

## تأثیر میدان کلاسیکی بر دینامیک درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازی در حال برهم‌کنش با دو کاواک اتلافی

علیرضا نورمندی پور

دانشکده علوم، گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان

پست الکترونیکی: anourmandip@sirjantech.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۰۵؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۲/۰۱/۰۸)

### چکیده:

در این مقاله، ابتدا یک سامانه شامل دو کاواک اتلافی را که در هر کدام از آنها یک اتم دوترازی قرار دارد معرفی می‌کنیم. هر کدام از اتم‌ها تحت تأثیر یک میدان لیزری کلاسیکی قرار دارند که باعث جابه‌جایی ترازهای انرژی آنها می‌شود. ارتباط بین دو کاواک توسط جمله برهم‌کنشی میدان-میدان آورده می‌شود. از مدل گاردینر-کولت برای توصیف اتلاف در این تحقیق استفاده می‌کنیم. بعد از معرفی هامیلتونی سامانه، با استفاده از تکنیک فانو، و معرفی دو مجموعه عملگرهای جدید، هامیلتونی سامانه را ساده‌تر می‌کنیم. همچنین، با معرفی پایه‌های پوشاننده اتمی، هامیلتونی سامانه به یک شکل قابل حل در خواهد آمد. سپس، با استفاده از تکنیک تبدیلات لاپلاس، معادله وابسته به زمان شرودینگر را حل کرده و شکل صریح تابع موج سامانه را در هر لحظه از زمان پیدا می‌کنیم. با داشتن تابع موج سامانه اتم-اتم و با استفاده از معیار توافق، دینامیک درهم‌تنیدگی سامانه را در دو رژیم برهم‌کنشی قوی و ضعیف متناظر با رژیم غیرمارکوفی و مارکوفی بررسی می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که هیچ حالت پایداری از درهم‌تنیدگی در این سامانه وجود نخواهد داشت. همچنین نشان خواهیم داد که میدان لیزری کلاسیکی نقش سازنده‌ای در حفظ درهم‌تنیدگی اولیه و همچنین درهم‌تنیدگی تولیدشده خواهد داشت.

**واژه‌های کلیدی:** سامانه‌های کوانتومی باز، درهم‌تنیدگی، هامیلتونی گاردینر-کولت

مکانیک کلاسیک قابل توصیف نیست [۱]. اخیراً به دلیل

پتانسیل‌های بسیار زیاد این مفهوم در علوم و تکنولوژی مدرن، درهم‌تنیدگی کوانتومی به یک زمینه بسیار جالب مطالعاتی برای بسیاری از دانشمندان شده است. این هم به دلیل قابلیت پاسخ‌گویی این نظریه به سؤالات بنیادی و هم نقش پررنگ آن در کاربردهای نظریه اطلاعات کوانتومی از جمله دوربری کوانتومی<sup>۲</sup> [۲]، تصحیح خطای کوانتومی<sup>۳</sup> [۳]، توزیع کلید کوانتومی<sup>۴</sup> [۴] و ... است. در حالت کلی، درهم‌تنیدگی را

### ۱. مقدمه

مکانیک کوانتومی یکی از بنیادی‌ترین نظریه‌های موجود است که اعتبار آن به صورت فزاینده‌ای توسط آزمایش‌های مختلف در حال تأیید شدن است. این نظریه شامل جنبه‌های مختلفی از جمله درهم‌تنیدگی کوانتومی<sup>۱</sup> و اصل عدم قطعیت است. درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از مهم‌ترین و پیچیده‌ترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی است که با هیچ نظریه‌ای در دنیای

۱. quantum entanglement  
۲. quantum teleportation  
۳. quantum error correction  
۴. quantum key distribution

می‌آوریم. نشان خواهیم داد که برای هیچ‌کدام از حالت‌های اولیه درهم‌تنیده و جداپذیر، هیچ‌گونه حالت پایداری از درهم‌تنیدگی تولید نخواهد شد. همچنین نشان خواهیم داد که فرایند برانگیخته کردن اتم‌ها توسط میدان لیزری کلاسیکی (در حالت کلی) نقش بسیار مؤثری در حفظ درهم‌تنیدگی اولیه و همچنین ایجاد درهم‌تنیدگی از یک حالت اولیه جداپذیر (هرچند برای بازه‌های متناهی از زمان) خواهد داشت.

## ۲. مدل

سامانه موردنظر شامل دو کاواک اتلافی مشابه ولی مستقل از یکدیگر است که هرکدام شامل یک اتم دوترازی (کیوبیت) با حالت برانگیخته (پایه)  $|e\rangle$  ( $|g\rangle$ ) است. دو کاواک از طریق یک جمله برهم‌کنشی میدان-میدان با هم در ارتباط هستند. همچنین فرض می‌شود که هرکدام از اتم‌ها تحت تأثیر یک میدان لیزری کلاسیکی با دامنه  $\Omega$  باشند (شکل ۱ را ببینید). بنابراین، هامیلتونی سامانه در واحدهای  $\hbar = 1$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_{FS} + \hat{H}_{FF} + \hat{H}_{AF} + \hat{H}_L, \quad (1)$$

که در آن

$$\hat{H}_A = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \omega_{qb} \sigma_z^i, \quad (2)$$

$$\hat{H}_{FS} = \sum_{i=1}^{\nu} \omega_{ic} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^\infty \eta \hat{B}_i^\dagger(\eta) \hat{B}_i(\eta) d\eta \quad (3)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^\infty (G(\eta) \hat{a}_i^\dagger \hat{B}_i(\eta) + H.c) d\eta,$$

$$\hat{H}_{AF} = \sum_{i=1}^{\nu} g_i (\hat{a}_i \hat{\sigma}_+^i + \hat{a}_i^\dagger \hat{\sigma}_-^i), \quad (4)$$

$$\hat{H}_{FF} = g_{1\nu} (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_\nu + \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_1), \quad (5)$$

$$\hat{H}_L = \sum_{i=1}^{\nu} (\Omega e^{-i\omega_L t} \hat{\sigma}_+^i + H.c). \quad (6)$$

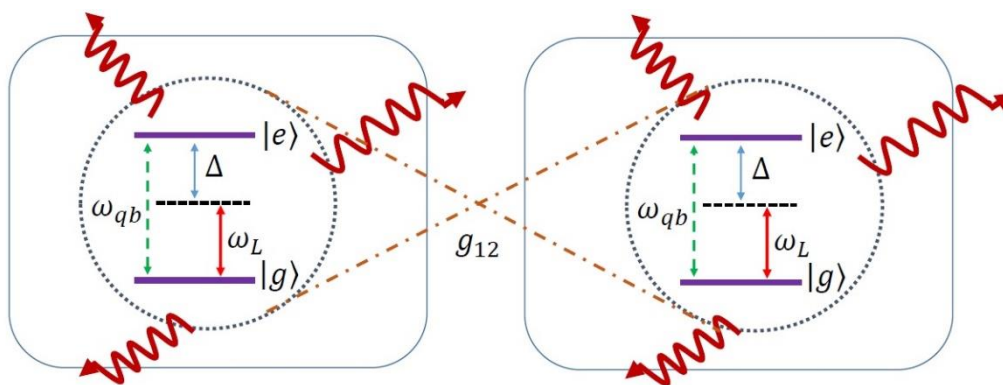
می‌توان از طریق برهم‌کنش‌های مستقیم یا غیرمستقیم بین سامانه‌های مختلف تولید کرد. در این میان، تولید درهم‌تنیدگی با استفاده از برهم‌کنش اتم-میدان به برهم‌کنش‌های مستقیم متکی است [۷-۵].

در ابتدا، واهمدوسی<sup>۱</sup> ناشی از برهم‌کنش سامانه‌های کوانتومی با محیط اطرافشان به‌عنوان یک مانع اصلی در حفظ درهم‌تنیدگی به شمار می‌آید. بنابراین کاملاً منطقی به نظر می‌رسد که باید تا حد ممکن از برهم‌کنش با محیط اطراف اجتناب کرد. البته اخیراً این نکته به اثبات رسیده است که محیط مشترک می‌تواند باعث ایجاد حالت‌های پایداری از درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها (دوترازی) شود [۸ و ۹]. اما در مراجع [۱۰ و ۱۱] نشان داده شده است که در صورتی که اتم‌ها در محیط‌های غیرمشترکی قرار داشته باشند، محیط فقط نقش مخربی در حفظ درهم‌تنیدگی دارد. بنابراین، روش‌های متعددی برای فرار از زوال درهم‌تنیدگی بر اثر نوفه‌های محیطی پیشنهاد شده است. از میان این روش‌ها می‌توان به اثر کوانتومی زنو [۸ و ۹]، اندازه‌گیری‌های ضعیف [۱۲]، تصحیح خطای کوانتومی [۱۳]، اثر اشتراک [۱۴]، پس‌خوراند کوانتومی<sup>۲</sup> [۱۵]، لیزر جفت‌کننده [۱۶] و ... اشاره کرد.

در این مقاله، ما ایده ارائه شده در [۱۰] را بسط داده و مدلی را در نظر می‌گیریم که در آن دو اتم دوترازی مشابه در دو کاواک اتلافی مجزا از هم قرار دارند. هرکدام از این دو اتم تحت تأثیر یک میدان لیزری کلاسیکی هستند. ابتدا هامیلتونی را با در نظر گرفتن چندین تبدیل کانونی مناسب به شکل قابل حل درمی‌آوریم. مدل ارائه شده قابلیت بررسی دو رژیم برهم‌کنشی قوی و ضعیف متناظر با رژیم غیرمارکوفی و مارکوفی را دارد. بعد از ساده‌سازی هامیلتونی (تا حد امکان) و با در نظر گرفتن شرایط اولیه مناسب برای سامانه کلی (اتم‌ها + محیط‌ها)، معادله وابسته به زمان شرودینگر را حل کرده و حالت سامانه اتم-اتم را در هر لحظه از زمان به دست

۱. Decoherence

۲. Quantum feedback



شکل ۱. طرحواره‌ای از مدل معرفی شده. در این مدل، دو اتم دوترازی مشابه در دو محیط اتلافی غیرمستترک در حال برهم کنش هستند. ارتباط بین دو کاواک، از طریق برهم کنش میدان-میدان با ثابت جفت‌شدگی  $g_{12}$  فراهم می‌شود.

برحسب عملگرهای  $\hat{b}_i$  باعث تولید جملاتی شامل  $\hat{b}_i \hat{B}_i^\dagger(\eta)$  می‌شود که دوباره حل تحلیلی معادله شرودینگر را ناممکن می‌سازد. برای غلبه بر این مشکل، دوباره تبدیلات کانونی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\hat{B}_i(\eta) = \hat{C}_i(\eta) \cos \theta + \hat{C}_i^\dagger(\eta) \sin \theta \quad (10)$$

$$\hat{B}_i^\dagger(\eta) = \hat{C}_i^\dagger(\eta) \cos \theta - \hat{C}_i(\eta) \sin \theta,$$

با استفاده از این تبدیلات، هامیلتونی‌های  $\hat{H}_{AF}$  و  $\hat{H}_{FS}$  به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\hat{H}_{FS} = \sum_{i=1}^{\nu} \Omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^\infty \eta \hat{C}_i^\dagger(\eta) \hat{C}_i(\eta) d\eta \quad (11)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\nu} \int_0^\infty (G(\eta) \hat{b}_i^\dagger \hat{C}_i(\eta) + H.c.) d\eta,$$

$$\hat{H}_{AF} = g \cos \theta \sum_{i=1}^{\nu} (\hat{b}_i \hat{\sigma}_+^i + \hat{b}_i^\dagger \hat{\sigma}_-^i) \quad (12)$$

$$+ [g \sin \theta (\hat{b}_i \hat{\sigma}_+^i - \hat{b}_i^\dagger \hat{\sigma}_-^i) + H.c.],$$

در این روابط برای سادگی فرض کردیم:  $g_1 = g_\nu = g$ . حال در مرحله‌ای هستیم که می‌توان هامیلتونی (۱۱) را با استفاده از تکنیک فانو قطری ساخت [۱۸]. برای این منظور، فرض می‌کنیم که محیط پیرامون هر کاواک یک پهنای باند باریکی داشته باشد به طوری که فقط یک مد خاص کاواک برانگیخته شود. این کار به ما اجازه می‌دهد که انتگرال روی  $\eta$  را تا  $-\infty$  گسترش داده و همچنین  $G(\eta)$  را برابر با ثابت  $\sqrt{\kappa/\pi}$  بگیریم. حال عملگرهای پوشاننده را به صورت زیر تعریف

در این روابط  $\omega_{qb}$  بسامد گذار اتم‌ها،  $\omega_{ic}$  بسامد میدان کاواک  $i$ -ام،  $g_{i\nu}$  ثابت جفت‌شدگی برهم کنش میدان-میدان و  $g_i$  ثابت جفت‌شدگی اتم-میدان در آمین کاواک است. همچنین شدت میدان لیزری کلاسیکی با بسامد  $\omega_L$  است. عملگرهای موجود در معادلات بالا در روابط جابه‌جایی و  $[\hat{B}_i(\eta), \hat{B}_j^\dagger(\eta')] = \delta_{ij}(\eta - \eta')$ ،  $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$  و  $[\hat{\sigma}_+^i, \hat{\sigma}_-^j] = \delta_{ij} \hat{\sigma}_z^i$  صدق می‌کنند. برای ساده‌سازی و به دست آوردن حل تحلیلی مسئله، ابتدا تبدیلات یکانی زیر را در نظر می‌گیریم [۱۷]:

$$\hat{a}_i = \hat{b}_i \cos \theta + \hat{b}_i^\dagger \sin \theta \quad (7)$$

$$\hat{a}_i^\dagger = \hat{b}_i^\dagger \cos \theta - \hat{b}_i \sin \theta,$$

به طوری که عملگرهای جدید در رابطه جابه‌جایی  $[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}$  صدق می‌کنند. در نتیجه مجموع تعداد فوتون‌ها در دو کاواک بدون تغییر باقی می‌ماند،

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i + \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_\nu$$

زاویه چرخش  $\theta$  به صورت

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2g_{1\nu}}{\omega_{\nu c} - \omega_{ic}} \right), \quad (8)$$

$$\sum \omega_{ic} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + g_{1\nu} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_\nu + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i) = \sum \Omega_i \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$$

برقرار خواهد شد به طوری که

$$\Omega_1 = \omega_{ic} \cos^2 \theta + \omega_{\nu c} \sin^2 \theta - g_{1\nu} \sin 2\theta \quad (9)$$

$$\Omega_\nu = \omega_{ic} \sin^2 \theta + \omega_{\nu c} \cos^2 \theta + g_{1\nu} \sin 2\theta.$$

باید به این نکته توجه داشت که بازنویسی هامیلتونی (۳)

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \frac{\Delta}{\gamma} (\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2) + \Omega (\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2) \\ &+ \sum_{i=1}^{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \hat{A}_i^\dagger(\omega) \hat{A}_i(\omega) d\omega \\ &+ g \cos \theta \sum_{i=1}^{\gamma} \int (\alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\sigma}_+^i e^{i\omega t} + H.c.) d\omega \\ &+ g \sin \theta \int \left\{ \alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\sigma}_+^i e^{i\omega t} \right. \\ &\left. - \alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\sigma}_+^i e^{i\omega t} + H.c. \right\} d\omega \end{aligned} \quad (20)$$

که در این رابطه،  $\Delta = \omega_{qb} - \omega_L$  است. اکنون جملات شامل  $\hat{H}_{Atom}^j = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z^j + \Omega \hat{\sigma}_x^j$  را می‌توان با معرفی حالت‌های پوشاننده زیر قطری کرد:

$$|E\rangle_j = \sin \frac{\eta}{\gamma} |g\rangle_j + \cos \frac{\eta}{\gamma} |e\rangle_j, \quad (19)$$

$$|G\rangle_j = \cos \frac{\eta}{\gamma} |g\rangle_j - \sin \frac{\eta}{\gamma} |e\rangle_j$$

به طوری که  $\hat{H}_{Atom}^j = \frac{\chi}{\gamma} \hat{\rho}_z^j$  است. براین اساس،  $\chi = \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega^2}$  و  $\hat{\rho}_z^j = |E\rangle_j \langle E| - |G\rangle_j \langle G|$  و  $\eta = \arctan[2\Omega/\Delta]$  در نهایت، با جایگذاری این عبارات در هامیلتونی (۲۰) و صرف نظر کردن از جملات غیر پایستار انرژی در تقریب امواج چرخان<sup>۱</sup> خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &= \frac{\chi}{\gamma} (\hat{\rho}_z^1 + \hat{\rho}_z^2) + \sum_{i=1}^{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \hat{A}_i^\dagger(\omega) \hat{A}_i(\omega) d\omega \\ &+ g \cos \theta \cos^2(\eta/2) \sum_{i=1}^{\gamma} \int (\alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\rho}_+^i e^{i\omega t} + H.c.) d\omega \\ &+ g \sin \theta \cos^2(\eta/2) \int \left\{ \alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\rho}_+^i e^{i\omega t} \right. \\ &\left. - \alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\rho}_+^i e^{i\omega t} + H.c. \right\} d\omega \end{aligned} \quad (22)$$

در این روابط  $\hat{\rho}_+^i = |E\rangle_i \langle G|$  است.

### ۳. تحول زمانی حالت‌های اتمی

حال در موقعیتی هستیم که با در نظر گرفتن یک حالت اولیه مناسب، بتوان حالت سامانه را در هر لحظه از زمان به دست آورد. به عنوان حالت اولیه، فرض می‌کنیم که کاواک‌ها در

$$\hat{A}_i(\omega) = \alpha_i(\omega) \hat{b}_i + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_i(\omega, \eta) \hat{C}_i(\eta) d\eta, \quad (13)$$

که در این رابطه،  $\alpha_i(\omega)$  و  $\beta_i(\omega, \eta)$  را باید به گونه‌ای به دست آورد که عملگرهای  $\hat{A}_i(\omega)$  و  $\hat{A}_i^\dagger(\omega)$  به ترتیب، عملگرهای نابودی و خلق باشند که در رابطه جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{A}_i(\omega), \hat{A}_j^\dagger(\omega')] = \delta_{ij} \delta(\omega - \omega'). \quad (14)$$

می‌توان نشان داد که با انتخاب [۱۹]

$$\alpha_i(\omega) = \frac{\sqrt{\kappa/\pi}}{\omega - \Omega_i + i\kappa}, \quad (15)$$

$$\beta_i(\omega, \eta) = \sqrt{\kappa/\pi} \alpha_i(\omega) \left[ P \frac{1}{\omega - \eta} + \frac{\omega - \Omega_i}{\kappa/\pi} \delta(\omega - \eta) \right],$$

هامیلتونی  $\hat{H}_{FS}$  در رابطه (۱۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H}_{FS} = \sum_{i=1}^{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \hat{A}_i^\dagger(\omega) \hat{A}_i(\omega) d\omega, \quad (16)$$

به طوری که:

$$[\hat{A}_i(\omega), \hat{H}_{FS}] = \omega \hat{A}_i(\omega). \quad (17)$$

با استفاده از این تبدیلات، هامیلتونی سامانه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{\gamma} \omega_{qb} \sigma_z^i + \sum_{i=1}^{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \hat{A}_i^\dagger(\omega) \hat{A}_i(\omega) d\omega \\ &+ g \cos \theta \sum_{i=1}^{\gamma} \int (\alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\sigma}_+^i + H.c.) d\omega \\ &+ g \sin \theta \int (\alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\sigma}_+^i - \alpha_i^*(\omega) \hat{A}_i(\omega) \hat{\sigma}_+^i + H.c.) d\omega \\ &+ \sum_{i=1}^{\gamma} (\Omega e^{-i\omega t} \hat{\sigma}_+^i + H.c.). \end{aligned} \quad (18)$$

اخیراً این نکته به اثبات رسیده است که درهم تنیدگی و در واقع هر سنجه از آن تحت تبدیلات کانونی موضعی  $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{A}_n$  ناوردا باقی می‌ماند [۲۰]. بنابراین تبدیل یکانی  $U = e^{-i\omega_L (\hat{\sigma}_z^1 + \hat{\sigma}_z^2) t/\gamma}$  را در نظر می‌گیریم. بر این اساس، هامیلتونی مؤثر در چارچوب مرجع چرخان به صورت زیر به دست می‌آید [۲۰]:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} \hat{U}(t) - i \hat{U}^\dagger(t) \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t}, \quad (18)$$

به طوری که

<sup>۱</sup> Rotating wave approximation

$$F_j(t-t') = e^{-\kappa(t-t')} e^{i(\chi + \omega_L - \Omega_j)(t-t')}. \quad (26)$$

در نهایت با استفاده از تبدیلات لاپلاس و معکوس آنها، می‌توان شکل صریح عبارات زیر را برای ضرایب  $X_1(t)$  و  $X_2(t)$  به دست آورد:

$$X_j(t) = X_j(\circ) e^{-\Xi_j t / \gamma} \left[ \frac{\cosh(\mathfrak{T}_j t / \gamma) + \Xi_j \sinh(\mathfrak{T}_j t / \gamma)}{\mathfrak{T}_j} \right], \quad (27)$$

به طوری که  $j = 1, 2$ . در این عبارت داریم:

$$X_1(\circ) = \cos \theta C_{1\circ} - \sin \theta C_{2\circ}, \quad (28)$$

$$X_2(\circ) = \sin \theta C_{1\circ} + \cos \theta C_{2\circ},$$

و همچنین

$$\Xi_j = \kappa - i(\chi - \Omega_j + \omega_L), \quad (29)$$

$$\mathfrak{T}_j = \sqrt{\Xi_j^\dagger - g^\dagger (1 + \cos \eta)}.$$

#### ۴. تحول زمانی درهم‌تنیدگی

حال با داشتن حالت سامانه در هر زمان، می‌توان دینامیک درهم‌تنیدگی سامانه اتمی را مطالعه کرد. برای این منظور، ابتدا در معادله (۲۴) با رد گرفتن از روی درجات آزادی محیط‌های اطراف، شکل صریح ماتریس چگالی اتم-اتم را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

(۳۰)

$$\hat{\rho}(t) = |C_1(t)\rangle\langle E, G| \langle E, G| + C_2(t) C_1^*(t) |E, G\rangle\langle G, E| + C_1^*(t) C_2(t) |G, E\rangle\langle E, G| + |C_2(t)\rangle\langle G, E| \langle G, E| + (1 - |C_1(t)\rangle\langle C_1(t)| - |C_2(t)\rangle\langle C_2(t)|) |G, G\rangle\langle G, G|.$$

برای محاسبه درجه درهم‌تنیدگی سامانه از معیار توافق<sup>۱</sup> استفاده

می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$\mathcal{E}(t) = \max \{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (31)$$

که در آن  $\lambda_j$  ویژه‌مقادیر (به ترتیب نزولی) ماتریس  $\hat{\rho}_s$  هستند که در آن  $\hat{\rho}_s = \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y \hat{\rho}^* \hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y$  است و همچنین  $\hat{\rho}^*$  همیوگ مختلط  $\hat{\rho}$  می‌باشد. معیار توافق می‌تواند بین صفر (وقتی که اتم‌ها جدا پذیرند) و یک (وقتی که در یک حالت بیشینه از درهم‌تنیدگی قرار دارند) تغییر کند. به راحتی می‌توان نشان داد که برای حالت (۳۳)، معیار توافق به صورت زیر به

حالت‌های خلأ باشند و اتم‌ها در یک برهم‌نهی همدوس از حالت پایه و برانگیخته به صورت زیر باشند:

$$|\psi(\circ)\rangle = (C_{1\circ} |E, G\rangle + C_{2\circ} |G, E\rangle) |0\rangle_{R_1} |0\rangle_{R_2} \quad (20)$$

در اینجا،  $|0\rangle_{R_j} = \hat{A}_j(\omega') |1_\omega\rangle_j \delta_{ij} \delta(\omega - \omega')$  حالت خلأ چندمدی برای کاواک  $i$ -ام است که در آن  $|1_\omega\rangle_j$  حالت چندمدی کاواک  $j$ -ام است که نشان‌دهنده یک فوتون در بسامد  $\omega$  و حالت خلأ در بقیه بسامدها است. در نتیجه، بردار حالت سامانه در زمان  $t$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = \int \Gamma_{1\omega}(t) |1_\omega\rangle_1 |0\rangle_{R_2} |G, G\rangle d\omega + \int \Gamma_{2\omega}(t) |0\rangle_{R_1} |1_\omega\rangle_2 |G, G\rangle d\omega + C_1(t) |E, G\rangle |0\rangle_{R_1} |0\rangle_{R_2} + C_2(t) |G, E\rangle |0\rangle_{R_1} |0\rangle_{R_2} \quad (21)$$

با استفاده از معادله وابسته به زمان شرودینگر، می‌توان معادلات دیفرانسیل زیر را برای ضرایب بسط به دست آورد:

$$i\dot{\Gamma}_{1\omega}(t) = (\omega - \chi) \Gamma_{1\omega}(t) + g \cos^\dagger(\eta/2) e^{-i\omega t} \alpha_1(\omega) X_1(t) \\ i\dot{\Gamma}_{2\omega}(t) = (\omega - \chi) \Gamma_{2\omega}(t) + g \cos^\dagger(\eta/2) e^{-i\omega t} \alpha_2(\omega) X_2(t) \quad (22)$$

$$i\dot{C}_1(t) = g \cos^\dagger(\eta/2) e^{+i\omega t} \int \{ \cos \theta \alpha_1^*(\omega) \Gamma_{1\omega}(t) + \sin \theta \alpha_2^*(\omega) \Gamma_{2\omega}(t) \} d\omega$$

$$i\dot{C}_2(t) = g \cos^\dagger(\eta/2) e^{+i\omega t} \int \{ \cos \theta \alpha_2^*(\omega) \Gamma_{2\omega}(t) - \sin \theta \alpha_1^*(\omega) \Gamma_{1\omega}(t) \} d\omega$$

در این روابط تعریف کرده‌ایم:

$$X_1(t) = \cos \theta C_1(t) - \sin \theta C_2(t), \quad (23)$$

$$X_2(t) = \sin \theta C_1(t) + \cos \theta C_2(t).$$

بعد از محاسبات نسبتاً طولانی و البته سراسر، می‌توان معادلات دیفرانسیل-انتگرالی زیر را برای ضرایب  $X_1(t)$  و  $X_2(t)$  به دست آورد:

$$\dot{X}_j(t) = -g^\dagger \cos^\dagger(\eta/2) \int dt' X_j(t') F_j(t-t') \quad (24)$$

به طوری که در این رابطه  $F_j(t-t')$  تابع همبستگی کاواک  $j$ -ام است:

$$F_j(t-t') = \int |\alpha_j(\omega)|^2 e^{-i(\omega - \chi - \omega_L)(t-t')} d\omega. \quad (25)$$

با استفاده از حساب مانده‌ها و همچنین رابطه (۱۵) داریم:

دست می‌آید:

$$\mathcal{E}(t) = 2|C_1(t)C_2^*(t)|. \quad (32)$$

فرض می‌کنیم که حالت اولیه سامانه به صورت زیر مشخص شده باشد:

$$C_{1,1} = \sqrt{\frac{1-s}{2}}, \quad (33)$$

$$C_{2,1} = \sqrt{\frac{1+s}{2}} e^{i\phi},$$

که در آن  $-1 \leq s \leq +1$  است. بدون این که به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، فرض می‌کنیم که دو کاواک مشابه یکدیگر باشند، یعنی  $\omega_c = \omega_{2c} \equiv \omega_c$ . در نتیجه مطابق با رابطه (۸)

$$\text{داریم: } \theta = \frac{\pi}{4}. \text{ در این شرایط، } \Omega_1 = \omega_c - g_{12} \text{ و}$$

$$\Omega_2 = \omega_c + g_{12}. \text{ در نتیجه } \Xi_1 = \kappa - i(\chi + g_{12} - \delta) \text{ و}$$

$$\Xi_2 = \kappa - i(\chi - g_{12} - \delta)$$

خواهد شد که در این روابط  $\delta = \omega_c - \omega_L$  نامیزانی بین بسامد مرکزی کاواک‌ها (که فرض

می‌شود برای هر دو کاواک یکسان است) و بسامد میدان لیزری

کلاسیکی است. همچنین دو پارامتر بدون بعد  $\tau = \kappa t$  و

$R = g / \kappa$  را تعریف می‌کنیم که بر اساس آن قادر هستیم دو

رژیم برهم‌کنشی قوی (متناظر با  $R \gg 1$ ) و رژیم برهم‌کنشی

ضعیف (متناظر با  $R \ll 1$ ) را مطالعه کنیم. البته باید به این

نکته متذکر شد که با توجه این که تقریب موج چرخان در

برهم‌کنش ضعیف معقول است، لذا در رژیم برهم‌کنشی قوی،

باید برهم‌کنش تا حدی قوی باشد که همچنان تقریب موج

چرخان معتبر باشد.

#### ۱.۴. رژیم برهم‌کنشی قوی

در شکل ۲ تأثیر میدان لیزری کلاسیکی بر دینامیک

درهم‌تنیدگی برای رژیم برهم‌کنشی قوی، یعنی  $R = 10$  برای

یک حالت اولیه درهم‌تنیده رسم شده است. در اینجا فرض شده

است که هیچ‌گونه نامیزانی وجود ندارد، یعنی  $\delta = \Delta = 0$  در

این حالت، درهم‌تنیدگی از مقدار اولیه برابر با یک (بیشینه

درهم‌تنیدگی) شروع شده و با گذشت زمان از بین می‌رود.

نوسانات درهم‌تنیدگی به علت حافظه طولانی مدت محیط

مشاهده می‌شوند. در واقع برهم‌کنش قوی بین اتم دوترازی و

محیط اطراف باعث می‌شود که محیط بخشی از اطلاعاتی را که

در طی برهم‌کنش از اتم کسب کرده است به آن برگرداند. لازم

به ذکر است که این نوسانات در ابتدای شروع برهم‌کنش قوی‌تر

هستند. همچنین مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی نیز در شرایط

خاصی دیده می‌شود. باید این نکته را متذکر شد که این پدیده

بستگی به ثابت جفت‌شدگی میدان-میدان دارد. برای

$g_{12} = 0.1g$  این پدیده برای  $\Omega = 0$  اتفاق می‌افتد، درحالی‌که

برای  $g_{12} = g$  مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی برای  $\Omega = 0.5g$

رخ می‌دهد. از بررسی این نمودارها می‌توان به نقش تعیین‌کننده

میدان لیزری کلاسیکی در حفظ درهم‌تنیدگی اولیه اشاره کرد.

به‌طورکلی، میدان کلاسیکی نقش سازنده‌ای در حفظ

درهم‌تنیدگی اولیه دارد. اما باید به این نکته توجه شود که روند

حفظ درهم‌تنیدگی با افزایش  $g_{12}$  کاهش می‌یابد. این بدین دلیل

است که با افزایش  $g_{12}$ ، تبادل اطلاعات بین دو کاواک بیشتر

شده و در نتیجه دو اتم حضور محیط را بیشتر حس می‌کنند.

می‌توان نشان داد که برای مقادیر بزرگ از  $\Omega$ ، درهم‌تنیدگی

اولیه را می‌توان با تقریب خیلی خوبی حفظ کرد.

شکل ۳ دینامیک درهم‌تنیدگی را برای یک حالت اولیه

جدپذیر در رژیم برهم‌کنشی قوی  $R = 10$  در غیاب هرگونه

نامیزانی نشان می‌دهد. در این حالت درهم‌تنیدگی از مقدار اولیه

صفر شروع شده و پس از مدت‌زمانی (با طی کردن نوسانات)

به یک مقدار بیشینه می‌رسد و پس از آن به دلیل برهم‌کنش با

محیط، درهم‌تنیدگی تولیدشده سرانجام از بین می‌رود. لازم به

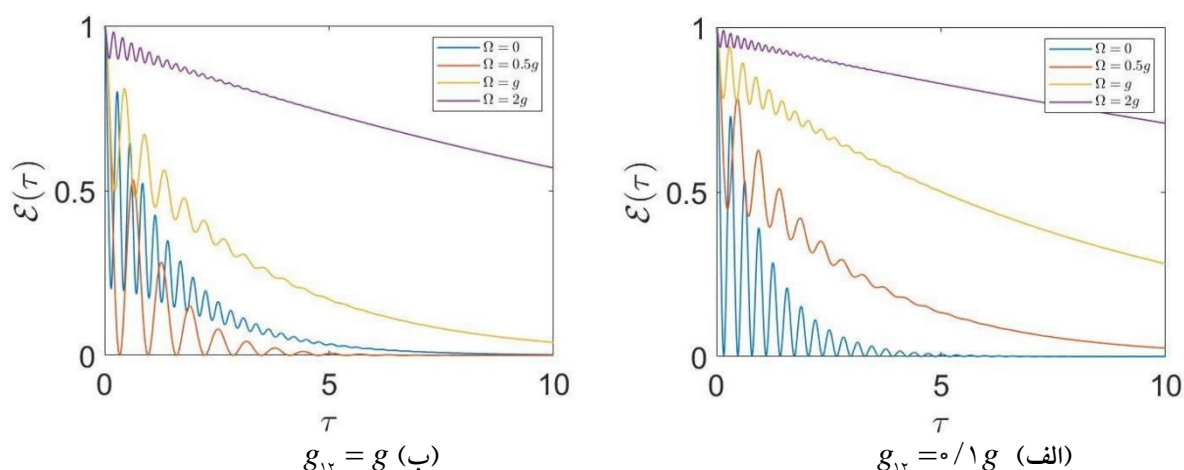
ذکر است که در این حالت بیشینه درهم‌تنیدگی تولیدشده هم

به ثابت جفت‌شدگی میدان-میدان و هم به شدت میدان لیزری

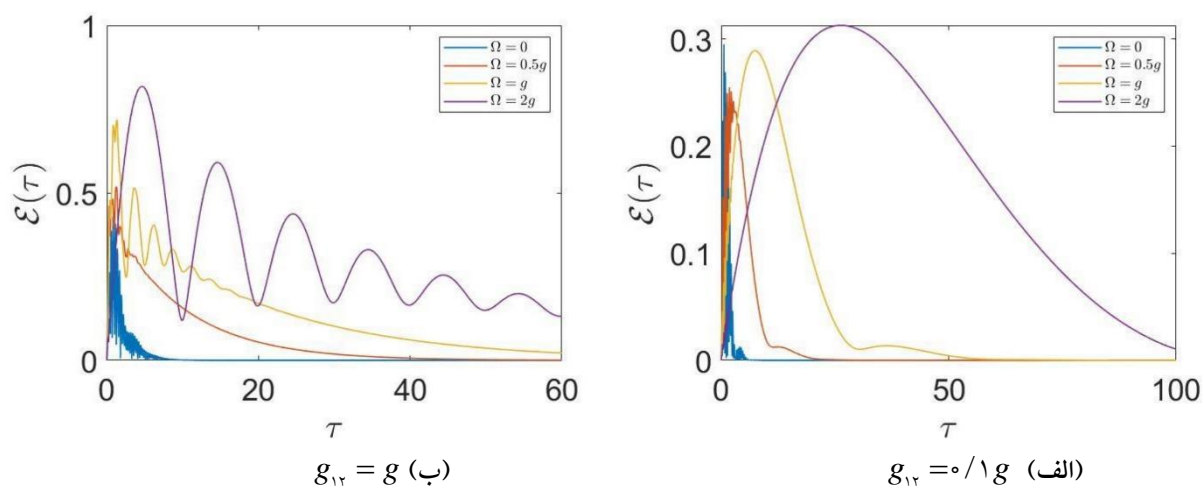
کلاسیکی بستگی دارد. دوباره این نکته واضح است که بیشترین

مقدار درهم‌تنیدگی تولیدشده (و همچنین حفاظت‌شده) برای

میدان‌های لیزری قوی‌تر رخ می‌دهد.



شکل ۲. دینامیک درهم‌تنیدگی برای یک حالت اولیه با بیشینه درهم‌تنیدگی، یعنی  $s = 0$  و  $\phi = 0$  در رژیم برهم‌کنشی قوی  $R = 10$  و در غیاب هرگونه نامیزانی.

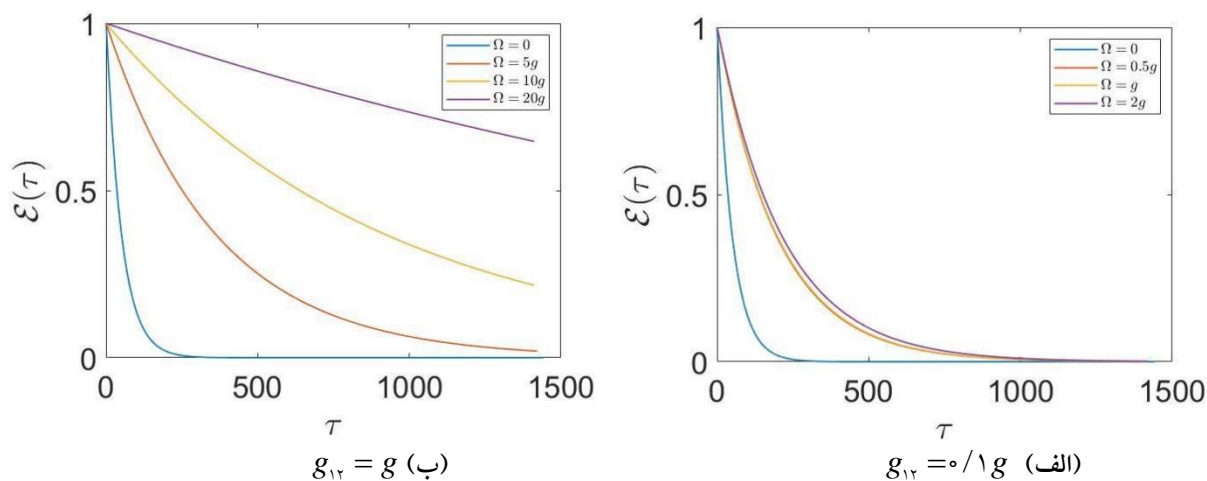


شکل ۳. دینامیک درهم‌تنیدگی برای یک حالت اولیه جداپذیر، یعنی  $s = +1$  و  $\phi = 0$  در رژیم برهم‌کنشی قوی  $R = 10$  و در غیاب هرگونه نامیزانی.

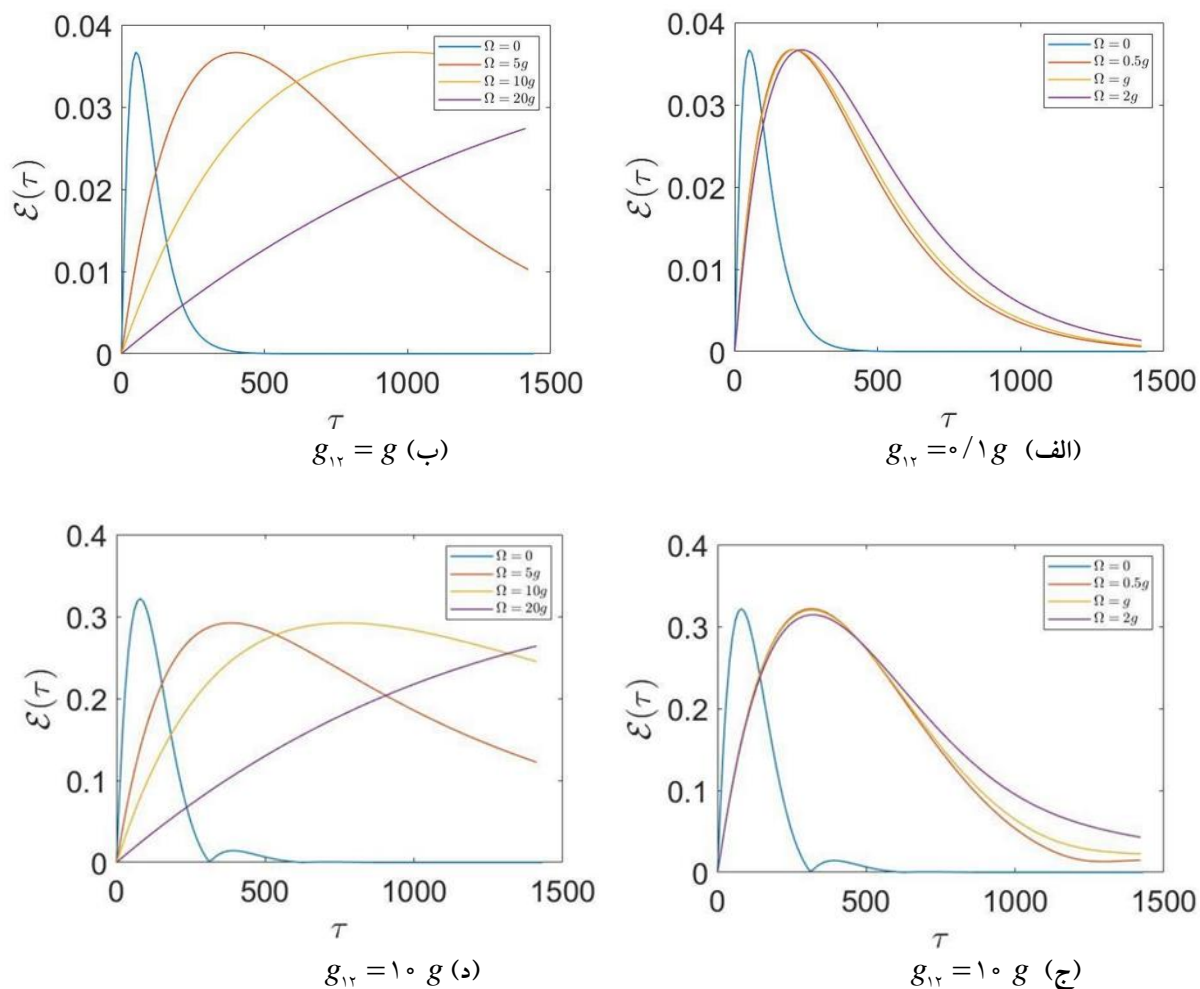
از حفاظت از درهم‌تنیدگی برسیم، باید برهم‌کنش میدان-میدان قوی باشد. محاسبات نشان می‌دهند که برای  $g_{12} = 0.1g$  (برهم‌کنش نسبتاً ضعیف میدان-میدان)، حفاظت خوبی از درهم‌تنیدگی اولیه صورت نمی‌گیرد. بنابراین هر دو شکل برای  $g_{12} = g$  رسم شده‌اند. از طرفی، همان‌طور که پیداست، برای حفاظت از درهم‌تنیدگی اولیه به میدان‌های کلاسیکی قوی‌تری (در مقایسه با ثابت‌های جفت‌شدگی مرتبط) نیاز هست، به‌طوری‌که برای مقادیر نسبتاً بزرگ از  $\Omega$ ، حفاظت از درهم‌تنیدگی به خوبی صورت می‌گیرد.

#### ۲.۴. رژیم برهم‌کنشی ضعیف

شکل ۴ دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم را در رژیم برهم‌کنشی ضعیف، یعنی  $R = 0.1$  نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودارها پیداست، درهم‌تنیدگی از مقدار اولیه یک (متناظر با بیشینه درهم‌تنیدگی) شروع شده و به صورت یکنواخت تا مقدار صفر افت پیدا می‌کند. نوسانات درهم‌تنیدگی مشاهده نمی‌شوند. در این رژیم برهم‌کنشی، به دلیل برهم‌کنش ضعیف بین اتم‌ها و میدان‌های اطرافشان، اطلاعات کمتر به اشتراک دو اتم گذاشته می‌شود. در نتیجه، برای این که به یک درجه مطلوبی



شکل ۴. دینامیک درهم‌تنیدگی برای یک حالت اولیه با بیشینه درهم‌تنیدگی، یعنی  $s = 0$  و  $\phi = 0$  در رژیم برهم‌کنشی ضعیف  $R = 0$  و در غیاب هرگونه نامیزانی.



شکل ۵. دینامیک درهم‌تنیدگی برای یک حالت اولیه جداپذیر، یعنی  $s = +1$  و  $\phi = 0$  در رژیم برهم‌کنشی ضعیف  $R = 0$  و در غیاب هرگونه نامیزانی.



تکنیک فانو، هامیلتونی اولیه را ساده کردیم. سپس، یک تبدیل یکانی مناسب را برای تغییر پایه‌های اتمی از پایه‌های محاسباتی معمول به پایه‌های پوشاننده به کار بردیم. با حل معادله وابسته به زمان شرودینگر و به دست آوردن شکل صریح تابع حالت سامانه در هر لحظه از زمان، دینامیک درهم‌تنیدگی سامانه اتم-اتم را با استفاده از پارامتر توافق برای حالت‌های اولیه متفاوت و در دو رژیم برهم‌کنشی ضعیف و قوی مطالعه کردیم.

نتایج نشان می‌دهند که هیچ حالت پایایی از درهم‌تنیدگی برای همه حالت‌های اولیه در هر دو رژیم برهم‌کنشی وجود ندارد. این نتیجه قابل انتظار است، زیرا نشان داده شده است، برای وجود یک حالت پایا از درهم‌تنیدگی، به یک درجه از اشتراک دو محیط نیاز است [۱۱]. برای یک حالت اولیه با بیشینه درهم‌تنیدگی، پارامتر توافق از بیشینه مقدار خود یعنی یک شروع شده و پس از گذشت زمان متناهی، صفر می‌شود. در رژیم برهم‌کنشی قوی و به دلیل حافظه طولانی مدت محیط، این افت همراه با نوسانات پارامتر توافق است. این درحالی است که در رژیم برهم‌کنشی ضعیف، زوال درهم‌تنیدگی به صورت یکنواخت و بدون وجود نوسانات توافق است. در هر دو رژیم، نقش میدان لیزری کلاسیکی در حفظ درهم‌تنیدگی اولیه کاملاً مشهود است.

از طرفی، برای یک حالت اولیه جداپذیر، درهم‌تنیدگی از مقدار صفر شروع شده و پس از این که به بیشینه مقدار خود رسید، دوباره افت پیدا کرده و پس از گذشت زمانی از بین می‌رود. در رژیم برهم‌کنشی قوی و در ابتدای برهم‌کنش، می‌توان نوسانات درهم‌تنیدگی را مشاهده کرد. در این رژیم، به دلیل برهم‌کنش قوی بین اتم و میدان کاواک، برای مقادیر کم از ثابت جفت‌شدگی میدان-میدان، می‌توان درهم‌تنیدگی قابل ملاحظه‌ای تولید کرد. میدان لیزری کلاسیکی نقض برجسته‌ای در حفظ این درهم‌تنیدگی تولید شده برای زمان‌های طولانی تری دارد. اما، در رژیم برهم‌کنشی ضعیف، برای تولید درهم‌تنیدگی باید به نحوی بر ضعیف بودن برهم‌کنش اتم-میدان در کاواک‌ها غلبه کرد. بنابراین، به ثابت جفت‌شدگی میدان-میدان نسبتاً بزرگی احتیاج است. در هر صورت، میدان لیزری کلاسیکی باعث می‌شود این درهم‌تنیدگی تولید شده، در مدت زمان طولانی تری زنده بماند.

شکل ۵ دینامیک درهم‌تنیدگی بین دو اتم در رژیم برهم‌کنشی ضعیف یعنی  $R=0.1$  برای یک حالت اولیه کاملاً جداپذیر، یعنی  $S=+1$  و  $\phi=0$  در غیاب هرگونه نامیزانی را نشان می‌دهد. در تمام این نمودارها، درهم‌تنیدگی از مقدار اولیه صفر شروع شده و به یک بیشینه رسیده و پس از آن افت کرده و در نهایت از بین می‌رود. باید اشاره کرد که در اینجا نیز هیچ‌گونه حالت پایایی از درهم‌تنیدگی وجود ندارد. لازم به ذکر است که برای ایجاد یک حالت پایه از درهم‌تنیدگی لازم است که دو کیوبیت در یک محیط اتلافی مشترک قرار گیرند [۸ و ۱۱]. نکته قابل توجه تأثیر ثابت جفت‌شدگی میدان-میدان  $g_{12}$  در بیشینه درهم‌تنیدگی تولید شده است. در این حالت، با افزایش این ثابت می‌توان بیشینه درهم‌تنیدگی را تا مقدار نسبتاً بالایی افزایش داد. در واقع، با افزایش این ثابت، اتم‌ها بهتر می‌توانند برانگیختگی‌های اولیه خود را از طریق جمله برهم‌کنشی میدان-میدان به اشتراک بگذارند و در نتیجه درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد. از طرفی، میدان کلاسیکی باعث می‌شود که درهم‌تنیدگی در بازه‌های زمانی طولانی تری زنده بماند. بنابراین، برای تولید و حفاظت از درهم‌تنیدگی از یک حالت اولیه جداپذیر در رژیم برهم‌کنشی ضعیف، نیاز به برهم‌کنش میدان-میدان قوی بین دو کاواک (برای تولید درهم‌تنیدگی) و همچنین میدان کلاسیکی قوی (برای حفاظت از درهم‌تنیدگی تولید شده) است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک سامانه متشکل از دو کاواک اتلافی را که در هرکدام یک اتم دوترازی در حال برهم‌کنش با یک میدان کوانتومی است در نظر گرفته‌ایم. این میدان کلاسیکی به‌نوبه خود با یک محیط با درجات آزادی بی‌نهایت در دمای صفر درجه در حال برهم‌کنش است. فرض کرده‌ایم که هرکدام از این اتم‌ها تحت تأثیر یک میدان لیزری کلاسیکی نیز قرار داشته باشند. به دلیل نشت فوتون‌ها از آینه‌های کاواک‌ها، می‌توان یک جمله برهم‌کنشی میدان-میدان جهت ارتباط دو کاواک در نظر گرفت. با استفاده از هامیلتونی گاردینر-کولت، اتلاف در هر کاواک را مدل کرده‌ایم. با استفاده از دو تبدیل کانونی و همچنین

توان از اثرات محیطی صرف نظر کرد، تولید، کنترل و تقویت درهم‌تنیدگی یک امر حیاتی است. بنابراین، می‌توان انتظار داشت که نتایج تحلیلی ارائه شده، اولین قدم به سوی این هدف باشد.

در نهایت باید متذکر شد که نتایج به دست آمده می‌توانند در پیش‌بینی رفتارهای مورد انتظار در سامانه‌های واقعی فیزیکی که در آنها لازم است تا حد امکان این سامانه‌ها کوچک در نظر گرفته شوند، مفید واقع شوند [۲۲]. در چنین سامانه‌هایی که

## مراجع

1. S Mancini and A Winter, "A Quantum Leap in Information Theory", World Scientific (2020).
2. S Pirandola, et al., *Nat. Photon.* **9** (2015) 641.
3. R Laflamme, et al., *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 198.
4. A K Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 661.
5. J Volz, et al., *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 030404.
6. L Memarzadeh, *Iran. J. Phys. Res.* **19** (2019) 405 (in Persian).
7. S Karami and A Mortezaipoor, *Iran. J. Phys. Res.* **18** (2018) 603 (in Persian).
8. A Nourmandipour and MK Tavassoly, *J. Phys. B- At. Mol. Opt. Phys.* **48** (2015) 165502.
9. S Maniscalco, et al., *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 090503.
10. A Nourmandipour and MK Tavassoly, *Eur. Phys. J. Plus* **130** (2015) 148.
11. A Nourmandipour, MK Tavassoly, and S Mancini, *Quantum Inf. Comput.* **16** (2016) 0969.
12. AN Korotkov and K Keane, *Phys. Rev. A* **81** (2010) 040103.
13. J Chiaverini, et al., *Nature* **432** (2004) 602.
14. M Abdel-Aty and H Moya-cessa, *Phys. Lett. A* **369** (2007) 372.
15. M Rafiee, A Nourmandipour, and S Mancini, *Phys. Lett. A* **384** (2020) 126748.
16. A Mortezaipoor, M Abedi, M Mahmoudi, and MRH Khajehpour, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44** (2011) 085501.
17. MJ Faghihi and MK Tavassoly, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **45** (2012) 035502.
18. U Fano, *Phys. Rev.* **124** (1961) 1866.
19. SM Dutra, "Cavity Quantum Electromagnetics: The Strange Theory of Light in a Box", John Wiley & Sons (2005).
20. S-M Fei and N Jing, *Phys. Lett. A* **342** (2005) 77.
21. K Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 2245.
22. JT Barreiro, et al., *Nature* (London) **470** (2011) 486.