

## حل معادله موج آکوستیکی در ساختار لایه‌ای سه بعدی برای ایجاد فریب آکوستیکی

محمد مهدی صادقی<sup>۱\*</sup> و حمید نادگران<sup>۲</sup>

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه جهرم، جهرم

بخش فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز

پست الکترونیکی: sadeghi@jahromu.ac.ir

(دریافت مقاله: ۰۶/۰۹/۱۴۰۱؛ دریافت نسخه نهایی: ۲۲/۰۳/۱۴۰۲)

### چکیده:

در این مقاله، تکنیک ایجاد یک فریب آکوستیکی آرمانی در سه بعد براساس تئوری آکوستیک تبدیل و بر پایه حل دقیق معادلات موج آکوستیکی برحسب بسط‌های کروی ارائه شده است. در این تکنیک از یک ساختار سه بعدی که شامل پوسته‌های کروی متحدالمرکز با مواد همگن و همسانگرد است، استفاده شده است. این ساختار باعث تغییر در الگوی پراکندگی امواج آکوستیکی می‌شود. برای بررسی تغییرات در الگوی پراکندگی، با محاسبه ضرایب بسط در جواب معادله موج آکوستیکی پراکنده شده، الگوی پراکندگی در هر لایه از این ساختار محاسبه شده است. با قرار دادن یک شیء داخل هسته این ساختار، فریب آکوستیکی مورد نظر تولید می‌شود. با مقایسه الگوی پراکندگی شیء فوق داخل هسته این ساختار با الگوی پراکندگی یک شیء دیگر با پارامترهای آکوستیکی و اندازه متفاوت (تبدیل یافته)، فریب آکوستیکی مورد نظر تشخیص داده می‌شود. یکی از مزایای این تکنیک، رفع محدودیت کارکرد دستگاه‌های استوانه‌ای در راستای محور Z است که به دلیل ماهیت کروی بودن پارامترهای آکوستیکی ساختار و عدم وابستگی آنها به زوایای سمتی و سمت الرأسی، حاصل می‌شود. این تکنیک، یک روش مفید برای افزایش دقت در تصویربرداری بافت‌های پزشکی با استفاده از دستگاه‌های سونوگرافی است. به عبارت دیگر، با بهره‌گیری از این تکنیک، می‌توان از تصاویر با کیفیت بالاتری از بافت‌های حساس در دستگاه‌های سونوگرافی بهره برد.

**واژه‌های کلیدی:** فریب آکوستیکی، نظریه آکوستیک تبدیل، معادله موج آکوستیکی، فرامواد آکوستیکی، ساختار لایه‌ای کروی هم مرکز، الگوی پراکندگی

### ۱. مقدمه

تبدیلات فضایی خاصی را بر روی معادلات ماکسول ارائه دادند [۱]. در سال ۲۰۰۶ پندری [۲] نشان داد که می‌توان هر نگاشت و تبدیل مختصات دلخواه در معادلات ماکسول را با استفاده از فرامواد الکترومغناطیسی بر حسب تانسور گذردهی الکتریکی و تراوانی مغناطیسی تبدیل یافته تفسیر کرد و آن را برای ایجاد محیط نامرئی ساز استفاده کرد. به عنوان نتیجه می‌توان هر انقباض، انبساط و هر انحنائی در فضا را، که با تبدیل مختصات مربوطه مشخص می‌شود، با به کارگیری فرامواد الکترومغناطیسی پیاده‌سازی کرد. هم زمان با پندری [۲]

از دیرباز تاکنون بشر علاقه فزاینده‌ای در ایجاد شنل‌های نامرئی و یا ایجاد فریب اپتیکی با تکنیک‌های مختلف نظیر استتار و... داشته است. این علاقه در افسانه‌های دور و فیلم‌های تخیلی امروزه نیز قابل مشاهده است. امروزه توانایی کنترل نور و ایجاد نامرئی‌سازها و یا ایجاد فریب اپتیکی با استفاده از نظریه اپتیکی تبدیل میسر شده است. در اصل این نظریه بر اساس تبدیلات فضایی بنا شده است که ابتدا در سال ۱۹۶۷ دولین و همکارانش

پراکندگی به عنوان نقطه شروع برای استخراج مجموعه‌ای از پارامترهای آکوستیک برای پوسته‌های هم مرکز کروی سه بعدی استفاده خواهد شد و با قراردادن یک شیء کروی در مرکز دستگاه، حل دقیقی برای فریب آکوستیکی ایجاد شده ارائه خواهد شد. برای تعمیم فریب آکوستیکی دو بعدی به سه بعد با استفاده از لایه‌های کروی از نظریه "می" (Mie theory) برای محاسبه ضرایب پراکندگی استفاده می‌شود. در این مقاله در راستای ایجاد فریب آکوستیکی، نظریه آکوستیک تبدیل به بررسی مجدد هم در معادلات و هم در ضرایب آکوستیکی در سه بعد نیاز خواهد داشت. در ادامه این مقاله به ارائه هدف و صورت مسئله و در قسمت سوم به ارائه معادله موج سه بعدی برای ساختار ارائه شده در قسمت قبل، پرداخته خواهد شد و جواب‌های کلی مسئله ارائه خواهد شد. در قسمت چهارم با استفاده از شرایط مرزی و نظریه پراکندگی می یک کره نمونه در مرکز ساختار قرار خواهد گرفت و فریب آکوستیکی ایجاد شده همراه با ارائه بسط‌های جواب معادلات موج ارائه خواهد شد و در انتها در قسمت پنجم، بحث در نتایج ارائه خواهد شد.

## ۲. هدف

برای ارائه صورت مسئله، ابتدا مطابق [۱۵] از تابع تبدیل طبق معادله (۱) ولی در مختصات کروی شروع می‌کنیم.

$$r' = f(r) = \begin{cases} \frac{a}{c}r & 0 < r < c \\ \left(\frac{r}{m_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} & c < r < b \end{cases}, \quad (1)$$

که در این تابع تبدیل مختصات پرایم دار،  $(r', \theta')$ ، فضای واقعی و مختصات بدون پرایم،  $(r, \theta)$ ، فضای مجازی را نشان می‌دهد. مطابق شکل ۱ که به صورت نمادین نشان داده شده است، این تابع ناحیه بزرگ‌تری از فضای مجازی  $(0 < r < c)$  را در ناحیه کوچک‌تری از فضای واقعی  $(0 < r' < a)$  منقبض می‌کند و ناحیه  $(c < r < b)$  از فضای مجازی را در ناحیه  $(a < r' < b)$  از فضای واقعی منبسط می‌کند.

قابل ذکر است این تابع تبدیل شرایط مرزی  $f(c) = a$  و

لئونهاردت نیز به صورت تحلیلی این مسئله را بررسی کرد [۳]. یکی از دستگاه‌هایی که با این تبدیلات ارائه شد، شل‌های نامرئی ساز بود که در آن از تبدیلات مختصات و پارامترهای الکترومغناطیسی تبدیل یافته برای نامرئی‌سازی استفاده شد [۳]. چن و همکارانش [۴] یک تحلیل پراکندگی از هارمونیک‌های کروی از پوسته پوششی کروی سه بعدی ارائه دادند که در مرجع [۱] پیش‌بینی شده بود و تأیید کردند که هر شیئی که در هسته این پوسته قرار گیرد با حذف پراکندگی در همه جهات آن را نامرئی می‌کند. در ادامه در سال ۲۰۰۷ برای اولین بار کومر و شوریگ [۵] نشان دادند، یک مقایسه دقیق می‌تواند بین تبدیلات امواج الکترومغناطیسی و امواج آکوستیک به صورت دو بعدی برای مواد ناهمسانگرد در پوسته دو بعدی نامرئی‌ساز انجام شود. آنها تبدیلات فضایی را برای معادلات امواج آکوستیکی به کار بردند و نظریه آکوستیک تبدیل<sup>۱</sup> را بنا نهادند. آنها در این مقاله توانستند یک شیء را با ایجاد یک لایه با ضرایب آکوستیکی ناهمسانگرد از دید یک حسگر آکوستیکی، نامرئی کنند. این موضوع بسیار آرمانی و بدون پراکندگی انجام شد. در این راستا دستگاه‌های بدیع و جالبی بر اساس آکوستیک تبدیل ارائه شدند که در این راستا نامرئی‌سازهای آکوستیکی دو بعدی [۶]، نامرئی‌ساز خارجی [۷]، فریب آکوستیکی [۸ و ۹] و... قابل ذکر است. شایان ذکر است که همانند تبدیلات اپتیکی، در پیاده‌سازی تبدیلات آکوستیکی به پارامترهای ناهمسانگرد آکوستیکی یعنی پارامتر چگالی جرمی و مدول حجمی ناهمسانگرد، نیازمندیم. در عمل ساخت و تولید مواد با ضرایب آکوستیکی ناهمسانگرد بسیار سخت و هزینه‌بر و گاهی ناممکن است. لذا برای پیاده‌سازی و ساخت مواد با ضرایب ناهمسانگرد استفاده از ساختارهای ترکیبی و یا دوره‌ای با مواد همسانگرد که بتوانند ضرایب ناهمسانگرد را به صورت مؤثر معادل‌سازی کنند، پیشنهاد شد [۱۰-۱۳]. اخیراً در مقاله [۱۴] ساختار متشکل از لایه‌های همگن استوانه‌ای با طول بسیار زیاد (دو بعدی) برای ایجاد پارامترهای ناهمسانگرد در راستای تولید فریب آکوستیکی با حل معادلات موج مورد استفاده قرار گرفته است. در ادامه با همین رویکرد از تجزیه و تحلیل معادلات موج و استخراج ضرایب

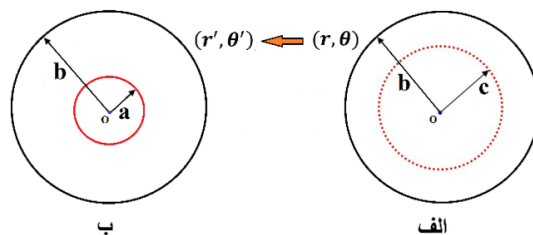
$$\kappa(r) = \frac{1}{m_1 m_1^3} \frac{1}{r'^{(m-1)}} \kappa, \quad (6)$$

این دستگاه با این پارامترهای آکوستیکی آرمانی نامرئی است و همان پراکندگی را تولید می کند که فضای آزاد ایجاد می کند. طرح پراکندگی امواج آکوستیکی این ساختار برای امواج تخت به صورت شکل ۲ است.

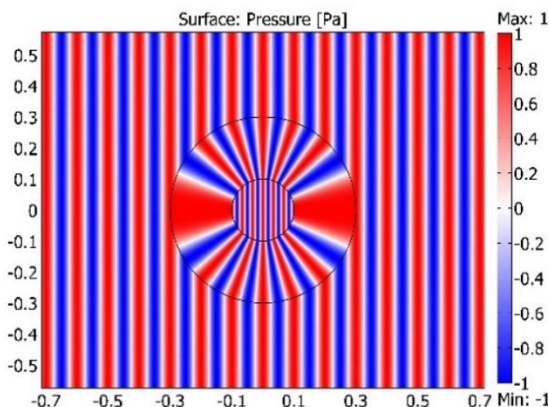
در دستگاه با این پارامترهای آکوستیکی آرمانی نامرئی است و همان پراکندگی را تولید می کند که فضای آزاد ایجاد می کند. طرح پراکندگی امواج آکوستیکی این ساختار برای امواج تخت به صورت شکل ۲ است.

در این ساختار آرمانی ناحیه هسته  $0 < r' < a$  به خاطر همسانگرد بودن (معادلات (۲) و (۳)) به راحتی قابل ساخت و پیاده سازی است ولی در ناحیه  $a < r' < b$  ساخت ماده با پارامترهای ناهمسانگرد معادلات (۴) تا (۶) چالش برانگیز است. قابل ذکر است که این نوع مواد آکوستیکی ناهمسانگرد در طبیعت یافت نمی شوند لذا این نوع ساختارها را معمولاً در آزمایشگاه ها با تکنیک ها یا چینش های دوره ای خاصی از مواد همگن می توان ساخت. یکی از این تکنیک ها استفاده از آرایش دوره ای به صورت لایه یا پوسته است که برای ساختار سه بعدی این مقاله استفاده خواهد شد. در این مقاله، تکنیک مشابه مقاله [۱۴] ولی به صورت سه بعدی، یعنی پوسته های کروی هم مرکز و با محاسبه مجدد نظریه آکوستیک تبدیل برای دستگاه مختصات کروی و حل دقیق معادله دیفرانسیل موج آکوستیکی سه بعدی، ارائه خواهد شد.

در ادامه، با استفاده از نظریه میدان مؤثر نشان داده خواهد شد که با آرایش پوسته ای به پارامترهای مشابه پارامترهای ناهمسانگرد معادلات (۴) تا (۶) نیز می توان رسید. این پارامترهای آکوستیکی به دست آمده نشان دهنده وجود ناهمسانگردی شدیدند. ساختار پیشنهادی برای تولید این پارامترهای ناهمسانگرد استفاده از لایه های پوسته کروی هم مرکز به صورت شکل ۳ خواهد بود. در این حالت اگر هر سلول را متشکل از دو لایه متوالی در نظر بگیریم، با استفاده از نظریه میدان مؤثر، پارامترهای مؤثر این محیط مطابق معادلات (۷) تا (۹) محاسبه خواهند شد.



شکل ۱. (الف) فضای مجازی با مختصات  $(r, \theta)$  به شکل نمادین و (ب) فضای واقعی با مختصات  $(r', \theta')$  به شکل نمادین



شکل ۲. طرح پراکندگی موج آکوستیکی برای ساختار آرمانی.

$f(b) = b$  را دارد که در این صورت  $m = \log_b \left( \frac{b}{c} \right)$  خواهد بود. با استفاده از نظریه آکوستیک تبدیل در ناحیه هسته  $(0 < r' < a)$  ضرایب آکوستیکی به صورت معادلات (۲) و (۳) به دست خواهد آمد.

$$\rho_1 = \frac{a}{c} \rho, \quad (2)$$

$$\kappa_1 = \frac{a^3}{c^3} \kappa, \quad (3)$$

که  $\rho$  چگالی جرمی و  $\kappa$  مدول حجمی فضای آزاد است. برای ناحیه  $a < r' < b$  نیز پارامترهای آکوستیکی به صورت معادله (۴) محاسبه می شود.

$$\rho_r = \frac{m}{m_1} \frac{1}{r'^{(m-1)}} \rho = \frac{m}{g(r')} \rho, \quad (4)$$

که در آن  $g(r') = m_1 r'^{(m-1)}$  است.

$$\rho_\theta = \rho_\phi = \frac{1}{m m_1} \frac{1}{r'^{(m-1)}} \rho = \frac{1}{m g(r')} \rho, \quad (5)$$

و مدل حجمی نیز به صورت معادله (۶) خواهد بود.

$$\rho_B = \left( \rho_\theta - \sqrt{\rho_\theta^2 - \rho_r \rho_\theta} \right), \quad (11)$$

با توجه به این که  $\rho_\theta$ ،  $\rho_r$  و  $\kappa(r)$  متناسب با مقدار مکان  $r$  در مکان سلول و با روابط (۴) تا (۶) در مکان میانگین هر سلول تعیین می‌شوند اما تولید این ساختار مشکل است؛ زیرا به تعداد زیادی سلول با پارامترهای متفاوت نیاز است. قبل از حل این چالش ابتدا در راستای ایجاد بیشترین بهره و ایجاد بیشینه تمرکز انرژی حد  $b \rightarrow c$  را در نظر بگیرید که در این صورت  $m \rightarrow 0$  خواهد شد و طبق معادلات (۴) تا (۶) نیز پارامترهای آکوستیکی برای ناحیه  $a < r' < b$  به صورت معادله (۱۲) خواهد بود.

$$\begin{cases} \rho_r \rightarrow 0 \\ \rho_\theta, \rho_\phi \rightarrow \infty \\ \kappa(r) \rightarrow \infty \end{cases},$$

با توجه به معادلات (۴) تا (۶) و حد  $m \rightarrow 0$  رابطه (۱۲) به صورت رابطه (۱۳) بازنویسی خواهد شد.

$$\begin{cases} \rho_r \rightarrow A\rho m \\ \rho_\theta, \rho_\phi \rightarrow A\rho / m \\ \kappa(r) \rightarrow A^r \kappa / m \end{cases},$$

که در این معادلات  $A = \frac{1}{g(r')}$  و با توجه به ضریب

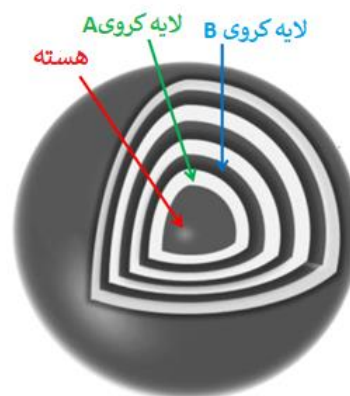
$m \rightarrow 0$ ، وابستگی مکانی هر سلول  $g(r')$ ، برخلاف روابط (۱۰) و (۱۱) بی‌تأثیر می‌شود. لذا در کل دستگاه با این ساختار و پارامترها فقط به دو نوع ماده برای ایجاد ساختار محیط مؤثر معادلات (۴) تا (۶) نیازمندیم. با این روش پارامترهای  $\rho_A$ ،  $\rho_B$  و  $\kappa$  به صورت معادلات (۱۴) تا (۱۶) به دست خواهند آمد.

$$\rho_A = 2\rho A / m, \quad (14)$$

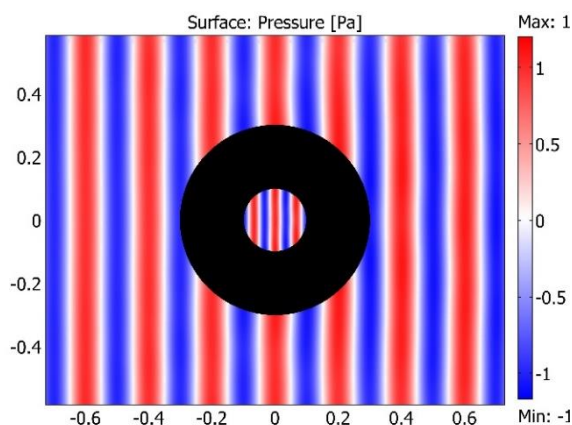
$$\rho_B = \rho A m / 2, \quad (15)$$

$$\kappa_A = \kappa_B = A^r \kappa / m, \quad (16)$$

طرح الگوی پراکندگی این ساختار برای امواج آکوستیکی با پارامترهای به دست آمده به صورت شکل ۴ است.



شکل ۳. ساختار پیشنهادی پوسته‌های کروی هم مرکز با پارامترهای همگن و همسانگرد برای ایجاد محیط مؤثر با پارامترهای ناهمسانگرد.



شکل ۴. طرح پراکندگی موج آکوستیکی برای ساختار با پوسته‌های کروی هم مرکز.

$$\rho_r = \frac{\rho_A + \eta \rho_B}{1 + \eta}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho_\theta} = \frac{1}{\rho_\phi} = \frac{1}{1 + \eta} \left( \frac{1}{\rho_A} + \frac{\eta}{\rho_B} \right), \quad (8)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{1 + \eta} \left( \frac{1}{\kappa_A} + \frac{\eta}{\kappa_B} \right), \quad (9)$$

که در آنها  $\rho_A$  و  $\rho_B$ ،  $\kappa_A$  و  $\kappa_B$  به ترتیب چگالی جرمی و مدول حجمی پوسته‌های A و B هستند.  $\rho_\theta$  و  $\rho_\phi$  مؤلفه‌های مؤثر ناهمسانگرد هستند.

با انتخاب ضریب پراکندگی نسبی  $\eta = 1$ ، روابط  $\rho_B$  و  $\rho_A$  به صورت زیر خواهند بود:

$$\rho_A = \left( \rho_\theta + \sqrt{\rho_\theta^2 - \rho_r \rho_\theta} \right), \quad (10)$$

## ۳. طرح فیزیک مسئله

این معادله در ناحیه  $a < r < b$  متمرکز کننده به صورت معادله (۲۰) خواهد بود.

$$\frac{\omega^2}{v_p^2} r^2 p + \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\kappa}{\rho_\phi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\kappa}{\rho_\phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} = 0, \quad (20)$$

که در این معادله  $\rho_\phi = \rho_\theta$  و  $v_p$  سرعت موج در محیط آزاد و به صورت  $v_p = \sqrt{\rho_r / \kappa}$  است. با شروع از روش تفکیک متغیرها و انتخاب جواب معادله به صورت  $p(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi)$  و با ضرب کل معادله در  $f(r)$  به  $\kappa^{-1} \rho_\phi \sin \theta$  معادله مربوط به تابع شعاعی  $f(r)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_\phi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{\rho_r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \left[ k^2 \frac{\rho_\phi}{\kappa} r^2 - n(n+1) \right] f = 0, \quad (21)$$

این معادله به جواب‌های هنکل و بسل کروی منجر می‌شود که با توجه به شرایط اولیه ترکیبی از این دو جواب به عنوان جواب کلی معادله در نظر گرفته می‌شود. در این معادله  $k^2 = \omega^2 / v_p^2$  است و تابع  $g$  نیز به صورت توابعی از توابع لژاندر  $g(\theta) = K_n P_n^m(\cos \theta)$  و وابستگی زاویه سمتی  $h$  به صورت ضرایبی از هارمونیک‌های سمتی  $h(\phi) = K_r \cos m\phi + K_s \sin m\phi$  است. با حل معادله موج با شرایط اولیه و شرایط مرزی هر ناحیه، میدان فشار کل در هر ناحیه به دست خواهد آمد. برای مثال برای  $r > b$  موج فشار ورودی با جبهه موج تخت با استفاده از بسط‌های کروی به صورت معادله (۲۲) خواهد بود.

$$p^{inc} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (\nu n + 1) j_n(k.r) P_n(\cos \theta), \quad (22)$$

که در آن ضریب  $K_n = i^n (\nu n + 1)$  و  $P_n(\cos \theta)$  امین  $n$  چندجمله‌ای لژاندر و در نهایت  $j_n(k.r)$  توابع بسل کروی است. به خاطر تقارن در زاویه سمتی  $\phi$ ، میدان پراکنده شده را نیز به صورت معادله (۲۳) بر حسب بسط‌های کروی می‌توان نوشت.

$$p^{scat} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n i^n (\nu n + 1) h_n^*(k.r) P_n(\cos \theta), \quad (23)$$

در این قسمت ابتدا پراکنندگی موج آکوستیکی از ساختار شکل ۵ با پارامترهای تبدیل یافته و سپس پراکنندگی موج آکوستیکی از ساختار پوسته‌ای شکل ۳ بررسی خواهد شد تا در بخش بعد بتوان به شرح تحلیلی ایجاد فریب آکوستیکی پرداخت. با در نظر گرفتن وابستگی زمانی موج به صورت  $e^{-i\omega t}$ ، معادلات موج آکوستیکی به صورت معادلات (۱۷) و (۱۸) خواهند بود.

$$\nabla p = i\omega \rho(r) \rho \mathbf{v} \quad (17)$$

$$i\omega p = \kappa(r) \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (18)$$

که در آنها  $p$  فشار نرده ای،  $\mathbf{v}$  بردار سرعت شماره و  $\kappa$  مدول حجمی نسبت به  $\kappa$  است.  $\rho$  تانسور چگالی تعمیم یافته ناهمسانگرد نسبت به  $\rho$  است.

برای ارائه فیزیک مسئله، در اینجا ابتدا فرض می‌شود یک موج آکوستیکی یکنواخت با جبهه موج تخت از چپ به راست تحت زاویه  $\theta = 0$  بدون افت به متمرکز کننده سه بعدی کروی، مطابق شکل ۵، برخورد می‌کند. در ناحیه بیرون کره  $r > a$  چگالی جرمی و مدول حجمی  $\rho$  و  $\lambda$  به صورت یکنواخت هستند و در ناحیه بین دو کره با شعاع  $a$  و  $b$  یعنی  $a < r < b$  طبق معادلات (۴) تا (۶)، ماده پارامترهای ناهمسانگرد دارد که از تئوری آکوستیک تبدیل قابل محاسبه است.

تقارن مسئله ایجاب می‌کند پراکنندگی لایه متمرکز کننده از جهت فرود آمدن موج بر دستگاه مستقل باشد. بنابراین پارامترهای ناحیه متمرکز کننده باید فقط به فاصله شعاعی و به صورت توابعی از  $r$  به صورت  $\rho_\phi(r)$ ،  $\rho_\theta(r)$ ،  $\rho_r(r)$  و  $\kappa(r)$  باشد. قابل ذکر است که تقارن ایجاب می‌کند که  $\rho_\phi = \rho_\theta$  در قسمت قبل، از تئوری آکوستیک تبدیل همین نتایج نیز به صورت تحلیلی ارائه شده بودند.

با ترکیب و دیورژانس گرفتن از معادلات (۱۷) و (۱۸) معادله حاکم بر فشار نیز به صورت معادله (۱۹) خواهد بود.

$$\nabla \cdot \left( \overset{=}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{\kappa} p = 0, \quad (19)$$

نیز برای مثال برای لایه  $m$  به صورت معادله (۲۶) خواهد بود که ترکیبی از توابع هنکل و بسل کروی است.

$$p^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n (2n+1) \left[ a_n^{(m)} j_n(k_{core}r) + c_n^{(m)} h_n^{(m)}(k,r) \right] P_n(\cos\theta), \quad (26)$$

در این معادله، ضرایب  $a_n^{(m)}$  و  $c_n^{(m)}$  ضرایب نامعلوم بسط میدان موج فشار هستند که با استفاده از شرایط مرزی باید محاسبه شوند. در قسمت بعد با محاسبه این ضرایب در زمانی که یک شیء کروی در مرکز هسته قرار گرفته است، اثرات فریب آکوستیکی این ساختار بررسی خواهد شد.

#### ۴. فریب آکوستیکی

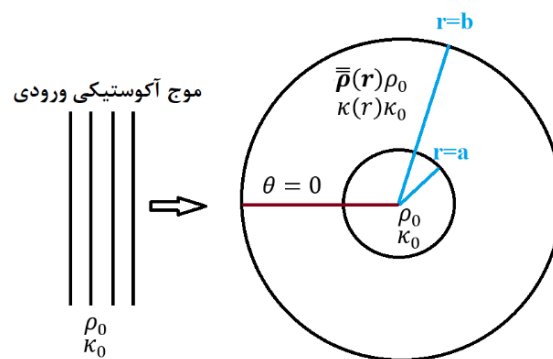
در اینجا برای بررسی اثرات پراکندگی و فریب آکوستیکی یک گوی بسیار چگالیده را در مرکز ناحیه هسته قرار داده تا الگوی پراکندگی آن محاسبه شود. با مقایسه این الگوی پراکندگی با الگوی پراکندگی ناشی از یک گوی مشابه، با استفاده از شرط مرزی پیوستگی میدان نرده‌ای فشار در مرزها و شرط مرزی پیوستگی مؤلفه عمود بر مرز بردار سرعت انتشار موج در دو طرف مرز که در اینجا مؤلفه شعاعی موج است،

$$v_r = \left( \frac{i}{\omega \rho_r \rho_{relative}} \right) \frac{\partial p}{\partial r},$$

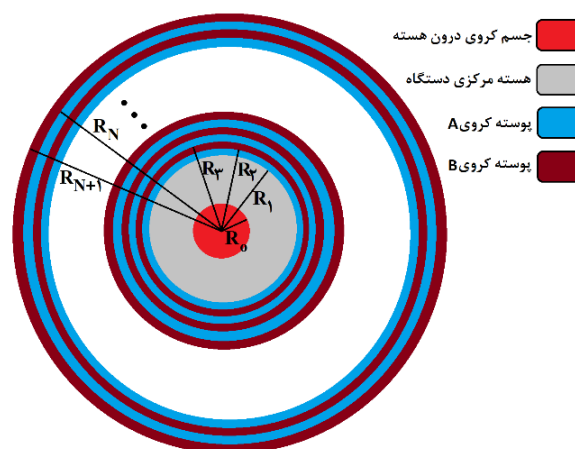
می‌توان ضرایب نامعلوم معادلات

(۲۲) تا (۲۴) را به دست آورد و الگوی پراکندگی میدان را در همه ناحیه‌ها نمایش داد. برای این منظور، ابتدا همه نواحی و اجسام برچسب گذاری شده است. مطابق شکل ۶ برای برچسب گذاری جسم کروی، درون هسته را ناحیه شماره صفر و هسته را ناحیه شماره یک در نظر می‌گیریم، اولین لایه را ناحیه شماره دو و اگر تعداد کل لایه‌ها  $N$  باشد، مطابق شکل ۶، لایه آخر لایه شماره  $N+1$  برچسب خواهد خورد و ناحیه فضای آزاد نیز ناحیه با برچسب  $out$  یا  $N+1$  خواهد بود.

در این صورت شعاع جسم کروی  $R_c$ ، شعاع هسته  $R_h$ ، شعاع خارجی اولین پوسته کروی  $R_1$  و به همین صورت شعاع خارجی پوسته  $m$  ام  $R_{m+1}$  (و شعاع داخلی پوسته  $m$  ام  $R_m$ ) خواهد بود. شعاع خارجی آخرین لایه یعنی حالتی که  $m = N+1$  نیز  $R_{N+1}$  خواهد بود. قابل ذکر است که



شکل ۵. برخورد موج آکوستیکی به دستگاه طراحی شده با پارامترهای تبدیل یافته.



شکل ۶. ساختار متمرکز کننده کروی با پوسته‌های کروی متناوب حاوی جسم کروی درون هسته.

در این معادله،  $h_n^{(m)}(k,r)$  تابع هنکل کروی نوع اول و  $A_n$  ضریب پراکندگی است که با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شود. لذا میدان کل در ناحیه خارج از دستگاه به صورت معادله (۲۴) خواهد بود:

$$p^{out} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n (2n+1) \left[ j_n(k,r) + A_n h_n^{(m)}(k,r) \right] P_n(\cos\theta), \quad (24)$$

برای ناحیه مرکزی  $r < a$  میدان فشار نیز به صورت معادله (۲۵) خواهد بود که برای جلوگیری از تکینگی و بینهایت شدن میدان در مبدأ، ضریب تابع هنکل صفر خواهد بود.

$$p^{core} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n j_n(k_{core}r) P_n(\cos\theta), \quad (25)$$

در ناحیه میانی که به صورت لایه بندی شده است پارامترهای آکوستیکی هر لایه جداگانه محاسبه شده و جواب معادله موج

$$\begin{bmatrix} a_n^{(N)} \\ c_n^{(N)} \end{bmatrix} = \overline{\overline{P}}_{N-1}^{-1} \overline{\overline{Q}}_{N-1} \begin{bmatrix} a_n^{(N-1)} \\ c_n^{(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

و در نهایت با تکرار همه شرایط مرزی و ادغام همه روابط مرزی می توان معادله (۳۴) را که ضرایب بسط موج فشار در خارج ساختار (در ناحیه آزاد) است را بر حسب ضراب موج در داخل جسم کروی به دست آورد.

$$\begin{bmatrix} a_n^{(N+1)} \\ c_n^{(N+1)} \end{bmatrix} = \prod_{m=N-1}^N \overline{\overline{P}}_{N-m+1}^{-1} \overline{\overline{Q}}_{N-m} \begin{bmatrix} a_n^{(\cdot)} \\ c_n^{(\cdot)} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

با استفاده از معادلات (۲۴) و (۲۶) برای محیط خارج از دستگاه باید  $a_n^{(N+1)} = 1$  باشد. همچنین همانطور که در رابطه (۲۵)

نشان داده شده است، برای ضریب توابع هنکل باید  $c_n^{(\cdot)} = 0$  باشد. در این صورت معادله (۳۳) به صورت رابطه ماتریسی

$$\overline{\overline{P}}_{i-1} \overline{\overline{Q}}_{i-1} \begin{bmatrix} i^n \nu_{n+1} \\ i^n \nu_{n+1} A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^{(\cdot)} \\ c_n^{(\cdot)} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

در این صورت

$$a_n^{(\cdot)} = \frac{i^n (\nu_{n+1})}{t_{11}}, \quad (36)$$

$$A_n = \frac{t_{21}}{t_{11}}, \quad (37)$$

ضرایب هر لایه  $m$  را نیز با استفاده از رابطه (۲۹) می توان به صورت معادله (۳۸) نوشت.

$$\begin{bmatrix} a_n^{(m+1)} \\ c_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \overline{\overline{P}}_{m+1}^{-1} \overline{\overline{Q}}_m \begin{bmatrix} i^n \nu_{n+1} / t_{11} \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad (38)$$

با استفاده از این رابطه بازگشتی توسط متلب و با تکرار ضرب ماتریس ها، ضرایب میدان را در هر لایه و ناحیه می توان به دست آورد. نتیجه این محاسبات در شکل ۷ الف نمایش داده شده است.

با تکرار این روش نیز می توان الگوی پراکندگی را برای جسم کروی با اندازه و پارامترهای آکوستیکی تبدیل یافته به دست آورد. میدان کل در ناحیه خارج از جسم کروی با اندازه تبدیل یافته  $R' = bR/a$  و پارامترهای آکوستیکی تبدیل یافته به صورت رابطه (۳۹) خواهد بود.

$R_1 = a$  و  $R_{N+1} = b$ . با استفاده از شرط مرزی پیوستگی میدان فشار در مرز لایه  $m$ ام و لایه  $(m+1)$ ام یعنی در  $r = R_m$ ، به صورت معادله (۲۷) خواهد بود.

$$a_n^{(m+1)} j_n(k_{m+1} R_m) + c_n^{(m+1)} h_n'(k_{m+1} R_m) = a_n^{(m)} j_n(k_m R_m) + c_n^{(m)} h_n'(k_m R_m), \quad (27)$$

با استفاده از شرط مرزی، پیوستگی مؤلفه عمودی بردار سرعت در  $r = R_m$  به صورت معادله (۲۸) خواهد بود.

$$\frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} \left[ a_n^{(m+1)} j_n'(k_{m+1} R_m) + c_n^{(m+1)} h_n'(k_{m+1} R_m) \right] = \frac{ik_m}{\omega \rho_m} \left[ a_n^{(m)} j_n'(k_m R_m) + c_n^{(m)} h_n'(k_m R_m) \right] \quad (28)$$

معادلات (۲۷) تا (۲۸) را می توان به صورت معادله ماتریسی

$$\overline{\overline{P}}_{m+1} \begin{bmatrix} a_n^{(m+1)} \\ c_n^{(m+1)} \end{bmatrix} = \overline{\overline{Q}}_m \begin{bmatrix} a_n^{(m)} \\ c_n^{(m)} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

نوشت که در آن ماتریس های  $\overline{\overline{P}}$  و  $\overline{\overline{Q}}$  به صورت معادلات (۳۰) و (۳۱) تعریف می شوند.

$$\overline{\overline{P}} = \begin{bmatrix} j_n(k_{m+1} R_m) & h_n'(k_{m+1} R_m) \\ \frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} j_n'(k_{m+1} R_m) & \frac{ik_{m+1}}{\omega \rho_{m+1}} h_n'(k_{m+1} R_m) \end{bmatrix}, \quad (30)$$

و

$$\overline{\overline{Q}} = \begin{bmatrix} j_n(k_m R_m) & h_n'(k_m R_m) \\ \frac{ik_m}{\omega \rho_m} j_n'(k_m R_m) & \frac{ik_m}{\omega \rho_m} h_n'(k_m R_m) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

با استفاده ماتریس معکوس  $\overline{\overline{P}}^{-1}$  می توان ضرایب را

$$\begin{bmatrix} a_n^{(m)} \\ c_n^{(m)} \end{bmatrix} \text{ بر حسب } \begin{bmatrix} a_n^{(m+1)} \\ c_n^{(m+1)} \end{bmatrix} \text{ نوشت که در این صورت برای به دست}$$

آوردن ضریب موج در ناحیه آزاد باید  $m = N$  قرار داد.

$$\begin{bmatrix} a_n^{(N+1)} \\ c_n^{(N+1)} \end{bmatrix} = \overline{\overline{P}}_{N+1}^{-1} \overline{\overline{Q}}_N \begin{bmatrix} a_n^{(N)} \\ c_n^{(N)} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

با تکرار این شرایط مرزی برای مرز  $r = R_{N-1}$ ، رابطه ماتریسی (۳۳) به صورت زیر به دست خواهد آمد:

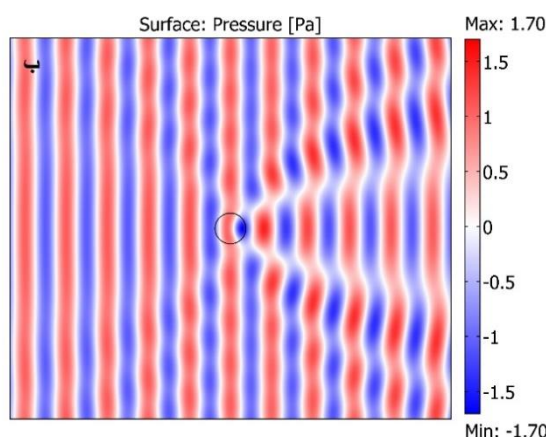
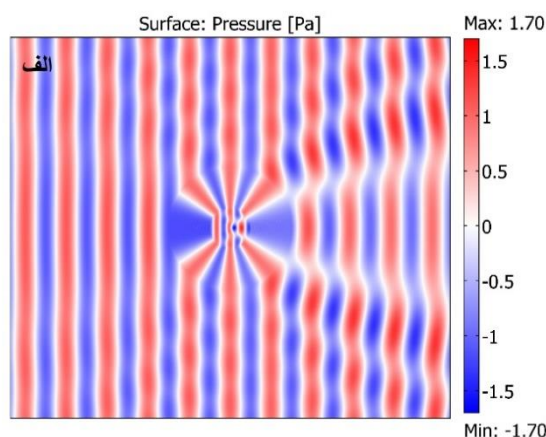
بسطها به صورت رابطه‌های (۴۱) و (۴۲) به دست خواهند آمد. الگوی پراکندگی میدان نیز در شکل ۷. ب قابل مشاهده است.

$$D_n = \frac{\beta j_n(k.R') j_n'(k_{core} R') - j_{core}(k.R') j_n'(k.R')}{\beta j_n'(k_c R') h_n'(k.R') - j_{core}(k.R') h_n'(k.R')}, \quad (41)$$

$$E_n = \frac{j_n(k.R')}{j_n(k_{core} R')} + \frac{D_n h_n'(k.R')}{j_n(k_{core} R')}. \quad (42)$$

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله حل تحلیلی دقیقی برای الگوی پراکندگی موج آکوستیکی، برای ساختاری با یک کره در درون هسته مرکزی بررسی شد. با مقایسه الگوی پراکندگی شیء فوق داخل هسته این ساختار (شکل ۷. الف) با الگوی پراکندگی یک شیء دیگر (شکل ۷. ب) با پارامترهای آکوستیکی و اندازه متفاوت (تبدیل یافته)، فریب آکوستیکی مورد نظر به صورت آرمانی تشخیص داده شد. به صورت خاص در این الگوی پراکندگی به نظر می‌رسد این ساختار اندازه جسم را بزرگ‌تر از اندازه واقعی نشان می‌دهد. لذا این فریب آکوستیکی، یک روش مفید برای افزایش دقت در تصویربرداری بافت‌های پزشکی با استفاده از دستگاه‌های سونوگرافی است. به عبارت دیگر، با بهره‌گیری از این تکنیک، می‌توان از تصاویر با کیفیت بالاتر و بزرگنمایی بیشتری از بافت‌های حساس در دستگاه‌های سونوگرافی بهره برد. علاوه بر این، یکی از مزایای این تکنیک نسبت به دستگاه‌های مشابه استوانه‌ای [۱۶]، رفع محدودیت کارکرد دستگاه‌های استوانه‌ای در راستای محور z است که به دلیل ماهیت کروی بودن پارامترهای آکوستیکی ساختار و عدم وابستگی آنها به زوایای سمتی و سمت الرأسی، حاصل می‌شود.



شکل ۷. الف) الگوی پراکندگی میدان آکوستیکی از دستگاه طراحی شده با پوسته‌های هم مرکز حاوی جسم کروی درون هسته و (ب) الگوی پراکندگی میدان آکوستیکی از یک جسم کروی با اندازه پارامترهای تبدیل یافته.

$$P_T^{out} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} i^n (\nu n + 1) \left[ j_n(k.r) + D_n h_n'(k.r) \right] P_n(\cos\theta), \quad (39)$$

میدان را نیز در داخل جسم کروی به صورت رابطه (۴۰) می‌توان بر حسب توابع بسل کروی نوشت.

$$P_T^{core} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} E_n i^n (\nu n + 1) j_n(k_{core} r) P_n(\cos\theta), \quad (40)$$

با استفاده از شرایط مرزی، پیوستگی موج فشار و پیوستگی مؤلفه عمودی بردار سرعت انتشار، ضرایب  $D_n$  و  $E_n$  این

## مراجع

1. L S Dolin and I V U Zavedenii, *Radiofizika* **4** (1961) 964.
2. J B Pendry, D Schurig, and D R Smith, *Science* **312**, 5781 (2006) 1780.



3. U Leonhardt, *Science* **312**, 5781 (2006) 1777.
4. H Chen and C T Chan, *Applied Physics Letters* **91** (2007) 183518.
5. S A Cummer and D Schurig, *New Journal of Physics* **9**, 3 (2007) 45.
6. D Torrent and J Sánchez-Dehesa, *New Journal of Physics* **10**, 6 (2008) 063015.
7. J Yang, M Huang, C Yang, J Peng, and J Chang, *Science* **49**, 1 (2010) 9.
8. M Rajabi and A Mojahed, *Acta Acustica United with Acustica* **105**, 3 (2019) 419.
9. D Egger and N Kessissoglou, *Scientific Reports* **10**, 1 (2020) 1.
10. T Koschny, M Kafesaki, E N Economou, and C M Soukoulis, *Physical Review Letters* **93**, 10 (2004) 107402.
11. L M Brekhovskikh and O A. Godin, "Acoustics of layered media I: Plane and quasi-plane waves", Springer Science & Business Media, 5 (2012)
12. Y Battie, A En Naciri, W Chamorro, and D Horwat, *The Journal of Physical Chemistry C* **118**, 9 (2014) 4899.
13. T C Choy, "Effective medium theory: principles and applications", Oxford University Press, 165 (2015.).
14. M M Sadeghi, *Frontiers in Materials* **9** (2022) 937437.
15. Y R Wang, H Zhang, S Y Zhang, L Fan, and H X Sun, *The Journal of the Acoustical Society of America* **131**, 2 (2012) 150.
16. M M Sadeghi, *Acoustical Physics* **69**, 1 (2023) 1.