J. Math. Phys.* **35** (2001) 2279, *J. Phys. A* **34** (2001) 5373.